ロバートソン・ウォーカー解

宇宙モデルの基本であるロバートソン・ウォーカー解を導きます。
一部記号が重複していますが、混乱はしないと思います。
「′」は変数の微分としているので気を付けてください ($f'(x)$ なら x の微分)。

ロバートソン・ウォーカー解は、アインシュタイン方程式を解かなくてもほぼ決定されますが、まずは素直にアインシュタイン方程式を解いていきます。
状況を設定して計量の形を制限します。宇宙の構造とかは置いといて、簡単な状況として仮定します。3 次元空間の構造として

- 3 次元空間は一様 (homogeneous) に広がっている
- 3 次元空間はどの方向を向いても同じ (等方的、isotropic)

この 2 つを入れます。同様に、空間内にいる物質 (物質の分布密度) も一様、等方的に分布しているとします。また、空間が一様に広がっていることは並進不変性、どの方向を向いても同じことは回転不変性に対応します。これらの仮定によって、計量の 3 次元空間成分はかなり制限されます。
等方的であるためには、3 次元空間は球対称性を持たなければならないので (原点を中心とする球内部には特別な方向がない)、3 次元の線素は

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

もしくは、極座標で

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

とします。ただし、これに比例するものも等方的なので、3 次元が等方的な線素としては

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{i0}dx^i dx^0 + g_{0i}dx^0 dx^i + A(x_0, r)d\sigma^2$$

このような形が一般的になります。$A(x_0, r)$ はスカラーです。また、シュバルツシルト解のように $dt \to -dt$ で計量は変わらないという仮定をしていないので、g_{i0} は消えずに残っています。
g_{00}, g_{i0} も決定してしまいます。そのために、x^0 一定面で 4 次元空間を切った 3 次元超曲面を持ち込みます。3 次元超曲面上の点は x^0 方向の測地線と直交しているとし、$x^0 = 0$ での超曲面上の点 P を $(0, a, b, c)$ とします。x^0 方向に直交しているので、$x^0 \neq 0$ での超曲面での測地線上の点 P' は (x^0, a, b, c) となります (x^0 は P と P' 間の曲線の長さ)。
このように設定すると、$x^0 = 0$ での超曲面 S 上の点 P とその点での $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ は常に直交しなくてはいけません。なので

$$g_{\mu\nu}p^\mu u^\nu = g_{00}p^0 u^0 + g_{0i}p^0 u^i + g_{i0}p^i u^0 + \cdots = 0$$

から、超曲面 S において $g_{i0} = 0$ となります。
g_{00}, g_{i0} を決めるために、測地線方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

を考えます。x^i が定数とすると、$\mu=i$ のとき

$$\Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}=0$$

$dx^0/ds\neq 0$ より

$$\Gamma^i_{00}=\frac{1}{2}g^{ij}\big(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\big)=0$$

超曲面 S とすれば $g_{0i}=0$ から

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}=0$$

となります。つまり、g_{00} は空間座標から独立です。そうすると x_0 のみに依存するので、$g_{00}(x_0)dx^0dx^0$ の組み合わせは

$$dx^0\ \Rightarrow\ \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(x^0)}}$$

という x^0 にのみ依存する座標変換によって $g_{00}(x_0)$ を消せてしまえます。なので、測地線上で g_{00} は常に 1 にできます（もっと単純には超曲面 S に x^0 方向が直交しているので、2 つの超曲面間は $ds^2=(dx^0)^2$ だから）。そうすると g_{0i} は

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0}=0$$

でなければいけないので、x^0 に依存しません（x^0 に沿って定数）。よって、超曲面 S 上でなくても与えられた測地線において $g_{0i}=0$ のままとなります。

この状況を使います。つまり、物質が今導入した 3 次元超曲面上で静止している座標系を考えます。このとき、物質の測地線は 3 次元超曲面に直交し、x^0 方向に平行となります (4 元速度が $(1,0,0,0)$)。

というわけで、この座標系において計量は

$$ds^2=(dx^0)^2+A(x_0,r)d\sigma^2$$

時間座標は $x_0=x^0=ct$ とします。これの x^i を定数 ($dx^i=0$) としたとき、$ds^2=(dx^0)^2$ になるので、$x^0=ct$ での t は物質の固有時間になっています。今は g_{00},g_{i0} を決めるために超曲面での話をしましたが、このような時間座標が存在することを先に仮定してしまう場合もあります。

このように宇宙において 3 次元超曲面上で静止している物質を取る座標系を共動座標 (comoving coordinate) といいます。静止している物質でなく、静止している観測者と言う場合もあります。簡単に言えば、共動座標は物質に張り付いている座標系です。共動座標系では計量の形が簡単になるだけでなく、t が固有時間になるという便利な性質を持っています。

まとめると、一様、等方な 3 次元空間において共動座標を取ったときの計量の形は

$$ds^2 = (dx^0)^2 + A(x_0, r)d\sigma^2$$

ということです。これをさらに制限するために、ある与えられた時間において異なった地点にいる観測者が同じ物理を記述するという条件を入れます。時間が固定された状態で、異なった地点で同じ物理を記述するというのは、空間の距離の比が時間に関わらず一定であると言うことができます (2 人の観測者は異なった長さの基準を持っている)。つまり、異なった地点を $(r, \theta, \varphi), (r', \theta', \varphi')$ とすれば

$$\frac{A(x_0, r)}{A(x_0, r')}$$

これが時間独立になっていろということになります。そうすると

$$\frac{A(x_0, r)}{A(x_0, r')} = \frac{G(x_0, r') + F(r, r')}{A(x_0, r')}$$

このようになっていると考えれば、明らかに時間独立になります。そして、r' は任意なので適当に固定してしまうことで

$$A(x_0, r) = G(x_0) + F(r)$$

と書けます。

これで計量の形が決まったので、解いていきます。計量の形は極座標を使って

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_0^2 + e^{G(x_0)+F(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= c^2 dt^2 + e^{G(x_0)+F(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

とします。後の計算のために exp にしています。これの変分問題は

$$\delta \int [(\dot{x}_0)^2 - e^A(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)]ds = 0$$

ドットは s による微分です。対応するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{ds}\frac{dL}{d\dot{x}^\alpha} = \frac{dL}{dx^\alpha}$$

の各成分を計算することで (L は [ ] 部分)

- $\alpha = 0$ (x_0)

$$0 = \ddot{x}_0 + \frac{1}{2}G'(x_0)e^A(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2)$$

- $\alpha = 1\ (r)$

$$\begin{aligned}
0 =& -2e^A\ddot{r} - 2e^A\frac{dA}{ds}\dot{r} + e^AF'(r)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + 2e^Ar(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \\
=& -2e^A\ddot{r} - 2e^AG'(x_0)\dot{x}_0\dot{r} - 2e^AF'(r)\dot{r}\dot{r} + e^AF'(r)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + 2e^Ar(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \\
=& \ddot{r} + G'(x_0)\dot{x}_0\dot{r} + F'(r)\dot{r}^2 - \frac{1}{2}F'(r)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \\
=& \ddot{r} + \frac{1}{2}F'(r)\dot{r}^2 + G'(x_0)\dot{x}_0\dot{r} - (\frac{1}{2}r^2F'(r) + r)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)
\end{aligned}$$

- $\alpha = 2\ (\theta)$

$$\begin{aligned}
0 =& -2e^Ar^2\ddot{\theta} - 2e^Ar^2(G'(x_0)\dot{x}_0 + F'(r)\dot{r})\dot{\theta} - 4e^Ar\dot{r}\dot{\theta} + 2e^Ar^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\
0 =& r^2\ddot{\theta} + r^2G'(x_0)\dot{x}_0\dot{\theta} + (r^2F'(r) + 2r)\dot{r}\dot{\theta} - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\
0 =& \ddot{\theta} + G'(x_0)\dot{x}_0\dot{\theta} + (F'(r) + \frac{2}{r})\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

- $\alpha = 3\ (\varphi)$

$$\begin{aligned}
0 =& -2e^Ar^2\sin^2\theta\ddot{\varphi} - 2e^Ar^2\sin^2\theta(G'(x_0)\dot{x}_0 + F'(r)\dot{r})\dot{\varphi} - 4e^Ar\sin^2\theta\dot{r}\dot{\varphi} - 4e^Ar^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \\
0 =& -r^2\ddot{\varphi} - r^2(G'(x_0)\dot{x}_0 + F'(r)\dot{r})\dot{\varphi} - 2r\dot{r}\dot{\varphi} - 2r^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\theta}\dot{\varphi} \\
0 =& \ddot{\varphi} + G'(x_0)\dot{x}_0\dot{\varphi} + (F'(r) + \frac{2}{r})\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} =
\end{aligned}$$

$G'(t), F'(r)$ はそれぞれ t, r の微分であることを表しています。

これらと測地線方程式

$$\ddot{x}^\alpha + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\} \dot{x}^\beta\dot{x}^\eta = 0$$

を比較すると、クリストッフェル記号は例えば、$\alpha = 0$ のときで

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^0 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\} \dot{x}^\beta\dot{x}^\eta &= \ddot{x}^0 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \dot{x}^1\dot{x}^1 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \dot{x}^2\dot{x}^2 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \dot{x}^3\dot{x}^3 + \cdots \\
&= \ddot{x}^0 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \dot{r}^2 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \dot{\theta}^2 + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \dot{\varphi}^2 + \cdots = 0
\end{aligned}$$

なので

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}G'(x_0)e^A\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}G'(x_0)e^Ar^2\ ,\ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}G'(x_0)e^Ar^2\sin^2\theta$$

他も同様にすることで、0 でないクリストッフェル記号は

$$\left\{\begin{array}{c}0\\1\ 1\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)e^A\ ,\ \left\{\begin{array}{c}0\\2\ 2\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)e^Ar^2\ ,\ \left\{\begin{array}{c}0\\3\ 3\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)e^Ar^2\sin^2\theta$$

$$\left\{\begin{array}{c}1\\0\ 1\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)\ ,\ \left\{\begin{array}{c}1\\1\ 1\end{array}\right\}=\frac{1}{2}F'(r)\ ,\ \left\{\begin{array}{c}1\\2\ 2\end{array}\right\}=-(\frac{1}{2}r^2F'(r)+r)\ ,\ \left\{\begin{array}{c}1\\3\ 3\end{array}\right\}=-(\frac{1}{2}r^2F'(r)+r)\sin^2\theta$$

$$\left\{\begin{array}{c}2\\0\ 2\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)\ ,\ \left\{\begin{array}{c}2\\1\ 2\end{array}\right\}=\frac{1}{2}F'(r)+\frac{1}{r}\ ,\ \left\{\begin{array}{c}2\\3\ 3\end{array}\right\}=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{\begin{array}{c}3\\0\ 3\end{array}\right\}=\frac{1}{2}G'(x_0)\ ,\ \left\{\begin{array}{c}3\\1\ 3\end{array}\right\}=\frac{1}{2}F'(r)+\frac{1}{r}\ ,\ \left\{\begin{array}{c}3\\2\ 3\end{array}\right\}=\cot\theta$$

このとき

$$\ddot{x}^\alpha+\left\{\begin{array}{c}\alpha\\0\ 1\end{array}\right\}\dot{x}^0\dot{x}^1+\left\{\begin{array}{c}\alpha\\1\ 0\end{array}\right\}\dot{x}^1\dot{x}^0+\cdots=\ddot{x}^\alpha+2\left\{\begin{array}{c}\alpha\\0\ 1\end{array}\right\}\dot{x}^0\dot{x}^1+\cdots$$

となっていることに注意してください。
　リッチテンソルは

$$R_{\mu\nu}=\left\{\begin{array}{c}\beta\\\mu\ \nu\end{array}\right\}_{|\beta}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\\mu\ \beta\end{array}\right\}_{|\nu}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\\tau\ \mu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\tau\\\beta\ \nu\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\tau\\\mu\ \nu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\beta\\\tau\ \beta\end{array}\right\}$$

第二項と第四項に

$$\left\{\begin{array}{c}\beta\\\mu\ \beta\end{array}\right\}=(\log\sqrt{-g})_{|\mu}$$

を使って

$$R_{\mu\nu}=\left\{\begin{array}{c}\beta\\\mu\ \nu\end{array}\right\}_{|\beta}-(\log\sqrt{-g})_{|\mu|\nu}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\\tau\ \mu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\tau\\\beta\ \nu\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\tau\\\mu\ \nu\end{array}\right\}(\log\sqrt{-g})_{|\tau}$$

計量の行列式は

$$g=-e^{3A}r^4\sin^2\theta$$

なので

$$\log\sqrt{-g}=\frac{1}{2}(3A+4\log r+2\log|\sin\theta|)=\frac{1}{2}(3G(t)+3F(r)+4\log r+2\log|\sin\theta|)$$

と求まります。

リッチテンソルの第一項で 0 にならないのは

$$\left\{\begin{matrix}\beta\\1\ 1\end{matrix}\right\}_{|\beta}=\left\{\begin{matrix}0\\1\ 1\end{matrix}\right\}_{|0}+\left\{\begin{matrix}1\\1\ 1\end{matrix}\right\}_{|1}=\frac{1}{2}e^{A}(G''(x_0)+G'^2(x_0))+\frac{1}{2}F''(r)$$

$$\left\{\begin{matrix}\beta\\2\ 2\end{matrix}\right\}_{|\beta}=\left\{\begin{matrix}0\\2\ 2\end{matrix}\right\}_{|0}+\left\{\begin{matrix}1\\2\ 2\end{matrix}\right\}_{|\beta}=\frac{1}{2}e^{A}r^2(G''(x_0)+G'^2(x_0))-2r(\frac{1}{2}F'(r)+\frac{1}{r})-r^2(\frac{1}{2}F''(r)-\frac{1}{r^2})$$

$$=\ r^2\big[\frac{1}{2}e^{A}(G''(x_0)+G'^2(x_0))-(\frac{1}{2}F''(r)+\frac{F'(r)}{r}+\frac{1}{r^2})\big]$$

$$\left\{\begin{matrix}\beta\\3\ 3\end{matrix}\right\}_{|\beta}$$

$$=\left\{\begin{matrix}0\\3\ 3\end{matrix}\right\}_{|0}+\left\{\begin{matrix}1\\3\ 3\end{matrix}\right\}_{|1}+\left\{\begin{matrix}2\\3\ 3\end{matrix}\right\}_{|2}$$

$$=\frac{1}{2}e^{A}r^2\sin^2\theta\big(G''(x_0)+G'^2(x_0)\big)-2r(\frac{1}{2}F'(r)+\frac{1}{r})\sin^2\theta-r^2(\frac{1}{2}F''(r)-\frac{1}{r^2})\sin^2\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=r^2\sin^2\theta\big[\frac{1}{2}e^{A}(G''(x_0)+G'^2(x_0))-2\frac{1}{r}(\frac{1}{2}F'(r)+\frac{1}{r})-(\frac{1}{2}F''(r)-\frac{1}{r^2})+\frac{1}{r^2}\big]-\cos^2\theta$$

$$=r^2\sin^2\theta\big[\frac{1}{2}e^{A}(G''(x_0)+G'^2(x_0))-(\frac{1}{2}F''(r)+\frac{F'(r)}{r})\big]-\cos^2\theta$$

第三項では

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{3}{4} G'^2(x_0)$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ 1 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 1 \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^A G'^2(x_0) + \frac{1}{4} F'^2(r) + 2(\frac{1}{2} F'(r) + \frac{1}{r})^2 \\
&= \frac{1}{2} e^A G'^2(x_0) + \frac{3}{4} F'^2(r) + 2\frac{F'(r)}{r} + \frac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ 2 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\ 2 \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^A r^2 G'^2(x_0) - 2r^2(\frac{1}{2} F'(r) + \frac{1}{r})^2 + \cot^2\theta \\
&= \frac{1}{2} e^A r^2 G'^2(x_0) - 2r^2\big(\frac{1}{4} F'^2(r) + \frac{1}{r^2} + \frac{F'(r)}{r}\big) + \cot^2\theta \\
&= r^2\big[\frac{1}{2} e^A G'^2(x_0) - \frac{1}{2} F'^2(r) - \frac{2F'(r)}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{\cot^2\theta}{r^2}\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \tau\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ 3 \end{matrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2\ 3 \end{matrix} \right\} \\
&\quad + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^A r^2 G'^2(x_0) \sin^2\theta - 2r^2(\frac{1}{2} F'(r) + \frac{1}{r})^2 \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cot\theta \\
&= r^2\sin^2\theta\big[\frac{1}{2} e^A G'^2(x_0) - 2(\frac{1}{4} F'^2(r) + \frac{1}{r^2} + \frac{F'(r)}{r}) - 2\frac{1}{r^2}\cot^2\theta\big] \\
&= r^2\sin^2\theta\big[\frac{1}{2} e^A G'^2(x_0) - \frac{1}{2} F'^2(r) - \frac{2F'(r)}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2}\cot^2\theta\big]
\end{aligned}$$

これらをリッチテンソルに入れると、$\mu = \nu$ のときが $R_{\mu\nu} = 0$ になっていなく

$$
\begin{aligned}
&R_{00} = -\big(\frac{3}{2}G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0)\big) \\
&R_{11} = e^A\big(\frac{1}{2}G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0)\big) - F''(r) - \frac{1}{r}F'(r) \\
&R_{22} = -r^2\big[-e^A(\frac{1}{2}G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0)) + \frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{3}{2}\frac{1}{r}F'(r)\big] \\
&R_{33} = -r^2\sin^2\theta\big[-e^A(\frac{1}{2}G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0)) + \frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{3}{2}\frac{1}{r}F'(r)\big]
\end{aligned}
$$

となっています。

今は真空でないので、リッチスカラーも必要になります。なので、$R^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu}$ を求めます。計量は

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{e^{-A}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{e^{-G}}{r^2\sin\theta} \end{pmatrix}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&R^0{}_0 = g^{0\alpha}R_{\alpha 0} = -\frac{3}{2}G''(x_0) - \frac{3}{4}G'^2(x_0) \\
&R^1{}_1 = g^{1\alpha}R_{\alpha 1} = -\frac{1}{2}G''(x_0) - \frac{3}{4}G'^2(x_0) + e^{-A}\big(F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)\big) \\
&R^2{}_2 = g^{2\alpha}R_{\alpha 2} = -\frac{1}{2}G''(x_0) - \frac{3}{4}G'^2(x_0) + e^{-A}\big(\frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{3}{2}\frac{1}{r}F'(r)\big) \\
&R^3{}_3 = R^2{}_2
\end{aligned}
$$

よって、リッチスカラーは

$$
\begin{aligned}
R &= R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3 \\
&= -3(G''(x_0) + G'^2(x_0)) + 2e^{-A}(F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{2}{r}F'(r))
\end{aligned}
$$

これらをアインシュタイン方程式

$$
R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R - \Lambda g^\mu{}_\nu = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^\mu{}_\nu
$$

にいれると $(g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu)$

$$\frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}\big(F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{2}{r}F'(r)\big) - \Lambda = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^0_{\ 0}$$
$$G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}\big(\frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{1}{r}F'(r)\big) - \Lambda = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^1_{\ 1}$$
$$G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}\big(\frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{2r}F'(r)\big) - \Lambda = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^2_{\ 2}$$
$$G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}\big(\frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{2r}F'(r)\big) - \Lambda = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^3_{\ 3}$$

となり、$\mu \neq \nu$ では $0 = 8\pi\kappa T^{\mu}_{\ \nu}/c^2$ です。このように、アインシュタイン方程式の左辺が対角成分しかないので、エネルギー・運動量テンソルも対角成分しかないことになります。

一様で等方的という条件からエネルギー・運動量テンソルに制限がかかります。一様で等方なために、エネルギー・運動量テンソルの 3 次元部分 $T^i_{\ j}$ は並進と回転の変換に対して不変になる必要があります。言い換えると、直交変換 (内積を不変にする変換) に対して不変ということです。

このことと、単位行列にスカラーがかかっている行列は直交変換に対して不変なことから、$T^i_{\ j}$ を

$$T^i_{\ j} = C(x_0, r)\delta^i_j = C(x_0, r)g^i_{\ j}$$

という形に制限できます (C はスカラー)。

$T^1_{\ 1} = T^2_{\ 2} = T^3_{\ 3}$ から

$$\frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{1}{r}F'(r) = \frac{1}{2}F''(r) + \frac{1}{2r}F'(r)$$
$$F''(r) - \frac{1}{2}F'^2(r) - \frac{1}{r}F'(r) = 0 \tag{1}$$

これの解を見つけるために、とりあえず方程式の形から

$$F(r) = \log[ar^2 + b]$$

こんな形を仮定します (a, b は任意定数)。そうすると、(1) は

$$\frac{2a}{ar^2 + b} - \frac{4a^2r^2}{(ar^2 + b)^2} - \frac{1}{2}\frac{4a^2r^2}{(ar^2 + b)^2} - \frac{1}{r}\frac{2ar}{ar^2 + b}$$

これでは第二項と第三項が消えないので、これを踏まえて修正します。修正は

$$F(r) = -2\log[ar^2 + b]$$

とするだけでよくて、(1) は

$$-\frac{4a}{ar^2 + b} + \frac{8a^2r^2}{(ar^2 + b)^2} - \frac{1}{2}\frac{16a^2r^2}{(ar^2 + b)^2} + \frac{1}{r}\frac{4ar}{ar^2 + b} = 0$$

となって、0 になります。というわけで、解は

$$F(r) = -\log[ar^2 + b]^2$$

見やすくするために、a を $-a/4$、b を $1/b$ に置きなおして

$$F(r) = -\log[1/b - ar^2/4]^2 = -\log[1 - abr^2/4]^2 + \log b^2$$
$$e^{F(r)} = \frac{b^2}{(1 - abr^2/4)^2}$$

これを計量に入れれば

$$ds^2 = dx_0^2 - e^{G(x_0)}\frac{b^2}{(1 - abr^2/4)^2}d\sigma^2$$

b^2 を $G(x_0)$ の中に入れてしまって

$$ds^2 = dx_0^2 - e^{G(x_0)}\frac{1}{(1 - abr^2/4)^2}d\sigma^2$$

これは ab の符号による区別ができるので、$|ab| = 1/r_0^2, k = 0, \pm 1$ として

$$ds^2 = dx_0^2 - e^{G(x_0)}\frac{1}{(1 + kr^2/4r_0^2)^2}d\sigma^2$$

これが、3 次元空間が一様、等方であるとしたときの解で、ロバートソン・ウォーカー (Robertson-Walker) 解と呼びます。フリードマン (Friedmann) を入れる場合もあります。

この計量が宇宙を記述する基本的なものと考えられています。なぜなら、最初に仮定した空間が一様で等方というのは、宇宙を大きく見れば一様で等方であるという見方に対応するからです。これは宇宙には特別な場所は存在しないという発想 (宇宙原理) を元にしています。この非常に単純な発想で宇宙を記述するのがロバートソン・ウォーカー計量で、この発想で十分である限り宇宙論の中心的なものとして扱われます。

この発想がどうこう言う以前に、このように仮定しないとアインシュタイン方程式が厳密に解けない (解けるのもある) という根本的な問題があります。なので、この仮定を信じない人は非常に面倒な目にあいます。

計量をもう少し見やすくするために、$u = r/r_0$ として変換すると

$$\begin{aligned}
e^{G(t)}\frac{1}{(1 + kr^2/4r_0^2)^2}d\sigma^2 &= e^{G(x_0)}\frac{1}{(1 + kr^2/4r_0^2)^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= r_0^2 e^{G(x_0)}\frac{1}{(1 + ku^2/4)^2}(du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2\sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= a^2(t)\frac{1}{(1 + ku^2/4)^2}(du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2\sin^2\theta d\varphi^2)
\end{aligned}$$

$a^2(t) = r_0^2 e^{G(x_0)}$ は $t = x_0/c$ に依存するとしています。よって

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\frac{1}{(1 + ku^2/4)^2}(du^2 + u^2 d\theta^2 + u^2\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2}$$

$a(t)$ は宇宙の半径とも呼ばれます (理由は後で出てきます)。また、$dt=0$(時間一定) では、$a(t)$ は線素の大きさを膨張、収縮させる因子でもあるので空間 (宇宙) のスケール因子にもなっています。

ロバートソン・ウォーカー計量による空間の性質を調べます。そのために、k によって空間がどうなっているのかを見る必要があるので最初に戻ります。重要なのは 3 次元空間なので、時間成分は無視していきます。

まず、等方的なので、ユークリッド空間での 3 次元球を考え、その球面上での線素 (2 次元の線素) を求めてみます。これは曲がった 2 次元面を考えることに対応します (3 次元空間に埋め込まれた 2 次元空間と言われたりします)。3 次元球に対する方程式は、x_1, x_2, x_3 の座標において半径を R とすれば

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$$

このときの線素 ds^2 は、3 次元ユークリッド空間なので

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

2 次元の表現を与えたいので、dx_3 を消します。(x_1,x_2,x_3) の点から微小に動かした点 $(x_1+dx_1,x_2+dx_2,x_3+dx_3)$ も半径 R の球面上にあるとすれば、$dx_{1,2,3}^2$ を無視することで

$$\begin{aligned}R^2&=(x_1+dx_1)^2+(x_2+dx_2)^2+(x_3+dx_3)^2\\&\simeq x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1dx_1+2x_2dx_2+2x_3dx_3\\&=R^2+2x_1dx_1+2x_2dx_2+2x_3dx_3\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3=0\\x_3dx_3=-x_1dx_1-x_2dx_2\end{aligned}$$

これを ds^2 に入れて

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2)^2}{x_3^2}=dx_1^2+dx_2^2+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2)^2}{R^2-(x_1^2+x_2^2)}$$

これを極座標

$$x_1=R\sin\theta\cos\varphi\ ,\ x_2=R\sin\theta\sin\varphi$$

に移します。これは

$$dx_1 = R\cos\theta\cos\varphi d\theta - R\sin\theta\sin\varphi d\varphi \ , \ dx_2 = R\cos\theta\sin\varphi d\theta + R\sin\theta\cos\varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned} dx_1^2 + dx_2^2 &= R^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + \cos^2\theta\sin^2\varphi d\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2 + \sin^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2) \\ &= R^2(\cos^2\theta d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 = R^2(\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta - \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi) + R^2(\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi d\theta + \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi)$$

$$= R^2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

によって

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(\cos^2\theta d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \frac{R^4\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta^2}{R^2 - R^2\sin^2\theta} \\ &= R^2(\cos^2\theta d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + R^2\sin^2\theta d\theta^2 \\ &= R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

さらに x_1x_2 平面での半径 $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = R\sin\theta,\ dr = R\cos\theta d\theta$ を使うと

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{1}{(1 - r^2/R^2)}dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

となります。$1/R$ が曲率です。dr の項がロバートソン・ウォーカー計量と同じようになっています。これは 2 次元での線素 (3 次元球面の線素) なので、4 次元球を考えて 3 次元にします。

やることは同じで

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$$

これを同じように変形していきます (ユークリッド空間なので空間座標が 4 次元)。次元が 1 つ増えただけなので、線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{x_4^2} \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \qquad (x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 + x_4dx_4 = 0) \end{aligned}$$

これを極座標

$$x_1 = R\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi\ ,\ x_2 = R\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi\ ,\ x_3 = R\sin\Phi\cos\theta$$

$$dx_1 = R\cos\Phi\sin\theta\cos\varphi d\Phi + R\sin\Phi\cos\theta\cos\varphi d\theta - R\sin\Phi\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$

$$dx_2 = R\cos\Phi\sin\theta\sin\varphi d\Phi + R\sin\Phi\cos\theta\sin\varphi d\theta + R\sin\Phi\sin\theta\cos\varphi d\varphi$$

$$dx_3 = R\cos\Phi\cos\theta d\Phi - R\sin\Phi\sin\theta d\theta$$

$$(x_4 = R\cos\Phi\ ,\ dx_4 = -R\sin\Phi d\Phi)$$

に移します (4 次元の極座標は、まず x_4 を 4 次元での z 軸みたいなものと思い $x_4 = R\cos\Phi$ とし、$R\sin\Phi$ で 3 次元座標での動径に持っていき、3 次元の極座標と同じことをすればいいです)。

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2(\sin^2\Phi\sin^2\theta + \sin^2\Phi\cos^2\theta) = R^2\sin^2\Phi$$

$$\begin{aligned}dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = R^2(&\cos^2\Phi\sin^2\theta d\Phi^2 + \cos^2\Phi\cos^2\theta d\Phi^2 + \sin^2\Phi\cos^2\theta d\theta^2 + \sin^2\Phi\sin^2\theta d\theta^2 + \sin^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2\\
&+ 2\sin\Phi\cos\Phi\sin\theta\cos\theta d\Phi d\theta - 2\sin\Phi\cos\Phi\sin\theta\cos\theta d\Phi d\theta)\\
= R^2(&\cos^2\Phi d\Phi^2 + \sin^2\Phi d\theta^2 + \sin^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = R^2(&\sin\Phi\cos\Phi\sin^2\theta\cos^2\varphi d\Phi + \sin^2\Phi\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta - \sin^2\Phi\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\\
&+ \sin\Phi\cos\Phi\sin^2\theta\sin^2\varphi d\Phi + \sin^2\Phi\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi d\theta + \sin^2\Phi\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\\
&+ \sin\Phi\cos\Phi\cos^2\theta d\Phi - \sin^2\Phi\sin\theta\cos\theta d\theta)\\
= R^2&\sin\Phi\cos\Phi d\Phi\end{aligned}$$

これらを使って

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{R^4\sin^2\Phi\cos^2\Phi d\Phi^2}{R^2 - R^2\sin^2\Phi}\\
&= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{R^2\sin^2\Phi\cos^2\Phi d\Phi^2}{\cos^2\Phi}\\
&= R^2(\cos^2\Phi d\Phi^2 + \sin^2\Phi d\theta^2 + \sin^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2) + R^2\sin^2\Phi d\Phi^2\\
&= R^2(d\Phi^2 + \sin^2\Phi d\theta^2 + \sin^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2)\end{aligned}$$

そして、$r = R\sin\Phi,\ dr = R\cos\Phi d\Phi$ とすることで

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\Phi}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \frac{1}{1 - r^2/R^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

となって、ロバートソン・ウォーカー計量の空間成分の形と同じになります。

ここまでは等方的な空間として 3 次元球を 4 次元に埋め込んだ場合を考えましたが、もう 1 つ等方的な場合があります。それは双曲面と呼ばれるもので、3 次元では

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2$$

と与えられます。このときの線素としては

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

として 3 次元ミンコフスキー空間の構造を持たせます。今度は 3 次元は飛ばして、4 次元双曲面での曲面上を始めから考えます。なので

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -R^2$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

符号が変わってるだけなので

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 - x_4dx_4 = 0$$

とすぐに分かります。線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{x_4^2} \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

双曲面に対する座標変換としては

$$x_1 = R\sinh\Phi\sin\theta\cos\varphi\ ,\ x_2 = R\sinh\Phi\sin\theta\sin\varphi\ ,\ x_3 = R\sinh\Phi\cos\theta\ ,\ x_4 = R\cosh\Phi$$

$$(x_4 = R\cosh\Phi\ ,\ dx_4 = R\sinh\Phi d\Phi)$$

これは極座標での Φ の三角関数を双曲線関数に書き換えたものです。ちなみに、3 次元なら

$$x_1 = R\sinh\theta\cos\varphi\ ,\ x_2 = R\sinh\theta\sin\varphi\ ,\ x_3 = R\cosh\theta$$

とします。球面の場合と同様に計算するので $(dx_4 = R\sinh\Phi d\Phi)$

$$dx_1 = R\cosh\Phi\sin\theta\cos\varphi d\Phi + R\sinh\Phi\cos\theta\cos\varphi d\theta - R\sinh\Phi\sin\theta\sin\varphi d\varphi$$

$$dx_2 = R\cosh\Phi\sin\theta\sin\varphi d\Phi + R\sinh\Phi\cos\theta\sin\varphi d\theta + R\sinh\Phi\sin\theta\cos\varphi d\varphi$$

$$dx_3 = R\cosh\Phi\cos\theta d\Phi - R\sinh\Phi\sin\theta d\theta$$

これらから必要なものを計算します。これらを見ると、Φ が双曲線関数になっているだけで、符号も一緒なので

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\sinh^2\Phi$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = R^2(\cosh^2\Phi d\Phi^2 + \sinh^2\Phi d\theta^2 + \sinh^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = R^2\sinh\Phi\cosh\Phi d\Phi$$

よって、線素は

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{(x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3)^2}{R^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\
&= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{R^4\sinh^2\Phi\cosh^2\Phi d\Phi^2}{R^2 + R^2\sinh^2\Phi} \\
&= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \frac{R^2\sinh^2\Phi\cosh^2\Phi d\Phi^2}{\cosh^2\Phi} \\
&= R^2(\cosh^2\Phi d\Phi^2 + \sinh^2\Phi d\theta^2 + \sinh^2\Phi\sin^2\theta d\varphi^2) - R^2\sinh^2\Phi d\Phi^2 \\
&= R^2 d\Phi^2 + R^2\sinh^2\Phi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)
\end{aligned}$$

そして、$r = R\sinh\Phi,\ dr = R\cosh\Phi d\Phi$ として

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{\cosh^2\Phi}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= \frac{1}{1 + \sinh^2\Phi}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= \frac{1}{1 + r^2/R^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)
\end{aligned}$$

となります。

よって、球と双曲面の両方を統一して書くなら

$$ds^2 = \frac{1}{1 - Kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$K = 1/R^2$ に対して、$K > 0$ では球面、$K < 0$ で双曲面となるようにします。$K > 0$ では正の曲率、$K < 0$ では負の曲率と呼ばれます。$K = 0$ では平坦なユークリッド空間です。また、$K > 0$ では R は実数、$K = 0$ では R が無限大、$K < 0$ では R は虚数になっています。

K による 3 次元空間がどうなっているのか簡単に見るために、動径方向の長さを計算してみます。それは $d\theta = 0, d\varphi = 0$ とした線素を 0 から r' まで積分すればいいので

$$L = \int_0^{r'} ds = \int_0^{r'} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

- $K = 0$

$$L = r'$$

- $K = +1$

$$L = \int_0^{r'} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \sin^{-1} r'$$

- $K = -1$

$$L = \int_0^{r'} \frac{dr}{\sqrt{1 + r^2}} = \sinh^{-1} r'$$

対応する円周の長さは、線素を r を r' に固定して $dr = 0, d\theta = 0$ で積分すればいいので

$$l = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} r' d\theta = 2\pi r'$$

$K = 0$ ではそのまま $l = 2\pi L$ なので、平坦な空間での円周そのものです。$K = +1$ では $r' = \sin L$ なので、$l = 2\pi \sin L$ となります。逆関数 $\sin^{-1}$ の取れる範囲は $0 \sim \pi$ の間とすることができるために (r' が正の値なので)、$0 \leq L \leq \pi$ より、円周 l は 0 から始まり最大値 2π になって 0 に戻ってきます。$K = -1$ では $l = 2\pi \sinh L$ となっています。逆双曲線関数 $\sinh^{-1}$ の範囲は無限大にとれるために、L も無限大にまで持っていけてしまえるので、$\sinh L$ は $L = 0$ をから出発した後にどこかに収束するということをしません。

このような特徴から、$K > 0$ を閉じた空間、$K < 0$ を開いた空間と言い、これを宇宙に当てはめたとき、閉じた宇宙モデル、開いた宇宙モデルと言います。

というわけで、共動座標として時間成分を加えてやれば一様、等方な 4 次元計量の形はアインシュタイン方程式を解かなくても、時間依存するスカラー量 $a'^2(t)$ を 3 次元成分にくっつけることで

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a'^2(t)(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))$$

という形になることが分かります。よって、一様、等方な 3 次元空間という制限を入れれば、アインシュタイン方程式を解かなくても時間依存する係数 $a'(t)$ を除いた空間成分の計量が、このような解析から分かってしまいます。そして、空間成分の構成から、ロバートソン・ウォーカー計量が宇宙を記述するなら、宇宙は閉じているか、開いているか、平坦なのかが考えられます。

K の符号をロバートソン・ウォーカー計量 (2) での k と対応させます。3 次元の線素を

$$ds^2 = \frac{1}{1 - r^2/R^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

として3次元球面の場合を考えます。これをロバートソン・ウォーカー計量 (2) の空間成分の形に持っていきます。そのために

$$r=\frac{uR}{1+u^2/4}\ ,\ dr=R(\frac{1}{1+u^2/4}-\frac{u^2/2}{(1+u^2/4)^2})du=R\frac{1-u^2/4}{(1+u^2/4)^2}du$$

という変換を行います。そうすると dr^2 項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-r^2/R^2}dr^2&=R^2\frac{1}{1-u^2/(1+u^2/4)^2}\frac{(1-u^2/4)^2}{(1+u^2/4)^4}du^2\\&=R^2\frac{1}{(1+u^2/4)^2}\frac{(1-u^2/4)^2}{(1+u^2/4)^2-u^2}du^2\\&=R^2\frac{1}{(1+u^2/4)^2}\frac{(1-u^2/4)^2}{(1-u^2/4)^2}du^2\\&=\frac{R^2}{(1+u^2/4)^2}du^2\end{aligned}$$

となるので、$k=1$ としたものになります。残っている項は

$$r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)=\frac{u^2R^2}{(1+u^2/4)^2}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

となるだけです。双曲面とすれば

$$r=\frac{uR}{1-u^2/4}\ ,\ dr=R(\frac{1}{1-u^2/4}+\frac{u^2/2}{(1-u^2/4)^2})du=R\frac{1+u^2/4}{(1-u^2/4)^2}du$$

を使って

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+r^2/R^2}dr^2&=R^2\frac{1}{1+u^2/(1-u^2/4)^2}\frac{(1+u^2/4)^2}{(1-u^2/4)^4}du^2\\&=R^2\frac{1}{(1-u^2/4)^2}\frac{(1+u^2/4)^2}{(1-u^2/4)^2+u^2}du^2\\&=R^2\frac{1}{(1-u^2/4)^2}du^2\end{aligned}$$

となって、$k=-1$ に対応します。統一して行うなら

$$\overline{R}=\sqrt{k}R\ ,\ r=\frac{\sqrt{k}Ru}{1+ku^2/4}$$

とすることで

$$ds^2=\overline{R}^2\frac{1}{(1+ku^2/4)^2}(du^2+u^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2))\tag{3}$$

$\overline{R}$ は有限の実数でなければいけないので、$k=1$ で R は実数、$k=-1$ で R は虚数、$k=0$ では $\overline{R}$ が有限であるためには R が無限大になっている必要があります。というわけで、(2) の空間成分

$$a^2(t)\frac{1}{(1+ku^2/4)^2}(du^2+u^2d\theta^2+u^2\sin^2\theta d\varphi^2)$$

と空間構造から作った 3 次元計量 (3) の比較から、$k=+1$ で 3 次元球面、$k=-1$ で 3 次元双曲面、$k=0$ で平坦なユークリッド空間と分かり、それぞれが閉じた宇宙、開いた宇宙、平坦な宇宙に対応します。さらに、3 次元球面においては

$$\overline{R}^2=a^2(t)$$

とみなすことができ、$k=1$ では $\overline{R}$ は 4 次元球の半径 ($1/R^2$ は曲率) であることを考えると、ロバートソン・ウォーカー計量 (2) にいる $a(t)$ を宇宙の半径と呼べる理由がわかると思います。ただし、4 次元ユークリッド空間は現実には存在していない点に注意してください。4 次元ユークリッド空間はロバートソン・ウォーカー計量の構造を調べるために仮想的に導入した空間です。

最後に $a(t)$ に対する方程式を導きます。エネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ は完全流体を使い、共動座標での 4 元速度 $(1,0,0,0)$ と、今は対角成分しかないことから

$$T^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & -p/c^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -p/c^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -p/c^2\end{pmatrix}$$

とします (ρ は密度、p は圧力)。そして、$T^1{}_1=T^2{}_2=T^3{}_3$ なので、アインシュタイン方程式は

$$\frac{3}{4}G'^2(x_0)-e^{-A}(F''(r)+\frac{1}{4}F'^2(r)+\frac{2}{r}F'(r))-\Lambda=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \tag{4}$$

$$G''(x_0)+\frac{3}{4}G'^2(x_0)-e^{-A}(\frac{1}{4}F'^2(r)+\frac{1}{r}F'(r))-\Lambda=-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{p}{c^2} \tag{5}$$

これらだけになります。(2) での

$$a^2(t)=r_0^2e^{G(x_0)}\ ,\ e^{F(r)}=\frac{1}{(1+kr^2/4r_0^2)^2}$$

$$e^{A(x_0,r)}=e^{G(x_0)+F(r)}=\frac{a^2(t)}{r_0^2(1+kr^2/4r_0^2)^2}$$

を入れます。$G(x_0)$ の微分と $F(r)$ の微分は

$$G'(x_0)=\frac{2}{c}\frac{a'(t)}{a(t)}\ ,\ G''(x_0)=\frac{2}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)}-\frac{2}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)}$$

$$F'(r)=-\frac{kr/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2}\ ,\ F''(r)=-\frac{k/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2}+\frac{k^2r^2/2r_0^4}{(1+kr^2/4r_0^2)^2}$$

$G'(x_0)$ は x_0 での微分、$a'(t)$ は t $(x_0 = ct)$ の微分を表していることに注意してください。
(4) では

$$
\begin{aligned}
& e^{-A}(F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{2}{r}F'(r)) \\
&= e^{-A}\Big(- \frac{k/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2} + \frac{k^2r^2/2r_0^4}{(1+kr^2/4r_0^2)^2} + \frac{1}{4}\frac{k^2r^2/r_0^2}{(1+kr^2/4r_0^2)^2} - \frac{2k/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2}\Big) \\
&= e^{-A}\Big(- \frac{3k/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2} + \frac{3k^2r^2/4r_0^4}{(1+kr^2/4r_0^2)^2}\Big) \\
&= \frac{r_0^2}{a^2(t)}\Big(\frac{3k^2r^2}{4r_0^4} - \frac{3k}{r_0^2}(1+\frac{kr^2}{4r_0^2})\Big) \\
&= \frac{-3k}{a^2(t)}
\end{aligned}
$$

なので (4) は

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}(F''(r) + \frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{2}{r}F'(r)) - \Lambda &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \\
\frac{3}{4}\frac{4}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)} + \frac{3k}{a^2(t)} - \Lambda &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \\
\frac{3}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)} + \frac{3k}{a^2(t)} - \Lambda &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho
\end{aligned}
$$

(5) では

$$
\begin{aligned}
e^{-A}(\frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{1}{r}F'(r)) &= e^{-A}\Big(\frac{k^2r^2/4r_0^4}{(1+kr^2/4r_0^2)^2} - \frac{k/r_0^2}{1+kr^2/4r_0^2}\Big) \\
&= \frac{r_0^2}{a^2(t)}(k^2r^2/4r_0^4 - (1+kr^2/4r_0^2)k/r_0^2) \\
&= \frac{-k}{a^2(t)}
\end{aligned}
$$

なので

$$
G''(x_0) + \frac{3}{4}G'^2(x_0) - e^{-A}(\frac{1}{4}F'^2(r) + \frac{1}{r}F'(r)) = \frac{2}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)} + \frac{1}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)}
$$

となって

$$
\frac{2}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)} + \frac{1}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)} - \Lambda = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{p}{c^2}
$$

この $a(t)$ に対する 2 つの方程式

$$\frac{3}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)}+\frac{3k}{a^2(t)}-\Lambda=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \tag{6}$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)}+\frac{1}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)}+\frac{k}{a^2(t)}-\Lambda=-\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{p}{c^2} \tag{7}$$

での (6) をフリードマン (Friedmann) 方程式と呼びます。この 2 つは 1 つにまとめることができます。(7) を 3 倍して (6) を引けば

$$\frac{3}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)}=-\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\frac{3p}{c^2}+\rho)+\Lambda \tag{8}$$

もしくは Λ を消すようにすれば

$$\frac{1}{c^2}\frac{a''(t)}{a(t)}-\frac{1}{c^2}\frac{a'^2(t)}{a^2(t)}-\frac{k}{a^2(t)}=-\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2}+\rho)$$

と書けます。(8) で、$\Lambda=0, p\geq 0$ としたとき (ρ は物質密度と考えれば正)、$a''(t)<0$ になります。$p\geq 0$ は普通の物質の振るまいなので、宇宙定数 Λ が 0 のとき、$a''(t)<0$ より宇宙は、時間の経過によって膨張するか収縮するかしていることになります ($a(t)$ は大きさのスケール因子だから)。

膨張しているか収縮しているかは $a'(t)$ が正なのか負なのかによります。よって、ロバートソン・ウォーカー計量によって宇宙が記述されているなら (宇宙が一様で等方的とみなせるなら)、膨張か収縮していることになります。そして、観測は宇宙が加速膨張していることを示しています (2011 年のノーベル賞)。$\Lambda=0$ のロバートソン・ウォーカー計量では $a''(t)<0$ より、膨張しているときは減速します。なので、$\Lambda\neq 0$ とするかダークエネルギーを入れるかクインテセンスを入れます (宇宙定数とクインテセンスをダークエネルギーとみなすこともできます)。