ペンローズ過程

ブラックホールからエネルギーを取り出す過程であるペンローズ過程の話をします。
カー解での有効ポテンシャルを導出して、そこからエネルギーの関係を見ます。
また、カー・ニューマン解での場合も結果だけ載せています。

カー解での有効ポテンシャルを求めたいので、「近日点」でのように変分問題から始めます。なので、簡単にするために赤道軌道 $(\theta=\pi/2)$ のみにして、カー解での粒子の軌道を求めます。$\theta=\pi/2$ でカー解は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1-\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta})(cdt)^2 - \frac{\rho^2+a^2\cos^2\theta}{a^2+\rho^2-2m\rho}d\rho^2 - (\rho^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\
&\quad - ((a^2+\rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta})d\varphi^2 - 2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}cdtd\varphi \\
&= (1-\frac{2m}{\rho})(cdt)^2 - \frac{\rho^2}{a^2+\rho^2-2m\rho}d\rho^2 - ((a^2+\rho^2)+\frac{2ma^2}{\rho})d\varphi^2 - \frac{4ma}{\rho}cdtd\varphi \\
&= (1-\frac{2m}{\rho})(cdt)^2 - (1-\frac{2m}{\rho}+\frac{a^2}{\rho^2})^{-1}d\rho^2 - (\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))d\varphi^2 - \frac{4ma}{\rho}cdtd\varphi
\end{aligned}
$$

また、カー・ニューマン解なら

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (1-\frac{2mr-e^2}{r^2})(cdt)^2 - \frac{r^2}{r^2+a^2-2mr+e^2}dr^2 \\
&\quad - ((r^2+a^2)+\frac{(2mr-e^2)a^2}{r^2})d\varphi^2 - 2\frac{(2mr-e^2)a}{r^2}cdtd\varphi
\end{aligned}
$$

r と ρ は同じものです。
変分問題を考えます。今の場合では

$$
\delta\int[(1-\frac{2m}{\rho})(c\dot{t})^2 - (1-\frac{2m}{\rho}+\frac{a^2}{\rho^2})^{-1}\dot{\rho}^2 - [\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho})]\dot{\varphi}^2 - \frac{4ma}{\rho}c\dot{t}\dot{\varphi}]ds = 0
$$

オイラー・ラグランジュ方程式

$$
\frac{d}{ds}\frac{dF}{d\dot{x}^i} = \frac{dF}{dx^i}
$$

を使うことで、時間成分は

$$
\frac{d}{ds}(2(1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t} - \frac{4ma}{\rho}c\dot{\varphi}) = 0
$$

$$
(1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t} - \frac{2ma}{\rho}\dot{\varphi} = cl
$$

l は積分定数で、無限遠での μc^2 によって割られた粒子のエネルギーに対応します。φ 成分は

$$\frac{d}{ds}(-2(\rho^2+(a^2+\frac{2m}{\rho}))\dot\varphi-\frac{4ma}{\rho}c\dot t)=0$$

$$(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))\dot\varphi+\frac{2ma}{\rho}c\dot t=h$$

h は積分定数で角運動量に対応します。

よって、必要な方程式は

$$(1-\frac{2m}{\rho})c\dot t-\frac{2ma}{\rho}\dot\varphi=cl \tag{1a}$$

$$(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))\dot\varphi+\frac{2ma}{\rho}c\dot t=h \tag{1b}$$

$$1=(1-\frac{2m}{\rho})(c\dot t)^2-(1-\frac{2m}{\rho}+\frac{a^2}{\rho^2})^{-1}\dot\rho^2-(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))\dot\varphi^2-\frac{4ma}{\rho}c\dot t\dot\varphi \tag{1c}$$

これらは ρ が大きく、a,e が無視できるならシュバルツシルト解と同じです。

カー・ニューマン解では

$$(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2})c\dot t-a(\frac{2m}{\rho}-\frac{e^2}{r^2})\dot\varphi=cl$$

$$(r^2+a^2(1+\frac{2m}{r}-\frac{e^2}{r^2}))\dot\varphi+a(\frac{2m}{r}-\frac{e^2}{r^2})c\dot t=h$$

$$1=(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2})(c\dot t)^2-(1-\frac{2m}{r}+\frac{a^2}{r^2}+\frac{e^2}{r^2})^{-1}\dot r^2-(r^2+a^2(1+\frac{2m}{r}-\frac{e^2}{r^2}))\dot\varphi^2-a(\frac{2m}{r}-\frac{e^2}{r^2})c\dot t\dot\varphi$$

となっています。

(1a) から $\dot\varphi$ は

$$\dot\varphi=-\frac{\rho}{2ma}cl+\frac{\rho}{2ma}(1-\frac{2m}{\rho})c\dot t$$

(1b) から $c\dot t$ は

$$c\dot t=\frac{\rho}{2ma}h-\frac{\rho}{2ma}[\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho})]\dot\varphi$$

これらから

$$(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))(-\frac{cl\rho}{2ma}+(1-\frac{2m}{\rho})\frac{\rho}{2ma}c\dot t)+\frac{2ma}{\rho}c\dot t=h$$

$$cl((\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))+\frac{2ma}{\rho}h=(1-\frac{2m}{\rho})(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))c\dot t+(\frac{2ma}{\rho})^2c\dot t$$

$$=(a^2+\rho^2(1-\frac{2m}{\rho}))c\dot t$$

よって

$$Dc\dot{t}=cl((\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho}))+\frac{2ma}{\rho}h \quad (D=a^2+\rho^2(1-\frac{2m}{\rho}))$$

$\dot{\varphi}$ は (1a) から

$$(1-\frac{2m}{\rho})[\frac{\rho}{2ma}h-\frac{\rho}{2ma}[(\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho})]\dot{\varphi}]-\frac{2ma}{\rho}\dot{\varphi}=cl$$
$$(a^2+\rho^2(1-\frac{2m}{\rho}))\dot{\varphi}= -\frac{2ma}{\rho}cl+(1-\frac{2m}{\rho})h$$

なので

$$D\dot{\varphi}=-\frac{2ma}{\rho}cl+(1-\frac{2m}{\rho})h$$

$c\dot{t}$ と $\dot{\varphi}$ を (1c) に入れるときに

$$x=(1-\frac{2m}{\rho})\ ,\ y=\rho^2+a^2(1+\frac{2m}{\rho})\ ,\ z=\frac{2ma}{\rho}$$

とすれば

$$\frac{x(cly+hz)^2}{D^2}-\frac{\rho^2}{D}\dot{\rho^2}-\frac{y(-clz+hx)^2}{D^2}-\frac{2z(clx+hz)(-clz+hx)}{D^2}=1$$

これから、$\dot{\rho^2}$ は

$$\dot{\rho^2}=\frac{x(c^2l^2y^2+h^2z^2+2clhyz)}{\rho^2D}-\frac{y(c^2l^2z^2+h^2x^2-2clhxz)}{\rho^2D}$$
$$-\frac{2z(-c^2l^2yz+h^2xz-clhz^2+clhxy)}{\rho^2D}-\frac{D}{\rho^2}$$

μ^2 をかけて

$$\mu^2\dot{\rho^2}=\frac{(\mu^2c^2l^2xy^2+\mu^2h^2xz^2+2\mu^2clhxyz)}{\rho^2D}-\frac{(\mu^2c^2l^2yz^2+\mu^2h^2x^2y-2\mu^2clhxyz)}{\rho^2D}$$
$$-\frac{2(-\mu^2c^2l^2yz^2+\mu^2h^2xz^2-\mu^2clhz^3+\mu^2clhxyz)}{\rho^2D}-\frac{D}{\rho^2}$$

エネルギー E と角運動量 L として

$$E = \mu l c^3$$

$$L = \mu h c$$

$$EL = \mu^2 h l c^4$$

と定義すれば

$$\begin{aligned}
\mu^2 \dot{\rho}^2 &= \frac{\mu^2 l^2 c^6 (xy^2 + yz^2)}{c^4 \rho^2 D} + \frac{\mu^2 h^2 c^2 (-xz^2 - x^2 y)}{c^2 \rho^2 D} + \frac{\mu^2 h l c^4 (2xyz + 2z^3)}{c^3 \rho^2 D} - \frac{\mu^2 D}{\rho^2} \\
&= \frac{E^2 y (xy + z^2)}{c^4 \rho^2 D} - \frac{L^2 x (z^2 + xy)}{c^2 \rho^2 D} + \frac{2ELz(xy - z^2)}{c^3 \rho^2 D} - \frac{\mu^2 D}{\rho^2} \\
&= \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{E^2 [\rho^3 + a^2(\rho + 2m)]}{c^4} + \frac{L^2 (2m - \rho)}{c^2} + \frac{4maEL}{c^3} - \mu^2 \rho^2 (\rho - 2m) - a^2 \rho \mu^2 \right)
\end{aligned}$$

この式はシュバルツシルト解での有効ポテンシャルを一般化したものになり、$a = 0$ で一致します (「近日点」参照)。

今は EL という混ざった項が生じているために、2 つの有効ポテンシャル $V_\pm$ を定義でき

$$\mu^2 \dot{\rho}^2 = \frac{1}{c^4} (E - V_+)(E - V_-)$$

転回点 $\dot{\rho} = 0$ で $V = E$ となるので、$V_\pm$ は

$$\frac{\rho^3 + a^2(\rho + 2m)}{c^4} E^2 + \frac{4maL}{c^3} E + \frac{L^2 (2m - \rho)}{c^2} - \mu^2 \rho^2 (\rho - 2m) - a^2 \rho \mu^2 = 0$$

から

$$V_\pm = \frac{-2maLc \pm [(2maLc)^2 - (\rho^3 + a^2(\rho + 2m))(c^2 L^2 (2m - \rho) - c^4 \mu^2 \rho^2 (\rho - 2m) - c^4 a^2 \rho \mu^2)]^{1/2}}{\rho^3 + a^2(\rho + 2m)}$$

分子は

$$\begin{aligned}
&-2maLc \pm \left[(2maLc)^2 - (\rho^3 + a^2(\rho + 2m))(c^2 L^2 (2m - \rho) - c^4 \mu^2 \rho (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)) \right]^{1/2} \\
=& -2maLc \pm \Big[(2maLc)^2 - c^2 L^2 (-\rho^4 - a^2 \rho^2 + 4m^2 a^2 + 2m\rho^3) \\
&\quad + c^4 \mu^2 \rho (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)(\rho^3 + a^2(\rho + 2m)) \Big]^{1/2} \\
=& -2maLc \pm [c^2 L^2 \rho^2 (\rho^2 + a^2 - 2m\rho) - c^4 \mu^2 \rho (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)(\rho^3 + a^2(\rho + 2m))]^{1/2} \\
=& -2maLc \pm [(\rho^2 + a^2 - 2m\rho)]^{1/2} [c^2 L^2 \rho^2 + c^4 \mu^2 \rho (\rho^3 + a^2 \rho + 2ma^2)]^{1/2}
\end{aligned}$$

となるので

$$V_\pm = \frac{-2maLc \pm [\rho^2 + a^2 - 2m\rho]^{1/2} [c^2 L^2 \rho^2 + c^4 \mu^2 \rho (\rho^3 + a^2 \rho + 2ma^2)]^{1/2}}{\rho^3 + a^2(\rho + 2m)} \tag{2}$$

これがカー解での有効ポテンシャルです。ρ が大きいとすれば

$$V_\pm \Rightarrow \frac{\pm\rho[c^2L^2\rho^2 + c^4\mu^2\rho^4]^{1/2}}{\rho^3} \Rightarrow \pm\mu c^2$$

となるので、力学の結果を一般化したものと考えられます。また、$a = 0$ として符号を $+$ に選べば

$$\begin{aligned}
V_+ &= \frac{[\rho^2 - 2m\rho]^{1/2}[c^2L^2\rho^2 + c^4\mu^2\rho^4]^{1/2}}{\rho^3} \\
&= \sqrt{\frac{(\rho^2 - 2m\rho)(c^2L^2\rho^2 + c^4\mu^2\rho^4)}{\rho^2\rho^4}} \\
&= \sqrt{(1 - \frac{2m}{\rho})(\frac{c^2L^2}{\rho^2} + c^4\mu^2)} \\
&= c^2\sqrt{(1 - \frac{2m}{\rho})(\frac{\mu^2h^2}{\rho^2} + \mu^2)}
\end{aligned}$$

となるので、シュバルツシルトの場合と一致します。

カー・ニューマン解での友好ポテンシャルはなんとなく予想できるように

$$V_\pm = \frac{-aLc(2m - \frac{e^2}{r}) \pm [(r^2 + a^2 - 2mr + e^2)]^{1/2}[c^2L^2r^2 + c^4\mu^2r(r^3 + a^2(r + 2m - \frac{e^2}{r})]^{1/2}}{r^3 + a^2(r + 2m - \frac{e^2}{r})}$$

$e = 0$ でカー時空と一致します。

カー空間での有効ポテンシャルが求まったところで、ペンローズ過程の話に移ります。シュバルツシルト解での有効ポテンシャルは $r > 2m$ で正になりますが、カー解ではそうなっていないことがペンローズ過程への発想につながります。

ブラックホール半径となる $\rho^2 + a^2 - 2m\rho = 0$ での V_+ は

$$V_+ = \frac{-2maLc}{\rho^3 + a^2(\rho + 2m)}$$

これは a, L が同じ符号であればマイナスになります。そして、a はブラックホールの角運動量 J とは逆向きなので、マイナスになるのは物体の角運動量 L が J と反対になる時です。つまり、ブラックホールと逆向きに回転する粒子に対してマイナスのエネルギーを許します。マイナスのエネルギーが許されることから特殊な性質を考えることができます。

例えば、始めに E_1 というエネルギーを持っている粒子が二つに分離し、E_2, E_3 となったとします。エネルギー保存則より $E_1 = E_2 + E_3$ が成り立つので、もし E_2 がマイナスであれば E_3 は E_1 よりも大きくなります。つまり、このことを利用すればブラックホールからエネルギーを取り出せます。また、取り出すエネルギーはブラックホールの回転エネルギーなので、エネルギーを取り出しきったとすればブラックホールの回転はなくなります。この回転ブラックホールからエネルギーを取り出す過程をペンローズ (Penrose) 過程と呼びます。現実にエネルギーを取り出そうとすると問題がありますが、取り出す方法はいろいろと考えられており実際に取り出すのは可能なようです。

ペンロース過程がどの領域で起こるのか見ます。(2) で、μ を 0 とし光子とすれば

$$V_+ = -2maLc + \sqrt{(\rho^2 + a^2 - 2m\rho)\rho^2 L^2 c^2}$$

V_+ がマイナスもしくは 0 になる範囲は

$$4m^2 a^2 L^2 \geq (\rho^2 + a^2 - 2m\rho)\rho^2 L^2$$

このとき、$V_+ = 0$、つまり最大の ρ は $\rho = 2m$ です。よって、光子に対してマイナスの全エネルギーとなることを許す範囲は $m + \sqrt{m^2 - a^2}$ と $2m$ の間です。このことは赤道軌道のみでなく一般化することができ、その時の領域は地平面 ρ_+ と無限赤方偏移面 $\rho_{+\infty}$ の間になります。つまり、エルゴ領域で起こる現象です (カー・ニューマン解でも同様)。

今度は、回転ブラックホールからどれだけのエネルギーを取り出せるのか求めます。ここで、ホーキング (Hawking) の表面積定理を持ち込みます。これは、ブラックホールの表面積は始状態よりも小さくならないというものです。この定理を使うためにはカーブラックホールの表面積を知らなくてはならないので、求めます。

表面積を求める式は、体積を求める式を変形させればいいだけで

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{-g}$$

空間成分のみになるので $\sqrt{-g} \to \sqrt{g}$ になり、g_{22}, g_{33} だけで行列式を作ります。そして、ブラックホールの表面は地平面のことなので、地平面の半径 ($\Delta = 0$) として行列式を求めれば

$$A_{Kerr} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta(\rho_+^2 + a^2)\sin\theta = 4\pi(\rho_+^2 + a^2) = 4\pi[(m + \sqrt{m^2 - a^2})^2 + a^2]$$

これがカーブラックホールの表面積です。そして、始状態のブラックホールは最大の角運動量を持っているとし、終状態としては回転の止まったシュバルツシルトブラックホールになると考えます。

なので、シュバルツシルトブラックホールの表面積も必要になりますが、カーブラックホールで $a = 0$ にしたものです。本当にそうなのか確かめたければカーの表面積と同じようにして求めてやればいいだけです。というわけで、シュバルツシルトブラックホールの表面積は

$$A_{Sch} = 16\pi m^2$$

となっています。

カー解では $\rho_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ のために、回転のパラメータは $|a| \leq m$ という制限を持つので、最大回転は $a = m$ です。よって、そのときの表面積は

$$A = 8\pi m^2$$

そうすると、ホーキングの表面積定理より

$$A_{final} \geq A_{initial}$$
$$16\pi m_f^2 \geq 8\pi m_i^2$$
$$m_f \geq \frac{1}{\sqrt{2}} m_i$$

この関係から、取り出せるエネルギーには上限があるのがわかり

$$\Delta E = m_i c^2 - m_f c^2 \leq m_i c^2 (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

よって、最大で最初のエネルギーの約 30 %のエネルギーを取り出せることがわかります。

同様にカー・ニューマン解でも求められます。表面積は

$$A_{KN} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta (\rho_+^2 + a^2) \sin\theta = 4\pi(\rho_+^2 + a^2) = 4\pi[(m + \sqrt{m^2 - a^2 - e^2})^2 + a^2]$$

これの回転最大での状態は $a^2 \leq m^2 - e^2$ より

$$A_{initial} = 4\pi(2m_i^2 - e^2)$$

今度は回転が止まればライスナー・ノルトシュトレームブラックホールになるので

$$A_{RN} = 4\pi(m + \sqrt{m^2 - e^2})^2$$

となります。これをホーキングの表面積定理にいれて

$$A_{final} \geq A_{initial}$$
$$(m_f + \sqrt{m_f^2 - e^2})^2 \geq 2m_i^2 - e^2$$
$$m_f^2 + m_f \sqrt{m_f^2 - e^2} \geq m_i^2$$
$$m_f^2 (m_f^2 - e^2) \geq m_i^4 + m_f^4 - 2m_i^2 m_f^2$$
$$m_f^2 \geq \frac{m_i^4}{2m_i^2 - e^2}$$
$$m_f \geq \frac{m_i}{\sqrt{2 - (\frac{e}{m_i})^2}}$$

よって、カー・ニューマンブラックホールでは

$$\Delta E = m_i c^2 - m_f c^2 \leq m_i c^2 (1 - \frac{1}{\sqrt{2 - (e/m_i)^2}})$$

となります。

カー解で回転が最大となるときを $\sqrt{m^2 - a^2}$ から $|a| \leq m$ としました。これはルート部分が虚数にならないようにするためです。しかし、虚数が許されるとしてみます。虚数になると、地平面は実数としては存在しない、つまり現実には存在しなくなります。この状況で何が起きてるのかを想像しやすく言えば、回転が速くなりすぎて地平面がなくなります。そして、地平面がなくなると、地平面の内側にあった特異点が剥き出しになります。

地平面に隠されない裸の特異点 (naked singularity) が現実に存在すると因果律を破ってしまうので物理としては困った状況になります。そのため、ペンローズは裸の特異点は存在しないとして宇宙検閲仮説 (Cosmic Censorship Conjecture) を考えました。これは、特異点は全て地平面の内側にあり裸の特異点は存在しないという仮定です。仮説と言っているように証明されていないものですが、因果律を守るためには有効な考えなので前提条件のように使われています。ただし、重力崩壊によってブラックホールができる過程において、先に裸の特異点が現れてからブラックホールになるという理論も存在しているので、宇宙検閲仮説は必要ないとする考えもあります。