

近日点

シュバルツシルト解を使い、重力の影響で惑星の運動（粒子の運動）がどうなっているのか求めます。

シュバルツシルト解による空間をシュバルツシルト空間と呼んでいきます。

重力の影響といっても通常、惑星間に存在する重力はそれほど強くないので、弱い重力場を扱うことになり、ニュートンの理論（ケプラーの法則）との対応ができます。

「 $'$ 」を φ の微分としています。

星は近似的に球として、シュバルツシルト解によって星による重力を考えます。重力場を作り出す球対称な物体（太陽）をおいたとき、その重力場中を運動する物体（惑星）の軌道は測地線に沿っているので、測地線方程式を使えばいいです。しかし、測地線方程式を使うよりオイラー・ラグランジュ方程式を使ったほうが簡単です。

そうすると、シュバルツシルト解（線素）を使って

$$\delta \int ds \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (ct)'^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] = 0$$

という変分問題になります。ドットは弧長 s によって微分されたものです。物体の動きを知るためには、 ct, r, θ, φ に対する 4 つの方程式を解けばいいです。

4 つの中の 1 つはシュバルツシルト解を ds^2 で割った

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(c \frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right) \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \end{aligned} \quad (1)$$

これは r に対する方程式とみなすことが出来ます。

ct, θ, φ に対しては、変分の式の [] 中を F として、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{ds} \frac{dF}{d\dot{x}^\mu} = \frac{dF}{dx^\mu}$$

から出します。各成分に対して

- $x^0 = ct$

$$\frac{d}{ds} \left(\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right) = 0$$

- $x^2 = \theta$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

- $x^3 = \varphi$

$$\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0$$

となります。これで4つの方程式が出てきましたが、シュバルツシルト解の静的で球対称という性質から方程式の数を減らせます。

θ は、 $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ と選んで、平面上 (赤道面上) での軌道とします。 θ が固定されるので、 θ の式は無視します。

φ の式は

$$\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = \frac{d}{ds} r^2 \dot{\varphi} = 0$$

なので

$$r^2 \dot{\varphi} = h$$

定数を h としています。この形は力学で出てくる角運動量を表す式で、右辺が定数になるので角運動量は保存されることを表しています。このように角運動量保存が出てくるのは球対称な状況を考えているからです。

t の方では θ とは無関係に

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l$$

となって、定数を l としています。この l はエネルギーに対応するような量となっていて、そのためエネルギーが保存することを表わします。このことは最後に補足します。エネルギー保存は静的であるために出てきます。

エネルギー保存と角運動量保存の式を使うことで3つの方程式を1つまで減らすことが出来ます。求められた h と l を (1) に使って

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (2)$$

そして、 r を φ の関数として微分したものは

$$\frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = r' = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

ここでは「'」を φ の微分とします。なので、 h を使えば

$$\dot{r} = \dot{\varphi} r' = \frac{h}{r^2} r'$$

\dot{r} をこれに置き換えて

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

ここでさらに r を $r = \frac{1}{u}$ 、 $r' = -\frac{u'}{u^2}$ のように置き換えると後々楽になるので

$$\begin{aligned} (1 - 2mu) &= c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \\ u'^2 &= \frac{c^2 l^2 - (1 - 2mu)}{h^2} - u^2 (1 - 2mu) \\ &= \frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3 \end{aligned}$$

というわけで、解くべき方程式はこれ1つになります。これを積分してしまえば $u(\varphi)$ の厳密な軌道がわかります。しかし、厳密に解かずに、今の結果からケプラーの法則が出てくることを見ます。

この式をもう一回 φ で微分して

$$2u'u'' = \frac{2m}{h^2} u' - 2uu' + 6mu^2 u'$$

すぐに分かるように、 $u = \text{const}$ ($u' = 0$) という解があります。しかし、これは円軌道の解でしかないので、違う解を求めます。そうすると

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

この形は力学でのケプラーの法則の式 (力学の「中心力による運動」参照)

$$u'' + u = \frac{\kappa M}{H^2}$$

と似た形です (H は一定の面積速度)。この二つを対応させてしまえると考えると、 $3mu^2$ は無視して

$$\frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{H^2}$$

とします。これが非相対論的な極限で出てくるのかを m/h^2 の近似から調べます。

H は角運動量なので φ によって

$$H = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

これに対して h は

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{ds}$$

$m = \kappa M/c^2$ にこれらを入れると

$$\frac{m}{h^2} = \frac{\kappa M}{c^2 r^4 (d\varphi/ds)^2} = \frac{\kappa M}{c^2 r^4 (d\varphi/dt)^2 (dt/ds)^2}$$

分母にいる dt/ds は「真空でのアインシュタイン方程式」で示したように、非相対論的では

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq c^2(1 + \epsilon\gamma_{00})$$

微小なので ϵ も無視してしまえば

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq c^2 \quad (3)$$

そうすると、この近似のもとで

$$\frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{r^4 (d\varphi/dt)^2}$$

となり

$$\frac{\kappa M}{H^2} = \frac{\kappa M}{r^4 (d\varphi/dt)^2}$$

と等しくなるので、予想通り

$$\frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{H^2}$$

という関係になっています。そうすると

- 相対論的な式

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$$

- 非相対論的な式

$$u'' + u = \frac{\kappa M}{H^2}$$

これらの間には余分な $3mu^2$ という項が存在します。これを相対論的な補正項と考えます (正確には m/h^2 も厳密に等しいというわけではないので微妙な違いはあります)。

相対論的な場合で現れた $3mu^2$ が惑星の軌道にどの程度の影響を与えているのか見ます。まず

$$\frac{3mu^2}{m/h^2} = 3u^2 h^2 = 3 \frac{1}{r^2} r^4 \dot{\varphi}^2 = 3r^2 \left(\frac{dt}{ds} \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 3r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{1}{c^2}$$

なので

$$3\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{1}{c^2}$$

という寄与を与えているのが分かります。 $r\frac{d\varphi}{dt}$ は円の接線方向の速度になっているので、惑星の軌道速度にあたりと考えるとすれば、この式は

軌道速度/光速

となっています。惑星の軌道速度は光速より遅く、割合は大体 10^{-8} 程度のオーダーです。というわけで、かなり小さな寄与の項と分かります。この項によって実際にどの程度軌道が修正されるのかを求めます。

そのために、近日点 (perihelion) を求めます。近日点は太陽に最も近づく地点です。近日点については水星で詳しく観測されていて、一般相対性理論の正しさが初めて認識されたのも水星の近日点のズレにおいてです。

ケプラーの法則によれば、惑星の軌道は楕円軌道を描くとされますが、実際には正確に楕円を描いていなく近日点はズレていきます。このズレはニュートンの理論によっても他の惑星による摂動等によって十分求められていましたが、100年間に43秒角というかなり小さな値で観測データとの不一致が存在していました。そのために、水星の内側にバルカンなる惑星が存在するのではないかと予想されましたが、そんな惑星は観測されていません。このニュートンの理論では説明できなかった残りのズレが、一般相対性理論を使うことで理論的に導かれました。

というわけで、近日点を求めます。新しく

$$A = \frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{H^2}$$
$$\epsilon = 3mA \simeq 3\frac{\kappa^2 M^2}{c^2 H^2} \quad (m = \frac{\kappa M}{c^2})$$

とします。 ϵ は c^2 が分母にいることから微小とします。そうすると、相対論的な式は

$$u'' + u = A + \frac{\epsilon}{A}u^2$$

この解を摂動計算から求めます。なので、この式を非相対論的な式に第二項が摂動として加わっていると考えます。そして、この解を

$$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \epsilon v(\varphi) + O(\epsilon^2)$$

と仮定します。これは摂動のない $u'' + u = A$ の解 $u_0(\varphi)$ に摂動項の影響がついているとした形です。このときの、 $v(\varphi)$ を求めます。

これを元の式に入れて、 ϵ は微小なので ϵ^2 の部分は無視して

$$u_0'' + \epsilon v'' + u_0 + \epsilon v = A + \frac{\epsilon}{A}u_0^2 \tag{4}$$

ϵ を含まない項は

$$u_0'' + u_0 = A$$

となり、非相対論的な式の形です。これは摂動計算での最低次では摂動がない式になるというだけです。この非同次の2階微分方程式は単振動とかで出てくるもので、解は B, α を定数として

$$u_0 = A + B \cos(\varphi + \alpha)$$

と出来ます。 A は特解で、 $B \cos(\varphi + \alpha)$ は同次での一般解ですが、 α は $\alpha = 0$ として無視します。これは楕円を描きます。この結果に ϵ の1次によるものが、相対論的な効果として加わります。

(4) で ϵ の1次を含む項は、 u_0 によって

$$\begin{aligned} v'' + v &= \frac{u_0^2}{A} \\ &= A + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{A} \cos^2 \varphi \\ &= A + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{A} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\varphi)}{2} \right) \\ &= \left(A + \frac{B^2}{2A} \right) + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{2A} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

この式も非同次形になっているので、特解と同次での一般解が必要です。同次 (右辺が0) での解はすぐに $B \cos \varphi$ と分かるので、 v の特解を求めます。

左辺は線形なので特解 v_p は

$$v_p = v_1 + v_2 + v_3$$

と分解できるとして

$$v_1'' + v_2'' + v_3'' + v_1 + v_2 + v_3 = \left(A + \frac{B^2}{2A} \right) + 2B \cos \varphi + \frac{B^2}{2A} \cos 2\varphi$$

そして、 v_1, v_2, v_3 の式が右辺の各項に対応しているとして

$$v_1'' + v_1 = \left(A + \frac{B^2}{2A} \right), \quad v_2'' + v_2 = 2B \cos \varphi, \quad v_3'' + v_3 = \frac{B^2}{2A} \cos 2\varphi$$

とします。これで、それぞれが解を持てば、それらの和が特解になります。

v_1 の特解は右辺の形をみてわかるように単純に

$$v_1 = A + \frac{B^2}{2A}$$

となります。 v_2 では右辺は三角関数なので、

$$v_2 = B\varphi(a \sin \varphi + b \cos \varphi)$$

と仮定すれば

$$B(a \cos \varphi - b \sin \varphi) + B\varphi(-a \sin \varphi - b \cos \varphi) + B(a \cos \varphi - b \sin \varphi) + B\varphi(a \sin \varphi + b \cos \varphi) = 2B \cos \varphi$$

から、 $a = 1$ と分かるので

$$v_2 = B\varphi \sin \varphi$$

これが v_2 での特解です。同様に v_3 でも行えば

$$v_3 = -\frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi$$

というわけで、特解はこれらを足し合わせて

$$v_p = A + \frac{B^2}{2A} + B\varphi \sin \varphi - \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi$$

となります。 v には $B \cos \varphi$ も含まれますが、 $u_0 = B \cos \varphi$ なので、 $u = u_0 + \epsilon v$ に $\epsilon B \cos \varphi$ がいても新しい寄与にならないので無視します。

よって、 u は

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \epsilon v \\ &= A + B \cos \varphi + \epsilon \left(A + \frac{B^2}{2A} + B\varphi \sin \varphi - \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi \right) \\ &= A + \epsilon A + \epsilon \frac{B^2}{2A} + B \cos \varphi - \epsilon \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi + \epsilon B\varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

これが相対論的な寄与を加えた惑星の軌道の式です。最後の $\epsilon B\varphi \sin \varphi$ という項は $\cos \varphi$ のような周期的な関数になっていません。なので、この項が軌道に影響を与えていると考えられます。

式を変形させてどんな影響なのか見やすくします。加法定理から

$$\cos(\varphi - \epsilon\varphi) = \cos \varphi \cos \epsilon\varphi + \sin \varphi \sin \epsilon\varphi \simeq \cos \varphi + \epsilon\varphi \sin \varphi$$

とすれば

$$u = A + B \cos(\varphi - \epsilon\varphi) + \epsilon \left(A + \frac{B^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos 2\varphi \right)$$

楕円の軌道は $A + B \cos \varphi$ で描かれますが、 $\epsilon\varphi$ が \cos の中に紛れ込んでいます。第三項は周期的な項なので今は無視して

$$u = A + B \cos(\varphi - \epsilon\varphi)$$

とします。 $\cos(\varphi - \epsilon\varphi)$ は φ の値が小さいなら周期的な振る舞いますが、大きければ周期的な関数ではなくなります。 φ は 2π を超えて大きな値をとっても問題ないです。

近日点を求めます。惑星の近日点は r が最小になるときで、それは逆に言えば $1/r$ が最大のときです。なので、 u が最大となる \cos 部分が 1 のときが対応するので、 n を整数として

$$\cos(\phi(1 - \epsilon)) = 1 \Rightarrow \phi(1 - \epsilon) = 2\pi n$$

となるのが近日点です。これを近似的に

$$\phi = \frac{2\pi n}{1 - \epsilon} \simeq 2\pi n(1 + \epsilon)$$

とすることで、近日点は

$$\Delta\phi = 2\pi(1 + \epsilon)$$

の周期でめぐってくることになります。そうすると、近日点の公転毎のズレ (2π からのズレ) $\delta\phi$ は

$$\delta\phi = 2\pi\epsilon = 2\pi\left(3\frac{\kappa^2 M^2}{c^2 H^2}\right)$$

で与えることができます。

水星の場合周期は約 0.24 年で、通常近日点のズレは秒角で表します (ラジアンから秒角への変換は $\frac{180}{\pi} \times 3600$ で与えられます)。 M として太陽の質量を使い、後は水星の距離やら軌道速度やらを適当に入れてやれば求まります。そうすると大体 $43''/\text{century}$ 前後の値を得ることができます。これがニュートンの理論では求められなかった近日点のズレの残りの値に相当していて、観測値も 43.11 ± 0.4 程度になっています。他にも地球とかでの近日点のズレも計算でき、それらも観測結果に近い値が導出されます。

観測結果と一致しましたが、これだけで全てうまくいっているかまだは分かりません。例えば、本当に相対論の効果のみで近日点のズレの残りの値が説明されるのかという疑問は残っています。

このことに関連して、近日点のズレに対しては他の側面によって説明できると主張したものもあります。有名なのは、このズレは太陽の形が楕円になっているために起こっているとしたディッケ (Dicke) による主張があります。このことに少し触れておきます。あまり細かいことには触れず概略的に話します。

太陽が楕円であることは球的な重力ポテンシャルに新しい項が加わって

$$f(r) = -\frac{\kappa M}{r} - \frac{D}{r^3} + O(r^4)$$

このように書くことができます。 D は、どれだけ球から変形しているのかを表すものです。なので、 D は観測結果に依存します。この形を実際に求めるには、第二種ルジャンドル関数が出てきたりしてやっかいなのでとばします。後はこれを非相対論的な式

$$u'' + u = \frac{\kappa M}{H^2}$$

に入れてやればよくて、この式はポテンシャルで書けば

$$u'' + u = \frac{1}{H^2} \frac{f'}{u^2}$$

のようになっているので

$$\begin{aligned}
u'' + u &= \frac{1}{H^2 u^2} (\kappa M u^2 + 3B u^4) \\
&= \frac{1}{H^2} (\kappa M + 3B u^2)
\end{aligned}$$

これに前に定義した A と、新しく ϵ を

$$\epsilon = \frac{3\kappa M}{H^4} D$$

と定義して、入れれば

$$u'' + u = A + \frac{\epsilon}{A} u^2$$

これは相対論の式と同じ形になります。なので、さきほど求められた結果の ϵ を今の場合に変えれば $\delta\phi$ が分かって

$$\delta\phi = 2\pi\epsilon = 2\pi \frac{3\kappa M}{H^4} D$$

となります。これを公転周期 T を使って表すと

$$S = \left(\frac{3\kappa M D}{(2\pi)^3} C^{\frac{3}{2}} \right) r^{-\frac{7}{2}} \quad \left(C = \frac{T^2}{r^3} \right)$$

のように出来て、これが太陽の形が楕円とした場合の摂動になります。これで近日点のズレが説明できれば相対論は必要とされません。

これと同様の変形を相対論の結果に対しても行うと

$$S' = \frac{3\kappa^2 M^2}{2\pi c^2} C^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{5}{2}}$$

というのが求まります。係数の違いは置いとくとしても、距離 r が $r^{-\frac{5}{2}}$ 、 $r^{-\frac{7}{2}}$ と違っているために、相対論からの寄与と太陽が楕円であることからの寄与は違うものとして扱う必要があります。

r の依存性が違うので、近日点のズレは2つの影響が重なっていると考えて

$$S = \frac{3\kappa^2 M^2}{2\pi c^2} C^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{5}{2}} + \left(\frac{3\kappa M D}{(2\pi)^3} C^{\frac{3}{2}} \right) r^{-\frac{7}{2}}$$

のように両方の効果を足し合わせたものかもしれないことになります。理論的にはこうして相対論とは別の効果が加わっている場合も考えられます。また、相対論を必要とせず他のいろいろな効果だけで説明できてしまう場合もあるみたいです。しかし、実際にどうなっているかは不明です。

最後に、 l がエネルギーになることを見ておきます。まず、解析力学の視点から見てみます。今はラグランジアンが分かっているので、正準変数を q とし、その正準共役な運動量を p とすれば

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

として、 p が求まります。

今は正準共役量を持つ変数は t, r, θ, φ の 4 つがあり、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (c\dot{t})^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right]$$

と与えられます。後で余計な係数が出てこないように 2 で割っています。これから正準共役量を全部求めると

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}, \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

正準共役な運動量 p_t は時間と関係しているので、エネルギーに対応することが予想できます。そして、 p_t は $l = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}$ を含んでいます。

さらに、ハミルトニアンも求めてみると

$$H = p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = 2L - L = L$$

となり、ハミルトニアンとラグランジアンが一致しているために、ポテンシャルがないことを示しています (ハミルトニアンが運動エネルギー T とポテンシャル U によって $T + U$ 、ラグランジアンが $T - U$)。しかし、ポテンシャルと解釈できる項は出てきます。

(2) は

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) &= c^2 l^2 - \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ c^2 l^2 &= \dot{r}^2 + \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができます。右辺第一項は位置の微分の二乗であるために運動エネルギー項と解釈できます。そして、左辺がエネルギーであるなら、右辺第二項はポテンシャルと解釈できます。

より具体的に見ていきます。ミンコフスキー空間と見なせるほどに r が十分大きいとすれば (重力源から物体が遠く離れている)、(2) は

$$c^2 l^2 - 1 = \dot{r}^2$$

と近似できます。また、 $l = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}$ から、 \dot{r} は

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dr}{dt} l \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

なので、 $v = dr/dt$ として

$$\frac{dr}{ds} \simeq vl$$

そうすると、

$$c^2 l^2 - 1 = v^2 l^2$$
$$cl = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma$$

l は正にとっています。 γ はローレンツ因子です。今はミンコフスキー空間になっているので、静止質量を μ とすれば特殊相対論からエネルギー E は

$$E = \mu c^2 \gamma$$

で与えられます。よって、 l は

$$cl = \frac{E}{\mu c^2} \quad (6)$$

として、エネルギー E と関係します。そして、 l が保存量なのは示せているので、エネルギーとして扱えます。これが、 l がエネルギー保存を表わしているという理由です。

ついでに、ミンコフスキー空間と見なせるほど r が大きいとき、力学での中心力によるエネルギーが出てくることも見ておきます。(5) と (6) から

$$\begin{aligned} \mu^2 \dot{r}^2 &= c^2 l^2 \mu^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{\hbar^2 \mu^2}{r^2} + \mu^2\right) \\ &= \frac{E^2}{c^4} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{\hbar^2 \mu^2}{r^2} + \mu^2\right) \\ &= \frac{E^2}{c^4} - \frac{V^2}{c^4} \end{aligned} \quad (7)$$

(5) でも触れたように、左辺を運動エネルギーと見れば、関数 V はシュバルツシルト空間での有効ポテンシャルと言えるものになります。有効ポテンシャルは、大雑把に言えば通常のポテンシャルに新しい効果をくっつけて修正したポテンシャルのことです。例えば、力学の中心力と言えば、重力ポテンシャルに遠心力の寄与をつけたものです。

ここでは、 $V > 0$ としていきます。 r が大きいとして V/c^2 を μ/r で展開します。 V/c^2 は

$$\begin{aligned}
\frac{V^2}{c^4} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{h^2\mu^2}{r^2} + \mu^2\right) \\
&= \mu^2 - \frac{2m\mu^2}{r} + \frac{h^2\mu^2}{r^2} - \frac{2mh^2\mu^2}{r^3} \\
&= \mu^2 - 2m\mu X + \left(h^2 - \frac{2mh^2}{r}\right)X^2 \quad \left(X = \frac{\mu}{r}\right) \\
\frac{V}{c^2} &= \left(\mu^2 - 2m\mu X + \left(h^2 - \frac{2mh^2}{r}\right)X^2\right)^{1/2} \\
&\simeq \left(\mu^2 - 2m\mu X + h^2 X^2\right)^{1/2} \\
&\simeq \mu \left(1 - 2\frac{m}{\mu}X + \frac{h^2}{\mu^2}X^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

ルート部分を $X = 0$ 周りで展開すれば

$$\begin{aligned}
\left(1 - 2\frac{m}{\mu}X + \frac{h^2}{\mu^2}X^2\right)^{1/2} &\simeq 1 + \frac{1}{2}\left(-2\frac{m}{\mu} + 2\frac{h^2}{\mu^2}X\right)\left(1 - 2\frac{m}{\mu}X + \frac{h^2}{\mu^2}X^2\right)^{-1/2}\Big|_{X=0}X \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\left(-2\frac{m}{\mu} + 2\frac{h^2}{\mu^2}X\right)^2\left(1 - 2\frac{m}{\mu}X + \frac{h^2}{\mu^2}X^2\right)^{-3/2} + \frac{h^2}{\mu^2}\left(1 - 2\frac{m}{\mu}X + \frac{h^2}{\mu^2}X^2\right)^{-1/2}\right)\Big|_{X=0}X^2 \\
&\quad + \dots \\
&\simeq 1 - \frac{m}{\mu}X - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\mu^2}X^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu^2}X^2
\end{aligned}$$

なので、

$$\frac{V}{c^2} \simeq \mu - mX + \frac{1}{2}\frac{h^2 - m^2}{\mu}X^2$$

h は r^2 に比例しているの、 m より十分大きいとして

$$\begin{aligned}
\frac{V}{c^2} &\simeq \mu - mX + \frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}X^2 \\
&= \mu - m\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\mu}{r}\right)^2 \\
&= \mu - \frac{\kappa M}{c^2}\frac{\mu}{r} + \frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{\mu}{r}\right)^2 \\
V &= \mu c^2 - \frac{\kappa M\mu}{r} + \frac{\mu^2 c^2 h^2}{2\mu r^2}
\end{aligned}$$

$c\mu h = c\mu r^2 d\varphi/ds$ は (3) から角運動量の定義そのものです。これによって、 V は r が大きいとき近似的に、静止質量 μ のエネルギー μc^2 に有効ポテンシャル V_{cl} を足した形として

$$V \simeq \mu c^2 + V_{cl}, \quad V_{cl} = -\frac{\kappa M \mu}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (L = c\mu h)$$

V_{cl} は力学の中心力の話で出てくる有効ポテンシャルと同じです。

(7) に今の結果を入れれば力学でのエネルギーが出てきます。 E を力学と対応させるために $E = \mu c^2 + E_{cl}$ ($E_{cl} \ll \mu c^2$) として

$$\begin{aligned} \mu^2 \dot{r}^2 &\simeq \frac{(\mu c^2 + E_{cl})^2}{c^4} - \frac{(\mu c^2 + V_{cl})^2}{c^4} \\ &= \frac{E_{cl}^2 - V_{cl}^2 + 2\mu c^2 E_{cl} - 2\mu c^2 V_{cl}}{c^4} \\ &\simeq \frac{2\mu E_{cl}}{c^2} - \frac{2\mu V_{cl}}{c^2} \end{aligned}$$

よって、 E_{cl} は

$$\begin{aligned} E_{cl} &\simeq \frac{1}{2} c^2 \mu \dot{r}^2 + V_{cl} \\ &= \frac{1}{2} c^2 \mu \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + V_{cl} \\ &\simeq \frac{1}{2} c^2 \mu \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 + V_{cl} \\ &= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{cl} \end{aligned}$$

というわけで、力学で出てくるエネルギーの式となります。このことから V は相対論的な有効ポテンシャルと考えられます。また、これから l をエネルギーとして扱えることもはっきりします。