

共変微分

偏微分はテンソルではないので、テンソルとして使える微分を作ります。

ついでに、intrinsic derivative とリー微分も作ります。

クリストッフェル記号として Γ と $\{ \}$ の両方を使っていますが、特に意味はないです。書いてて便利そうな方をその時々で使っているだけです。

反変ベクトル $A^i(x^j)$ の偏微分 $\partial A^i / \partial x^k$ は

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^l} + \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^l}$$

という変換則になっているので、明らかにテンソルではないです。なので、テンソルとなる微分を作ります。微分は変化量なので、空間上の移動を見ていきます。

アフィン空間とします。点 x での反変ベクトル $A^i(x^j)$ を用意し、微小に離れた点 $x + dx$ に移動させます。このとき、移動させた結果が点 $x + dx$ での $A^i(x^j + dx^j)$ とどれだけズレるのかを求めます。つまり、点 x でのベクトル $A^i(x^j)$ を点 $x + dx$ へ微小なベクトル dx^j に沿って移動させたベクトル $A'^i(x^j + dx^j)$ と $A^i(x^j + dx^j)$ を比べます。

まず、 $A^i(x^j + dx^j)$ をテーラー展開して

$$A^i(x^j + dx^j) = A^i(x^j) + \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k + O(dx^k)$$

2 次以上は $O(dx^k)$ にまとめています。これとは別に、 $A'^i(x^j + dx^j)$ はベクトルの移動則によって

$$A'^i(x^j + dx^j) = A^i(x^j) - \Gamma_{kl}^i A^l dx^k$$

Γ_{kl}^i の定義はクリストッフェル記号の定義にあわせているので、「アフィン接続係数と平行移動」の最初の方で使っていたアフィン接続 Γ_{kl}^i の符号を反転させています。この二つのベクトルの差をとると

$$\begin{aligned} A^i(x^j + dx^j) - A'^i(x^j + dx^j) &= A^i(x^j) + \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k + O(dx) - A^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i A^l dx^k \\ &= \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l \right) dx^k + O(dx) \end{aligned} \quad (1)$$

左辺はベクトル同士の差なのでベクトル、右辺の dx^k はベクトルなので、 $O(dx)$ の項を無視して

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l$$

とした部分は商定理よりテンソルです。もしくは、 Γ_{kl}^i の変換則を使っても直接確かめられます。このテンソル部分を反変ベクトルの共変微分と呼びます。(1) の $O(dx)$ を無視して変形させると

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l \right) = \frac{A^i(x^j + dx^j) - A'^i(x^j + dx^j)}{dx^k}$$

となっていて、右辺を $dx^k \rightarrow 0$ の極限にとれば、よく見る微分の定義の堅いです。また、 Γ_{kl}^i が消えればただの微分部分だけが残ります。よって、これを微分として与えます。共変微分は移動に伴うベクトルの変化量を表します。表記法として、通常の偏微分では

$$T_{\beta\gamma|k}^\alpha = \frac{\partial T_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^k}$$

のように微分するものの添え字を「|」で区切り、共変微分では

$$A_{||k}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i A^l = A_{|k}^i + \Gamma_{kl}^i A^l$$

として、2個の「|」で区切って「||」とします。ただし、偏微分には「,」を使い、共変微分には「;」を使う表記のほうが一般的ですが、こっちの定義を使ってしまいます。

また

$$A^i(x^j + dx^j) = A^i(x^j + dx^j)$$

となる領域があれば、明らかに共変微分は0なのでベクトルは定ベクトルとなります。ただし

$$A_{||k}^i = A_{|k}^i + \Gamma_{kl}^i A^l = 0$$

が成り立つためにはアフィン接続 Γ が積分できる必要があります。

今の結果をリーマン空間に持っていきます。することは簡単で、ベクトルの移動をリーマン空間の平行移動に変えればいいだけで

$$A_{||k}^i = A_{|k}^i + \Gamma_{kl}^i A^l = A_{|k}^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ k l \end{matrix} \right\} A^l$$

これがリーマン空間での共変微分になります。表記的には何も変わりません。

反変ベクトルを使ってきましたが、共変ベクトルでも同様に共変微分を定義できます。スカラー ϕ を内積から

$$\phi(x^\alpha) = \xi^i(x^\alpha) \eta_i(x^\alpha)$$

と与えます。この偏微分は

$$\phi_{|l} = \xi_{|l}^i \eta_i + \xi^i \eta_{i|l} = v_l$$

「テンソル解析」で見たようにこれは共変ベクトルです。そして、 $\eta_i \xi_{||l}^i = w_l$ との差を取ると

$$\begin{aligned}
s_l &= v_l - w_l \\
&= \xi_{|l}^i \eta_i + \xi^i \eta_{i|l} - \eta_i \xi_{|l}^i \\
&= \xi_{|l}^i \eta_i + \xi^i \eta_{i|l} - \xi_{|l}^i \eta_i - \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ l \end{matrix} \right\} \xi^m \eta_i \\
&= \xi^i \eta_{i|l} - \left\{ \begin{matrix} i \\ m \ l \end{matrix} \right\} \xi^m \eta_i
\end{aligned}$$

第一項のダミーインデックスを m に変えて

$$s_l = \xi^m (\eta_{m|l} - \left\{ \begin{matrix} r \\ m \ l \end{matrix} \right\} \eta_r)$$

商定理より $\eta_{m|l} - \left\{ \begin{matrix} r \\ m \ l \end{matrix} \right\} \eta_r$ はテンソルです。というわけで、これが共変ベクトル η_m の共変微分になります。反変と共変の両方を書くと

$$\begin{aligned}
A^i_{|k} &= A^i_k + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \ l \end{matrix} \right\} A^l = A^i_k + \Gamma^i_{kl} A^l \\
\eta_{i|k} &= \eta_{i|k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i \ k \end{matrix} \right\} \eta_l = \eta_{i|k} - \Gamma^l_{ik} \eta_l
\end{aligned}$$

反変と共変で、添え字の上下と、クリストッフェル記号の項の符号が変わります。反変ベクトルではクリストッフェル記号部分の和をとる添え字は下側に、共変ベクトルでは上側です。

次にテンソルの共変微分を定義します。ベクトルの積 $A^i B^k$ の偏微分は

$$(A^i B^k)_{|l} = A^i_{|l} B^k + A^i B^k_{|l}$$

これは共変微分でも同様で

$$(A^i B^k)_{||l} = A^i_{||l} B^k + A^i B^k_{||l}$$

単純に言えば、クリストッフェル記号が消える座標系では

$$A^i_{|l} = A^i_{||l}$$

となるので、偏微分と同じように作用するからです。そして、共変微分 $(A^i B^k)_{||l} = A^i_{||l} B^k + A^i B^k_{||l}$ の右辺はテンソルなので、任意の座標系でこの関係は成り立ちます。

次にベクトル3つによる $A^i B^k C_m$ を使って

$$(A^i B^k C_m)_{|l} = A^i_{|l} B^k C_m + A^i B^k_{|l} C_m + A^i B^k C_{m|l}$$

ここに共変微分の式を入れて

$$\begin{aligned} (A^i B^k C_m)_{|l} &= A^i_{|l} B^k C_m + \left\{ \begin{matrix} i \\ l r \end{matrix} \right\} A^r B^k C_m + A^i B^k_{|l} C_m + \left\{ \begin{matrix} k \\ l r \end{matrix} \right\} A^i B^r C_m + A^i B^k C_{m|l} - \left\{ \begin{matrix} r \\ l m \end{matrix} \right\} A^i B^k C_r \\ &= (A^i B^k C_m)_{|l} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l r \end{matrix} \right\} A^r B^k C_m + \left\{ \begin{matrix} k \\ l r \end{matrix} \right\} A^i B^r C_m - \left\{ \begin{matrix} r \\ l m \end{matrix} \right\} A^i B^k C_r \end{aligned}$$

テンソルは「テンソル解析」でのテンソルの分解で見たように、ベクトルのテンソル積の和

$$T^i_k = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A^i_{(\alpha)} B^k_{(\beta)} C_m^{(\gamma)}$$

で書けます (α, β, γ はベクトルの区別)。なので、 $A^i B^k C_m$ の結果から、テンソルに対しての共変微分は

$$T^i_j{}_{k|l} = T^i_j{}_{k|l} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l r \end{matrix} \right\} T^{rj}{}_k + \left\{ \begin{matrix} j \\ l r \end{matrix} \right\} T^{ir}{}_k - \left\{ \begin{matrix} r \\ l k \end{matrix} \right\} T^i_j{}_r$$

となります。第二項以降の符号は反変部分がプラス、共変部分がマイナスになります。添え字が2つあるときには、反変成分を見て分かるように、 i, j に対して交換するようにして項を増やしています。つまり、テンソルの添え字が増えたら、増えた分だけ交換するようにして項を増やしていけばいいだけで

$$\begin{aligned} T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n | k} &= T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n | k} + \left\{ \begin{matrix} i_1 \\ k l \end{matrix} \right\} T^{l i_1 \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n} + \left\{ \begin{matrix} i_2 \\ k l \end{matrix} \right\} T^{i_1 l \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n} + \dots \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} l \\ k a_1 \end{matrix} \right\} T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{l a_2 \dots a_n} - \left\{ \begin{matrix} l \\ k a_2 \end{matrix} \right\} T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{a_1 l \dots a_n} - \dots \\ &= T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n | k} + \sum_{s=1}^m \left\{ \begin{matrix} i_s \\ k l \end{matrix} \right\} T^{i_1 \dots i_{s-1} l i_{s+1} \dots i_m}_{a_1 a_2 \dots a_n} - \sum_{s=1}^n \left\{ \begin{matrix} l \\ k a_s \end{matrix} \right\} T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{a_1 \dots a_{s-1} l a_{s+1} \dots a_n} \end{aligned}$$

と書けます。

共変微分の性質をいくつか示していきます。まず、計量テンソル g_{ik} の共変微分はどうなるのかを求めます。第一種クリストッフェル記号

$$[il, r] = \frac{1}{2}(g_{ir|l} + g_{lr|i} - g_{il|r})$$

を書き換えると

$$\begin{aligned}
[i l, r] &= g_{ir|l} - \frac{1}{2}(g_{ri|l} + g_{li|r} - g_{rl|i}) \\
&= g_{ir|l} - [r l, i] \\
&= g_{ir|l} - g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\}
\end{aligned}$$

第一種と第二種の関係は

$$[r l, i] = g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\}$$

なので、 $g_{ir|l}$ は

$$g_{ir|l} = [i l, r] + g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

となり

$$\begin{aligned}
g_{ir||l} &= [i l, r] + g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} - g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} - g_{rk} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} \\
&= [i l, r] - g_{rk} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} \\
&= g_{rk} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} - g_{rk} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって、計量テンソルの共変微分は0です。このことから

$$\xi_{i||l} = (g_{ik}\xi^k)_{||l} = g_{ik||l}\xi^k + g_{ik}\xi^k_{||l} = g_{ik}\xi^k_{||l}$$

という関係がわかり、添え字の上げ下げに使われる計量テンソルは共変微分に引っかかりません。他にも、クロネッカーデルタとレヴィ・チビタテンソルの共変微分も0です。実際に、クロネッカーデルタでは

$$\delta_{j||a}^i = \delta_{j|a}^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ a k \end{matrix} \right\} \delta_j^k - \left\{ \begin{matrix} k \\ a j \end{matrix} \right\} \delta_k^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ a j \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ a j \end{matrix} \right\} = 0$$

となり、0です。クロネッカーデルタは定数なので、通常の微分でも0です。レヴィ・チビタテンソルの場合は後で導く関係を使うので、最後に回します。

スカラー量 ϕ に対する共変微分は当然

$$\phi_{||k} = \phi_{|k}$$

として、ただの偏微分と同じです。そして、ベクトルの内積の共変微分を取ってみると

$$\begin{aligned} (A^i B_i)_{||k} &= A^i_{||k} B_i + A^i B_{i||k} = (A^i_{|k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k l \end{matrix} \right\} A^l) B_i + A^i (B_{i|k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} B_l) \\ &= A^i_{|k} B_i + A^i B_{i|k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k l \end{matrix} \right\} A^l B_i - \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} A^i B_l \\ &= A^i_{|k} B_i + A^i B_{i|k} + \left\{ \begin{matrix} l \\ k i \end{matrix} \right\} A^i B_l - \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} A^i B_l \\ &= A^i_{|k} B_i + A^i B_{i|k} \\ &= (A^i B_i)_{|k} \end{aligned}$$

となって、内積に対しては共変微分は通常の偏微分になります。これは当然の結果で、スカラーの共変微分はただの偏微分になるというだけです。また、偏微分と同じになるものとして、 $A_{i||k} - A_{k||i}$ という形があり、実際に計算してみれば

$$\begin{aligned} A_{i||k} - A_{k||i} &= A_{i|k} - A_{k|i} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} A_l + \left\{ \begin{matrix} l \\ k i \end{matrix} \right\} A_l \\ &= A_{i|k} - A_{k|i} \end{aligned}$$

となって、これも偏微分と同じになります。この形は回転 (rotation) なので、回転は偏微分で書けることを表しています。これについては「テンソルの対称・反対称」でもう一度ふれます。

共変微分の注意として、一般的に

$$\xi^i_{||a||b} \neq \xi^i_{||b||a}$$

となっていて、共変微分は通常の微分での $\xi^i_{|a|b} = \xi^i_{|b|a}$ という関係を持ちません。

ここから、発散とラプラシアンを見ていきます。

- 発散

$\xi^i_{||i}$ はテンソルなので、 $\xi^i_{||i}$ はテンソルの縮約によってスカラーになります。このことを、普通の微分と同じようにベクトルの発散と呼び、共変微分によって

$$\xi^i_{||i} = \text{div} \boldsymbol{\xi} = \xi^i_{|i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ i k \end{matrix} \right\} \xi^k$$

と書けます。見慣れたベクトルの発散 $\xi^i_{|i}$ を共変微分で書いただけです。上でも出てきたように、 $\xi^i_{|i} = \xi^i_{||i}$ となる座標系があれば、右辺はテンソルのためにあらゆる座標系で使えます。この発散の式を変形していき、扱いやすいものにします。

計量の偏微分 (2)

$$g_{ir|l} = [il, r] + g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\}$$

を変形すれば

$$\begin{aligned} 0 &= g_{ir|l} - g_{kr} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} - g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} \\ &= g^{ir} g_{ir|l} - g^{ir} g_{kr} \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} - g^{ir} g_{ik} \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} \\ &= g^{ir} g_{ir|l} - g_k^i \left\{ \begin{matrix} k \\ i l \end{matrix} \right\} - g_k^r \left\{ \begin{matrix} k \\ r l \end{matrix} \right\} \\ &= g^{ir} g_{ir|l} - \left\{ \begin{matrix} k \\ k l \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r \\ r l \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

k と r はダミーインデックスなので、どちらかに合わせて

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k l \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ir} g_{ir|l}$$

「テンソル解析」の計量テンソルの項で導いた計量の行列式を使って変形します。計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式を g としたとき

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g^{ik}$$

となっているので、これを使って

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k l \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ir}} \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^l} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^l} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \log |g| \tag{4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l} \log \sqrt{-g} \tag{5}$$

ルートの中でマイナスにしているのには理由があって、簡単に言ってしまうと、特殊相対性理論でのミンコフスキー計量の行列式 g が -1 のためです。これは、局所的には慣性系が現れることを組み込むためです。というわけで、この結果を発散の式に入れて

$$\begin{aligned}
\xi^i_{|i} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = \xi^i_{|i} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} \log \sqrt{-g} \\
&= \xi^i_{|i} + \xi^k \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} (\xi^i_{|i} \sqrt{-g} + \xi^k \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}} [\xi^i \sqrt{-g}]_{|i}
\end{aligned}$$

という形になります。この関係は頻繁に使います。これを使って重要な関係を導きます。

そのために、不変体積要素を求めます。座標系を x から \bar{x} に変えるときの計量の変化は座標変換から

$$\bar{g}_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} g_{mn}$$

この行列式をとると

$$\bar{g} = g \left(\det \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right)^2$$

このルートは

$$\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{-g} \left| \det \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right| = \sqrt{-g} \left| \frac{\partial(x^0, x^1, \dots)}{\partial(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots)} \right|$$

最右辺はヤコビアンで、 $||$ は絶対値です。絶対値を取るのは、体積は負の値を持たないからです。

4次元での微小な体積要素は

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

であって、この変換は積分での変数変換と同じように、ヤコビアンから

$$d^4\bar{x} = \left| \frac{\partial(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \right| d^4x$$

よって

$$\sqrt{-\bar{g}} d^4\bar{x} = \sqrt{-g} d^4x$$

という関係になり、これはスカラーです。これを4次元での不変体積要素と呼びます。例えば、ミンコフスキー計量 ($g = -1$) では

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dt dV$$

というただの測定可能な時間 dt と微小三次元体積 dV になります。また 3 次元空間での極座標 (r, θ, ϕ) では計量は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6)$$

から

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

なので

$$\sqrt{g} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \sin \theta$$

よって

$$d^3x = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

という極座標での微小体積要素となります。

不変体積要素を導入したのは、 n 次元空間におけるある領域 D での積分

$$\int_D d^n x \sqrt{-g} \operatorname{div} \xi$$

を考えるためです (ξ はベクトル)。発散の式を入れれば

$$\int_D d^n x (\xi^i \sqrt{-g})_{|i}$$

と書き換えられます。これにグリーンの定理 (部分積分) を使うことで

$$\int_D d^n x (\xi^i \sqrt{-g})_{|i} = \sum_i \int_{\partial D} dx^1 dx^2 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^n \xi^i \sqrt{-g}$$

というリーマン空間におけるガウスの積分定理の共変形を得ることができます。 ∂D は D の境界、右辺の積分領域はベクトル ξ^i の流出面です。このように、ガウスの積分定理に計量テンソルがからんできます。また、左辺は

$$\xi_{||i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\xi^i \sqrt{-g})_{||i}$$

から

$$\int_D d^n x (\xi^i \sqrt{-g})_{||i} = \int_D d^n x \sqrt{-g} \xi_{||i}^i$$

とも書けます。この形で書くと、 $A^\mu(x)$ が無限遠で消えるなら

$$\int d^n x \partial_\mu A^\mu = 0$$

となることの一般化した形というのがはっきりします。

電磁気においてガウスの積分定理が重要になっていたように一般相対性理論においてもベクトルの保存則で大事な役割を持ちます。

- ラプラシアン

スカラー関数 $f(x^\alpha)$ の勾配 $f_{|k}$ は共変ベクトルになります。これに計量テンソル g^{ik} を作用させて反変ベクトルにして、発散の式に入れれば

$$\nabla^2 f = \text{div}(g^{ik} f_{|k}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} [g^{ik} f_{|k} \sqrt{-g}]_{||i}$$

これをラプラシアン ∇^2 とします。これを三次元の極座標に適用させてみます。

f の偏微分部分は

$$f_{|k} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)$$

このときの計量 g_{ik} は (6) から

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

g^{ik} は g_{ik} の逆行列なので

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

そして、行列式 g は $r^4 \sin^2 \theta$ です。これらをラプラシアンの式に入れれば

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{ik}f_{|k})_{|i} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}(g^{i1}\frac{\partial f}{\partial r} + g^{i2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + g^{i3}\frac{\partial f}{\partial \phi}))_{|i} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta}(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi})) \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

なので、極座標でのラプラシアンになります。一行目から二行目へは

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sqrt{g}g^{21}\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \phi}(\sqrt{g}g^{31}\frac{\partial f}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial f}{\partial r}$$

としています。

- intrinsic derivative

共変微分は平行移動によるズレとして作りましたが、今度は曲線上においてのみ定義されるベクトルの微分がどうなるのかを見ます。アフィン空間で行います。曲線上ということから、座標を $x^i(s)$ として曲線のパラメータ s を使って書きます。ベクトル ξ^i も曲線のパラメータによる関数として、 $\xi^i(s)$ とします。そうすると、移動は曲線のパラメータによるので、 $x^i(s)$ から $x^i(s + \Delta s)$ への移動となり、対応するベクトルは $\xi^i(s), \xi^i(s + \Delta s)$ です。

$x^i(s + \Delta s)$ でのベクトル $\xi^i(s + \Delta s)$ はテーラ展開によって

$$\xi^i(s + \Delta s) = \xi^i(s) + \frac{d\xi^i}{ds}\Delta s + \dots$$

共変微分のとくと同じように $\xi^i(s)$ を平行移動させれば、 Δs の一次までで $dx^i = (dx^i/ds)\Delta s$ なので

$$\xi^{i'}(s + \Delta s) = \xi^i(s) - \Gamma_{jk}^i \xi^k(s) \frac{dx^j}{ds} \Delta s + \dots$$

この二つの差を取れば

$$\xi^i(s + \Delta s) - \xi^{i'}(s + \Delta s) = (\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dx^j}{ds})\Delta s$$

となるので、共変微分と同じようにして

$$\frac{D\xi^i}{Ds} = \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dx^j}{ds}$$

というのが定義できます。これは曲線に沿った共変微分に対応し、intrinsic derivative や absolute derivative と言います。これはそのままテンソルに一般化できます。

共変微分との対応は

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dx^j}{ds} &= \frac{d\xi^i}{dx^l} \frac{dx^l}{ds} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \frac{dx^j}{dx^l} \frac{dx^l}{ds} \\ &= \frac{d\xi^i}{dx^l} \frac{dx^l}{ds} + \Gamma_{jk}^i \xi^k \delta_l^j \frac{dx^l}{ds} \\ &= \left(\frac{d\xi^i}{dx^l} + \Gamma_{lk}^i \xi^k \right) \frac{dx^l}{ds} \\ &= \xi^i_{||l} \frac{dx^l}{ds} \end{aligned}$$

となっています。また、intrinsic derivative でも共変微分と同様に計量は定数扱いになります。これらの関係はリーマン空間でも同様に成り立ちます。

- リー微分

intrinsic derivative と同じように曲線に沿った別の微分が作れます。パラメータ s を持つ曲線 $f^\mu(s)$ を考えます。これの接ベクトル t^μ は s の微分によって

$$t^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial s}$$

ここでは、曲線上のある点 P にいるベクトル $A_\mu(x)$ を、接ベクトルの方向へ微小移動させ点 Q へ持って行きます。ここで、移動させることを座標変換と見なします (観測者が動くことで点 P から点 Q に行ったとする)。そうすると、点 Q の座標と移動させたベクトルを $x'^\mu = x^\mu + \epsilon t^\mu$, $A'^\mu(x')$ とすれば、座標変換から

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu(x) = (\delta_\nu^\mu + \epsilon \frac{\partial t^\mu}{\partial x^\nu}) A^\nu(x) = A^\mu(x) + \epsilon t_{|\nu}^\mu A^\nu(x) \quad (7)$$

これとは別に $A^\mu(x)$ を点 Q の座標で書くと

$$A^\mu(x') = A^\mu(x + \epsilon t) = A^\mu(x) + \epsilon A_{|\nu}^\mu t^\nu \quad (8)$$

$A'^\mu(x')$ と $A^\mu(x')$ は等しくならないことから、二つの差を取って微小な ϵ でわったものを

$$\mathfrak{L}_t A_P^\mu = \frac{A_Q^\mu(x') - A_Q'^\mu(x')}{\epsilon}$$

として、 \mathfrak{L}_t を定義します。 A^μ, A'^μ についている P, Q は点 P, Q でのものであることを表わしています。これをリー微分 (Lie derivative) と呼び、右辺は (7)、(8) から

$$\mathfrak{L}_t A^\mu = A_{|\nu}^\mu t^\nu - t_{|\nu}^\mu A^\nu$$

と求まります。 \mathfrak{L}_t のように \mathfrak{L} の添え字に動かす方向をつけて書かれます。導出を見て分かるように、リー微分は曲線にそって接ベクトル方向へ微小に動かした時の変化量として定義されます。

同様にすることで、共変ベクトルに対しては

$$\mathfrak{L}_t A_\mu = A_{\mu|\nu} t^\nu + t_{|\mu}^\nu A_\nu$$

となります。

リー微分は接続係数を含まずに定義されていますが、リー微分はテンソルであるために偏微分は共変微分に変えて

$$\mathfrak{L}_t A^\mu = A_{|\nu}^\mu t^\nu - t_{|\nu}^\mu A^\nu$$

と書いても問題はありません。テンソルであることを示すのは省きます。

スカラーやテンソルに対しても同じように定義でき、スカラーでは単なる偏微分で

$$\mathfrak{L}_t \phi = \phi_{|\mu} t^\mu = \phi_{||\mu} t^\mu$$

テンソルでは、例えば 2 階では

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_t T^{\mu\nu} &= T_{|\lambda}^{\mu\nu} t^\lambda - T^{\lambda\nu} t_{|\lambda}^\mu - T^{\mu\lambda} t_{|\lambda}^\nu = T_{||\lambda}^{\mu\nu} t^\lambda - T^{\lambda\nu} t_{||\lambda}^\mu - T^{\mu\lambda} t_{||\lambda}^\nu \\ \mathfrak{L}_t T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu|\lambda} t^\lambda + T_{\lambda\nu} t_{|\mu}^\lambda + T_{\mu\lambda} t_{|\nu}^\lambda = T_{\mu\nu||\lambda} t^\lambda + T_{\lambda\nu} t_{||\mu}^\lambda + T_{\mu\lambda} t_{||\nu}^\lambda \\ \mathfrak{L}_t T_\nu^\mu &= T_{\nu|\lambda}^\mu t^\lambda - T_\nu^\lambda t_{|\lambda}^\mu + T_\lambda^\mu t_{|\nu}^\lambda = T_{\nu||\lambda}^\mu t^\lambda - T_\nu^\lambda t_{||\lambda}^\mu + T_\lambda^\mu t_{||\nu}^\lambda \end{aligned}$$

T_ν^μ での各符号は、添え字のつづれ方が共変、反変ベクトルと同じ場合での符号となります。例えば、 ν がないとすれば、第一項と第二項は反変ベクトルに、 μ がないとすれば共変ベクトルの場合になります。また、計量テンソルでは、計量テンソルの共変微分は 0 なので

$$\mathfrak{L}_t g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu|\lambda} t^\lambda + g_{\mu\lambda} t_{|\nu}^\lambda + g_{\lambda\nu} t_{|\mu}^\lambda = t_{\mu||\nu} + t_{\nu||\mu}$$

となります。

最後に、レヴィ・チビタテンソルの共変微分を行っておきます。レヴィ・チビタテンソルではテンソル密度の共変微分が必要なので、それをまずは求めます。ウェイト W のベクトル密度 \mathcal{V}^i はベクトル V^i によって

$$\mathcal{V}^i = (-g)^{W/2} V^i$$

となっています。これを (1) に使えば

$$\begin{aligned}
V^i(x^j + dx^j) - V^i(x^j) &= (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^i(x^j) + \frac{\partial}{\partial x^k} ((-g)^{-W/2} \mathcal{V}^i(x^j)) dx^k \\
&\quad - (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^l(x^j) dx^k \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^l(x^j) \right) dx^k \\
&= \left((-g)^{-W/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \frac{W}{2} (-g)^{-W/2-1} \frac{\partial g}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^l(x^j) \right) dx^k \\
&= \left((-g)^{-W/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \frac{W}{2} (-g)^{-W/2} g_{ab} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i (-g)^{-W/2} \mathcal{V}^l(x^j) \right) dx^k \\
&= (-g)^{-W/2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \frac{W}{2} g_{ab} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^k} \mathcal{V}^i(x^j) + \Gamma_{kl}^i \mathcal{V}^l(x^j) \right) dx^k
\end{aligned}$$

途中で、(5)の一行目から二行目へ関係

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k}$$

の左辺を変形させた

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \quad \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g^{ij} \right)$$

を使っています。この結果から、ベクトル密度に対する共変微分は

$$\mathcal{V}_{||a}^i = \mathcal{V}_{|a}^i + \Gamma_{aj}^i \mathcal{V}^j + \frac{W}{2} g_{jk} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^a} \mathcal{V}^i(x^j) = \mathcal{V}_{|a}^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ a j \end{matrix} \right\} \mathcal{V}^j - W \left\{ \begin{matrix} j \\ j a \end{matrix} \right\} \mathcal{V}^i$$

となります。最右辺へは

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ a k \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} g^{ab} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^k}$$

を使っています。テンソルへの拡張も同じようにできます。

というわけで、 $W = 1$ でのレヴィ・チビタテンソル密度の共変微分は

$$\epsilon_{||j}^{abcd} = \epsilon_{|j}^{abcd} + \left\{ \begin{matrix} a \\ j e \end{matrix} \right\} \epsilon^{ebcd} + \left\{ \begin{matrix} b \\ j e \end{matrix} \right\} \epsilon^{aecd} + \left\{ \begin{matrix} c \\ j e \end{matrix} \right\} \epsilon^{abed} + \left\{ \begin{matrix} d \\ j e \end{matrix} \right\} \epsilon^{abce} - \left\{ \begin{matrix} e \\ e j \end{matrix} \right\} \epsilon^{abcd}$$

$a, b, c, d = 0, 1, 2, 3$ とすると

$$\begin{aligned}
\epsilon_{||j}^{0123} &= \epsilon_{|j}^{0123} + \begin{Bmatrix} 0 \\ j e \end{Bmatrix} \epsilon^{e123} + \begin{Bmatrix} 1 \\ j e \end{Bmatrix} \epsilon^{0e23} + \begin{Bmatrix} 2 \\ j e \end{Bmatrix} \epsilon^{01e3} + \begin{Bmatrix} 3 \\ j e \end{Bmatrix} \epsilon^{012e} - \begin{Bmatrix} e \\ e j \end{Bmatrix} \epsilon^{0123} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ j 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ j 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ j 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ j 3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e \\ e j \end{Bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\epsilon^{0123} = 1$ なので微分は消え、最後の項は

$$\begin{Bmatrix} e \\ e j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 j \end{Bmatrix}$$

なので、打ち消しあって消えます。他の場合も同様になっているので、レヴィ・チビタテンソル密度の共変微分は消えます。