ライスナー・ノルトシュトレーム解

シュバルツシルト解は質量 M を持っている物体が作る空間でしたが、ここでは電荷も持っている場合の解を求めます。
シュバルツシルト解と同様に静的で球対称だとしていくので結果を流用します。
「$'$」は r の微分です。

物質分布はなく、電磁場だけがいるとします (真空中に電磁場だけがある空間)。なので、物質分布はないとしてエネルギー・運動量テンソルを

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\ \nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$$

とします。電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の対角成分は 0 なので、トレース $T = T^{\mu}_{\ \mu}$ は 0 です。よって、このときのアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$
$$R_{\mu\nu} = \frac{A}{c^2}(F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\ \nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) \quad (A = \frac{8\pi\kappa}{c^2})$$

これをアインシュタイン・マクスウェル方程式と言ったりします。これの解を求めます。
計量と電磁場は静的で球対称とします。計量の形はシュバルツシルト解と同じように

$$ds^2 = e^{\nu}(cdt)^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$\nu.\lambda$ は r の関数です。なので、リーマンテンソルはシュバルツシルト解でのものを流用できて

$$R_{00} = \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r})$$
$$R_{11} = -\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r}$$
$$R_{22} = -e^{-\lambda}(1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}) + 1$$
$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

後はアインシュタイン方程式の右辺を求めるだけです。
電磁場も球対称にするために、4 元ベクトルポテンシャル A_μ の 3 次元空間成分は r 方向に対応する A_1 だけが 0 でないとします ($A_2, A_3 = 0$)。さらにゲージ変換を利用します。ベクトルポテンシャルのゲージ変換は、任意のスカラー関数 Λ によって

$$\overline{A}^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\Lambda$$

と行われます。これを利用して $\overline{A}^1 = 0$ になるように Λ を選びます。これで A^0 だけになります。また、静的なので A^0 は時間独立で、r の関数です。

よって、電磁場テンソルは $F_{01} = (A_{0|1} - A_{1|0}) = A_{0|1} = -F_{10}$ のみになるので

$$F_{\mu\nu} = E(r)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とします。添え字が上では

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}g^{\beta\nu} \\ &= E\begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= e^{-(\nu+\lambda)}E\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

電磁場テンソル密度 f は

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g}F^{\mu\nu} \quad (\sqrt{-g} = e^{(\nu+\lambda)/2}r^2\sin\theta)$$

今は電荷分布もないとしているので、$f^{\mu\nu}_{|\nu} = 0$ です (「マクスウェル方程式」参照)。そうすると、$F^{\mu\nu}$ の成分は $(0,1),(1,0)$ の二つしかなく、静的であるために時間微分は 0 になることから

$$f^{01}_{|1} = (\sqrt{-g}F^{01})_{|1} = (Ee^{-(\nu+\lambda)/2}r^2\sin\theta)_{|1} = 0$$

r で積分して

$$Ee^{-(\nu+\lambda)/2}r^2 = \epsilon$$

ϵ は積分定数です。よって、

$$E = e^{(\nu+\lambda)/2}\frac{\epsilon}{r^2}$$

ϵ/r^2 から、ϵ は今の電場を作る質点の電荷と予想できます。

電磁場テンソルに入れれば

$$F_{\mu\nu} = e^{(\nu+\lambda)/2}\frac{\epsilon}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ F^{\mu\nu} = e^{-(\nu+\lambda)/2}\frac{\epsilon}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

後必要なものとして $F^{\mu}_{\ \nu}$ があるので、これも求めれば

$$\begin{aligned} F^{\mu}_{\ \nu} &= g^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} \\ &= e^{(\nu+\lambda)/2}\frac{\epsilon}{r^2}\begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -e^{(\nu+\lambda)/2}\frac{\epsilon}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\nu} & 0 & 0 \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これで $T_{\mu\nu}$ が求められます。$F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\ \nu}$ は

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\ \nu} &= -\frac{\epsilon^2}{r^4}e^{(\nu+\lambda)}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\nu} & 0 & 0 \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\epsilon^2}{r^4}e^{(\nu+\lambda)}\begin{pmatrix} -e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\epsilon^2}{r^4}\begin{pmatrix} -e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ は

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10} = -2\frac{\epsilon^2}{r^4}$$

よって、$T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}(\frac{\epsilon^2}{r^4}\begin{pmatrix} -e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon^2}{2r^4}\begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix})$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^4}\begin{pmatrix} -e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^4}\begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

これで両辺が求まったので成分ごとにまとめます。
アインシュタイン方程式の 00,11,22 成分は

- 00 成分

$$\frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}) = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^4}e^\nu$$

- 11 成分

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^4}e^\lambda$$

- 22 成分

$$1 - e^{-\lambda}(1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}) = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2}$$

00 成分に $e^{-\nu+\lambda}$ をかけて

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^4}e^\lambda$$

これと 11 成分を引けば

$$\lambda' + \nu' = 0$$

これは「シュバルツシルト解〜外部〜」と同じなので

$$\lambda = -\nu$$

22 成分にこれを入れれば

$$1 - e^{-\lambda}(1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}) = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2}$$

$$1 - e^{\nu}(1 + \nu' r) = \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2}$$

$$(re^{\nu})' = 1 - \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2}$$

$$re^{\nu} = r + \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r} + C$$

$$e^{\nu} = 1 + \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2} + \frac{C}{r}$$

C は積分定数です。C はシュバルツシルト解と同じように $-2m$ として

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2}$$

よって、線素は

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2})(cdt)^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{A}{c^2}\frac{\epsilon^2}{2r^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

これをライスナー・ノルトシュトレーム (Reissner-Nordström) 解と言います。m は $\epsilon = 0$ ならシュバルツシルト解と一致するので、幾何学的質量 $m = \kappa M/c^2$ です。ϵ が何に対応するかはすぐに分かります。$\lambda = -\nu$ なので E は

$$E = \frac{\epsilon}{r^2}$$

となり、電磁気での点電荷が作る電場の式そのものです。なので、ϵ を電荷 e とします。

というわけで、ライスナー・ノルトシュトレーム解は電荷 e を使って表わせば

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})(cdt)^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (e^2 = -\frac{A\epsilon^2}{2c^2})$$

となります。このとき電荷 e は長さの次元を持つので、m が幾何学的質量であることに対応して幾何学的電荷と言う事ができます。そして $e = 0$ でシュバルツシルト解に一致します。ただし、星について考えた場合このように電荷によるものが存在しているとは考えづらいために、現実に適用されることはあまりないです。

ちなみに、ここでの出発点を双対テンソル ${}^*F_{\mu\nu}$ とし、モノポールが存在すると仮定することで、電荷の代わりに磁荷がある場合での解になります。