ペトロフの分類

空間を幾何学的な性質によって分類することができます。この分類方法は数学的なので簡単に結果だけを見ていきます。
ここではペトロフによる方法ではなくペンローズによって与えられた方法を示します (「ニューマン・ペンローズ技法」参照)。

ヌルベクトルによる空間の分類があり

タイプ	ヌルベクトル	
N	4 主要ヌルベクトル	$k^c C_{abcd} = 0$
III	3 主要ヌルベクトルと 1 主要ヌルベクトル	$k^c C_{abc\{d}k_{e\}} = 0$
D	2 つの 2 主要ヌルベクトル	$C_{abc\{d}k_{e\}}k^b k^c = 0,\ C_{abc\{d}l_{e\}}l^b l^c = 0$
II	1 つの 2 主要ヌルベクトルと 2 つの 1 主要ヌルベクトル	$C_{abc\{d}k_{e\}}k^b k^c = 0$
I	4 つの 1 主要ヌルベクトル	$k^b k^c k_{\{e}C_{a\}bc\{d}k_{f\}} = 0$

というものです。これをペトロフの分類 (Petrov classification) と呼びます。タイプというのが空間の分類で使われる記号です。本によっては N を IV、D を ID や II-II と表記することもあるので注意してください。

ヌルベクトルでの 4 主要ヌルベクトルのように言ってるものは、４つのヌルベクトルが同じで重複していることです。なので、タイプ N は一種類の主要ヌルベクトルがあり、タイプ III では 2 種類、タイプ D では 2 種類、タイプ II では 3 種類、タイプ I では 4 種類あることになり、このように主要ヌルベクトルの数によって時空は分類されます。主要ヌルベクトル (principal null vector) は k, l のことで、一番右の式を満たすようなヌルベクトルなんだ程度に思えばいいです。

添え字についている { } は反対称の記号で、$C_{abc\{d}k_{e\}} = C_{abcd}k_e - C_{abce}k_d$ ということです (右辺が 0 なので 1/2 を外しています)。C はワイルテンソル (Weyl tensor) で

$$\eta^{ad}C_{\{ab\}\{cd\}} = 0$$

を満たし、例えば $C^a{}_{bca} = 0$ となるのがワイルテンソルです (「リッチテンソル」参照)。言い換えれば、リーマンテンソルからリッチテンソルを除いたものです (トレースフリー (対角和が 0) なリーマンテンソル)。ワイルテンソルはリーマンテンソルの線形結合で書くことができ、その形は「ニューマン・ペンローズ技法」で載せています。また、ワイルテンソルはトレースフリーなリーマンテンソルなので、リーマンテンソルが真空でのアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を満たすときにはワイルテンソルとリーマンテンソルは同じです。

まとめると、ある空間での曲率テンソル (ワイルテンソル) と主要ヌルベクトルがどの関係式を満たしているのか調べることで、その空間がどのペトロフタイプに属しているのか知ることができます。

例として、カー解を求めるときに作った計量

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2ml_\mu l_\nu\ ,\ l_\mu l_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$$

に出てくる l_μ が主要ヌルベクトルです。そして、この計量によるリーマンテンソルはペトロフタイプ I でなく、タイプ D に属しています。実際に、この計量によるリーマンテンソルがタイプ I でないことは

$$R_{\alpha\eta\beta\{\gamma}l_{\tau\}}l^\eta l^\beta = R_{\alpha\eta\beta\gamma}l_\tau l^\eta l^\beta - R_{\alpha\eta\beta\tau}l_\gamma l^\eta l^\beta = 0$$

となっているのを確かめればいいです。簡単に示しておきます。

まず、リーマンテンソルの各項に $l^\eta l^\beta$ をかけるので、クリストッフェル記号から ($2m$ は m としています)

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \eta \end{array} \right\}_{|\gamma} l^\eta l^\beta = m(\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}((-l_\eta l_\lambda)_{|\beta} + (-l_\lambda l_\beta)_{|\eta} - (-l_\beta l_\eta)_{|\lambda}))_{|\gamma} l^\eta l^\beta$$

$$= \frac{1}{2} m l^\eta l^\beta (-g^{\alpha\lambda}((l_{\eta|\beta|\gamma} l_\lambda) + (l_\lambda l_{\beta|\eta|\gamma})))$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\}_{|\beta} l^\eta l^\beta = m(\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}((-l_\eta l_\lambda)_{|\gamma} + (-l_\lambda l_\gamma)_{|\eta} - (-l_\gamma l_\eta)_{|\lambda}))_{|\beta} l^\eta l^\beta$$

$$= \frac{1}{2} m l^\eta l^\beta ((l^\alpha l^\lambda)_{|\beta}(-(l_\lambda l_\gamma)_{|\eta})$$

$$- g^{\alpha\lambda}(l_{\eta|\gamma|\beta} l_\lambda + l_{\lambda|\eta|\beta} l_\gamma + l_{\lambda|\eta} l_{\gamma|\beta} + l_{\lambda|\beta} l_{\gamma|\eta} + l_\lambda l_{\gamma|\eta|\beta} - l_\gamma l_{\eta|\lambda|\beta}))$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \delta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \beta\ \eta \end{array} \right\} l^\eta l^\beta = \frac{1}{4} m^2 (g^{\alpha\lambda}((-l_\delta l_\lambda)_{|\gamma} + (-l_\lambda l_\gamma)_{|\delta} - (-l_\gamma l_\delta)_{|\lambda})) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \delta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \gamma\ \eta \end{array} \right\} l^\eta l^\beta = \frac{1}{4} m^2 (g^{\alpha\lambda}((-l_\delta l_\lambda)_{|\beta})(g^{\delta\lambda}((-l_\lambda l_\gamma)_{|\eta}) l^\eta l^\beta = 0$$

これらからリーマンテンソルは

$$\begin{aligned}
R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} l^\eta l^\beta =& -\frac{1}{2} m l^\eta l^\beta \big(- \big((l_{\eta|\beta|\gamma} l^\alpha) + (l^\alpha l_{\beta|\eta|\gamma})\big)\big) \\
&+ \frac{1}{2} l^\eta l^\beta \big((l^\alpha_{|\beta} l^b + l^\alpha l^b_{|\beta})\big(-(l_{b|\eta} l_\gamma + l_b l_{\gamma|\eta})\big) - \big((l_{\eta|\gamma|\beta} l^\alpha) + (l^\alpha_{|\eta|\beta} l_\gamma + l^\alpha_{|\eta} l_{\gamma|\beta} + l^\alpha_{|\beta} l_{\gamma|\eta} + l^\alpha l_{\gamma|\eta|\beta}) - (l_\gamma l_{\eta|\beta}{}^{|\alpha})\big)\big) \\
=& -\frac{1}{2} m l^\eta l^\beta (l^\alpha_{|\eta|\beta} l_\gamma + l^\alpha_{|\eta} l_{\gamma|\beta} + l^\alpha_{|\beta} l_{\gamma|\eta} + l^\alpha l_{\gamma|\eta|\beta})) \\
=& -\frac{1}{2} m (-A_{|\beta} l^\beta l^\alpha l_\gamma + A^2 l^\alpha l_\gamma + A^2 l^\alpha l_\gamma - A_{|\beta} l^\beta l^\alpha l_\gamma) \\
=& -m(A^2 - A_{|\beta} l^\beta) l^\alpha l_\gamma
\end{aligned}$$

これに l_τ をかけると

$$R^\alpha{}_{\eta\beta\gamma} l_\tau l^\eta l^\beta = -m(A^2 - A_{|\beta} l^\beta) l^\alpha l_\gamma l_\tau$$

γ と τ を交換しても右辺は変化しないことから

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma} l_\tau l^\eta l^\beta - R_{\alpha\eta\beta\tau} l_\gamma l^\eta l^\beta = 0$$

よって、タイプ II,D の関係式を満たすので、タイプ I ではないです。

このようにタイプ I ではないものを代数的に特別 (algebraically special) と呼んだりします。ここで示したのはタイプ I ではないというだけで、実際に II,D どちらのタイプなのかは判別させてなく、確かめるにはもう 1 つ主要ヌルベクトルが存在するかどうか示す必要があります (「スピン係数」のゴールドバーグ・ザックスの定理参照)。

カー解はタイプ D に属しているのでもう 1 つ主要ヌルベクトルが存在しています。これが重要なことで、相対論によって導かれるブラックホールの空間はは全てタイプ D に属しています。タイプ D であるためにヌルベクトル l_μ がいることが、「カー解〜導出〜」のようにしてカー解が求められた代数的な理由と言えます。