リッチテンソル

リーマンテンソルの縮約によって作られるリッチテンソルを作ります。ついでに、アインシュタインテンソル、ワイルテンソルも定義します。

リーマンテンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\rho}$ の縮約を取りますが、リーマンテンソルの対称性のために単純な話です。α と β、γ と ρ については反対称になっているので、ここの部分の縮約は 0 になり、α と ρ、α と γ、β と ρ のようなものは

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma}\ ,\ R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\beta} = R^{\beta}{}_{\alpha\beta\gamma}$$

となるので、単に符号が違うだけになります。なので、意味のあるものは

$$R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\rho} = R_{\beta\rho}$$

とした 1 番目と 3 番目による縮約だけです。この縮約したのをリッチテンソル (Ricci tensor) と呼びます。リッチテンソルは

$$R_{\beta\rho} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\rho} = g^{\alpha\eta}R_{\eta\beta\alpha\rho} = g^{\alpha\eta}R_{\alpha\rho\eta\beta} = R^{\eta}{}_{\rho\eta\beta} = R_{\rho\beta}$$

となるので対称で、独立成分は 10 個です。リッチテンソルをクリストッフェル記号で表せば

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{array} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \nu \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \mu\ \alpha \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}$$

となります。

リッチテンソルに対してさらに縮約を取った

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu\beta}$$

R をリッチスカラーやスカラー曲率と呼び、その名前のとおりスカラーです。ちなみに、縮約を取ることを行列と同じようにトレースを取ると言ったりもします。

リッチテンソルとリッチスカラーによって定義される

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1}$$

のことをアインシュタインテンソル (Einstein tensor) と呼びます。リッチテンソルと計量で書かれていることから、アインシュタインテンソルは対称です。

ビアンキの恒等式

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma||\rho}\}_{(\beta,\gamma,\rho)} = R_{\alpha\eta\beta\gamma||\rho} + R_{\alpha\eta\rho\beta||\gamma} + R_{\alpha\eta\gamma\rho||\beta} = 0$$

を縮約を取るように変形させると、計量は共変微分に引っかからないことから

$$
\begin{aligned}
g^{\eta\gamma}g^{\alpha\beta}(R_{\alpha\eta\beta\gamma||\rho}+R_{\alpha\eta\rho\beta||\gamma}+R_{\alpha\eta\gamma\rho||\beta}) &= g^{\eta\gamma}(R_{\eta\gamma||\rho}-R_{\eta\rho||\gamma}+R^{\beta}{}_{\eta\gamma\rho||\beta}) \\
&= R_{||\rho}-R^{\gamma}{}_{\rho||\gamma}-R^{\beta}{}_{\rho||\beta} \quad (g^{\eta\gamma}R_{\eta\gamma||\rho}=(g^{\eta\gamma}R_{\eta\gamma})_{||\rho}=R_{||\rho}) \\
&= R_{||\rho}-R^{\gamma}{}_{\rho||\gamma}-R^{\gamma}{}_{\rho||\gamma} \\
&= R_{||\rho}-2R^{\gamma}{}_{\rho||\gamma} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

よって、ビアンキの恒等式は

$$
(R^{\alpha}_{\ \beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha}_{\ \beta}R)_{||\alpha}=0
$$

となり、積分して微分を外せば

$$
R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=C
$$

これはアインシュタイン方程式の形になります (C は定数)。

また、これはアインシュタインテンソルの発散が 0 になることも言っています。(2) からリッチスカラーの発散は

$$
\frac{1}{2}R_{||\rho}=\frac{1}{2}g^{\eta}{}_{\rho}R_{||\eta}=R^{\eta}{}_{\rho||\eta}
$$

となり、添え字の位置をそろえれば

$$
\frac{1}{2}g^{\eta\rho}R_{||\eta}=R^{\eta}_{||\eta}
$$

これをアインシュタインテンソルの発散に使えば

$$
G^{\mu\nu}_{||\alpha}=R^{\mu\nu}_{||\alpha}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{||\alpha}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{||\alpha}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{||\alpha}=0
$$

となるので、発散を取ると 0 になっています。

アインシュタインテンソルの縮約を取ると

$$
G=G^{\mu}{}_{\mu}=R^{\mu}{}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\mu}R=R-2R=-R
$$

この結果からも分かるように、(1) をみると、

$$
R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}R
$$

とすれば、縮約を取った時に 0 になることが分かります ($g^{\mu}{}_{\mu}=4$)。なので、トレースを取ると 0 になるテンソルとして

$$S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R\ ,\ S^{\alpha}_{\ \ \alpha} = 0$$

というのが作れます。

次に

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho})$$
$$+ \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R$$

このようなテンソルを定義します。これをワイルテンソル (Weyl tensor) と呼びます。ワイルテンソルはリーマンテンソルと同じ対称性を持つように作られています。なので、添え字の置換に対して

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = -C_{\nu\mu\rho\lambda}\ ,\ C_{\mu\nu\rho\lambda} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}\ ,\ C_{\mu\nu\rho\lambda} = C_{\rho\lambda\mu\nu}$$

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} + C_{\mu\rho\lambda\nu} + C_{\mu\lambda\nu\rho} = 0$$

という関係を持っています。このワイルテンソルはトレースが 0 のテンソル $S_{\mu\nu}$ を使って

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{2}[g_{\mu\rho}(S_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\lambda}R) - g_{\nu\rho}(S_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\lambda}R) + g_{\nu\lambda}(S_{\mu\rho} + \frac{1}{4}g_{\mu\rho}R) - g_{\mu\lambda}(S_{\nu\rho} + \frac{1}{4}g_{\nu\rho}R)] \\
&+ \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \\
= R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho}) \\
&- \frac{1}{2}(\frac{1}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \\
= R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho}) - (\frac{1}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda})R + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \\
= R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho}) - \frac{1}{12}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda})R
\end{aligned}$$

と書くこともできます。

ワイルテンソルの重要な性質はトレースを取ると 0 になることです。実際にやってみれば

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}C_{\alpha\mu\beta\nu} &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}S_{\mu\nu} - g_{\mu\beta}S_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}S_{\alpha\beta} - g_{\alpha\nu}S_{\mu\beta}) - \frac{1}{12}g^{\alpha\beta}(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu})R \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(4S_{\mu\nu} - g_{\mu}{}^{\alpha}S_{\alpha\nu} + g_{\mu\nu}S - g^{\beta}{}_{\nu}S_{\mu\beta}) - \frac{1}{12}(4g_{\mu\nu} - g_{\mu}{}^{\alpha}g_{\alpha\nu})R \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(4S_{\mu\nu} - S_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}) - \frac{1}{12}(4g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu})R \\
&= R_{\mu\nu} - S_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \\
&= S_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R - S_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \\
&= 0
\end{aligned}
$$

このように 0 になります。ワイルテンソルのようにトレースが 0 のものを既約 (irreducible) と言い、これ以上分解できないことを意味します。そして、リーマンテンソルは既約なテンソルによって分解することができます。一般的に、リーマンテンソルはワイルテンソル、トレース 0 のリッチテンソル、リッチスカラーによって分解されます。

最後に、リッチスカラーが定数になる空間を見ておきます。リッチテンソルとリッチスカラーはリーマンテンソル R_{abcd} から

$$
\begin{aligned}
R_{ab} &= g^{cd}R_{dacb} = R^{c}{}_{acb} \\
R &= g^{ab}R_{ab}
\end{aligned}
$$

で与えられています。このとき、リーマンテンソルが

$$
R_{abcd} = \lambda(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad}) \tag{3}
$$

という形になっているとします (λ は定数)。これに g^{ac} をかけてリッチテンソルにしてみると (n 次元とします)

$$
\begin{aligned}
R_{bd} &= \lambda(g^{ac}g_{ac}g_{bd} - g^{ac}g_{bc}g_{ad}) \\
&= \lambda(ng_{bd} - \delta^{a}_{b}g_{ad}) \\
&= \lambda(n-1)g_{bd}
\end{aligned}
$$

さらに g^{bd} をかけてリッチスカラーにすると

$$
R = \lambda n(n-1)
$$

そうすると λ は

$$
\lambda = \frac{R}{n(n-1)}
$$

なので、(3) にこれを入れることで、リーマンテンソルは $n > 2$ のとき

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad})$$

となります。このときの R がどうなっているのか見ます。
　リッチテンソル

$$R_{ab} = \frac{R}{n}g_{ab} \tag{4}$$

から出発します。ここでビアンキの恒等式

$$R_{acbd||e} + R_{aceb||d} + R_{acde||b} = 0$$

を持ってくると

$$\begin{aligned}
0 &= g^{ab}g^{cd}(R_{acbd||e} + R_{aceb||d} + R_{acde||b}) \\
&= R_{||e} - g^{cd}R_{ce||d} - g^{ab}R_{ae||b} \qquad (R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}) \\
&= R_{|b} - R^{a}{}_{b||a} - R^{a}{}_{b||a} \\
&= R_{|b} - 2R^{a}{}_{b||a}
\end{aligned}$$

(4) の共変微分は、計量の共変微分は 0 になることから

$$\begin{aligned}
R_{ab||c} &= \frac{1}{n}R_{||c}g_{ab} + \frac{R}{n}g_{ab||c} \\
&= \frac{1}{n}R_{|c}g_{ab} \\
g^{ac}R_{ab||c} &= \frac{1}{n}g^{ac}R_{|c}g_{ab} \\
R^{a}{}_{b||a} &= \frac{1}{n}R_{|b} \qquad (g^{ac}g_{ab} = \delta^{c}_{b})
\end{aligned}$$

これを入れて

$$R_{|b} - 2R^{a}{}_{b||a} = R_{|b} - 2\frac{1}{n}R_{|b} = (1 - \frac{2}{n})R_{|b}$$

なので

$$(1 - \frac{2}{n})R_{|b} = 0$$

これから

$$\frac{\partial R}{\partial x^b} = 0$$

$$R = const$$

となるので、リッチスカラーは定数です。このように (4) が成立している空間（リッチテンソルが計量に比例している空間）ではリッチスカラーが定数になります ((3 が必要十分条件))。このような空間をアインシュタイン空間と言います。そして、このときリーマンテンソルは

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad}) \quad (n > 2)$$

となります。