スピン係数

ニューマン・ペンローズ技法で出てくるスピン係数を与えます。
ついでに、リーマンテンソル、ビアンキ恒等式に対する方程式を求め、最後に空間の分類において重要なゴールドバーグ・ザックスの定理を説明します。
全ての結果を書くのは面倒なので、一部しか書き出していません。全ての結果はS.chandrasekhar著の「The Mathematical Theory of Black Holes」や記号の定義が少し違いますが、E.T.Newman, R.Penrose, Math Phys.3,566-79なんかを見てください。
$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ でのヌルテトラッド系です。
ローマ文字と数字の添え字は特に断らない限りテトラッド成分とし、ギリシャ文字の添え字はテンソル成分とします。

「テトラッド」でのリッチ回転係数から、新しく

$$\kappa = \gamma_{311} \ , \ \pi = \gamma_{241} \ , \ \rho = \gamma_{314} \ , \ \sigma = \gamma_{313}$$

$$\mu = \gamma_{243} \ , \ \lambda = \gamma_{244} \ , \ \tau = \gamma_{312} \ , \ \nu = \gamma_{242}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) \ , \ \gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342})$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) \ , \ \beta = \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343})$$

このような記号を定義し、これらをスピン係数 (spin cofficients) と呼びます。スピン係数はそれぞれが $\boldsymbol{l} \leftrightarrow \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m} \leftrightarrow \overline{\boldsymbol{m}}$ の入れ替えに対して対応関係があるように作られていて、例えば

$$\kappa = \gamma_{311} \to \gamma_{422} \ \Leftrightarrow \ -\nu = -\gamma_{422}$$

$$\sigma = \gamma_{313} \to \gamma_{424} \ \Leftrightarrow \ -\lambda = -\gamma_{424}$$

このようになっています (リッチ回転係数は添え字の 1 番目と 2 番目の交換に対して反対称)。$\boldsymbol{l}$ は 1、$\boldsymbol{n}$ は 2、$\boldsymbol{m}$ は 3、$\overline{\boldsymbol{m}}$ は 4 に対応しています。全部書くと

$$\kappa \Leftrightarrow -\nu \ , \ \sigma \Leftrightarrow -\lambda \ , \ \pi \Leftrightarrow -\tau \ , \ \rho \Leftrightarrow -\mu \ , \ \epsilon \Leftrightarrow -\gamma \ , \ \alpha \Leftrightarrow -\beta$$

ヌルテトラッド $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ は基底であり、「ベクトル、1-形式、テンソル」で言ったように基底 (接ベクトル) は方向微分と同じ定義になっているので、微分演算子として

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}^2 = D \ , \ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}^1 = \Delta \ , \ \boldsymbol{m} = \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}^4 = \delta \ , \ \overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}^3 = \delta^*$$

というのも定義しておきます。作用としては、微分演算子と展開係数 $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ が出てくるので

$$D\varphi = \varphi_{|\mu} l^\mu = \varphi_{|1} \ , \ \Delta\varphi = \varphi_{|\mu} n^\mu = \varphi_{|2} \ , \ \delta\varphi = \varphi_{|\mu} m^\mu = \varphi_{|3} \ , \ \delta^*\varphi = \varphi_{|\mu} \overline{m}^\mu = \varphi_{|4}$$

となっています。

リーマンテンソルをリッチ回転係数で表すと、「テトラッド」で求めたように

$$
\begin{aligned}
R_{(a)(b)(c)(d)} = -\gamma_{(a)(b)(c)|(d)} + \gamma_{(a)(b)(d)|(c)} + \gamma_{(b)(a)(f)}(\gamma_{(c)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}{}^{(f)}{}_{(c)}) \\
+ \gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(c)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

これの、例えば R_{1313} 成分とすれば

$$
\begin{aligned}
R_{1313} =& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} + \gamma_{31(f)}(\gamma_1{}^{(f)}{}_3 - \gamma_3{}^{(f)}{}_1) + \gamma_{(f)11}\gamma_3{}^{(f)}{}_3 - \gamma_{(f)13}\gamma_3{}^{(f)}{}_1 \\
=& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} + \gamma_{311}(-\gamma_3{}^1{}_1) + \gamma_{312}(\gamma_1{}^2{}_3 - \gamma_3{}^2{}_1) + \gamma_{313}(\gamma_1{}^3{}_3) + \gamma_{314}(\gamma_1{}^4{}_3 - \gamma_3{}^4{}_1) \\
& + \gamma_{211}\gamma_3{}^2{}_3 + \gamma_{311}\gamma_3{}^3{}_3 + \gamma_{411}\gamma_3{}^4{}_3 - \gamma_{213}\gamma_3{}^2{}_1 - \gamma_{313}\gamma_3{}^3{}_1 - \gamma_{413}\gamma_3{}^4{}_1 \\
=& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} + \gamma_{311}\eta^{12}(-\gamma_{321}) + \gamma_{312}(\eta^{12}\gamma_{113} - \eta^{12}\gamma_{311}) + \gamma_{313}(\eta^{34}\gamma_{143}) + \gamma_{314}(\eta^{34}\gamma_{133} - \eta^{34}\gamma_{331}) \\
& + \gamma_{211}\eta^{12}\gamma_{313} + \gamma_{311}\eta^{34}\gamma_{343} + \gamma_{411}\eta^{34}\gamma_{333} \\
& - \gamma_{213}\eta^{12}\gamma_{311} - \gamma_{313}\eta^{34}\gamma_{341} - \gamma_{413}\eta^{34}\gamma_{331} \\
=& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} - \gamma_{311}\gamma_{321} - \gamma_{312}\gamma_{311} - \gamma_{313}\gamma_{143} - \gamma_{314}\gamma_{133} \\
& + \gamma_{211}\gamma_{313} - \gamma_{311}\gamma_{343} - \gamma_{213}\gamma_{311} + \gamma_{313}\gamma_{341} \\
=& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} - \gamma_{311}(\gamma_{321} + \gamma_{312} + \gamma_{343} + \gamma_{213}) \\
& - \gamma_{313}(\gamma_{143} - \gamma_{314} - \gamma_{211} - \gamma_{341}) \\
=& -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} - \gamma_{131}(\gamma_{231} + \gamma_{132} + \gamma_{433} - \gamma_{213}) \\
& + \gamma_{133}(-\gamma_{413} + \gamma_{134} + \gamma_{121} + \gamma_{431})
\end{aligned}
$$

「ニューマン・ペンローズ技法」で示したように、ワイルテンソルが

$$
\begin{aligned}
C_{(a)(b)(c)(d)} = R_{(a)(b)(c)(d)} - \frac{1}{2}(\eta_{(a)(c)}R_{(b)(d)} - \eta_{(b)(c)}R_{(a)(d)} + \eta_{(b)(d)}R_{(a)(c)}) \\
+ \frac{1}{6}(\eta_{(a)(c)}\eta_{(b)(d)} - \eta_{(a)(d)}\eta_{(b)(c)})R
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となっているので、η_{ab} の対角成分は 0、$\eta_{13} = \eta_{31} = 0$ から

$$
\begin{aligned}
C_{1313} &= R_{1313} - \frac{1}{2}(\eta_{11}R_{33} - \eta_{31}R_{13} + \eta_{33}R_{11}) + \frac{1}{6}(\eta_{11}\eta_{33} - \eta_{13}\eta_{31})R \\
&= R_{1313}
\end{aligned}
$$

なので、ワイルスカラーで表せば

$$R_{1313} = C_{1313} = -\Psi_0$$

そして、これらはスピン係数と方向微分を用いることで

$$\begin{aligned}
-\Psi_0 = & -\gamma_{131|3} + \gamma_{133|1} - \gamma_{131}(\gamma_{231} + \gamma_{132} + \gamma_{433} - \gamma_{213}) \\
& + \gamma_{133}(-\gamma_{413} + \gamma_{134} + \gamma_{121} + \gamma_{431}) \\
= & -\delta\gamma_{131} + D\gamma_{133} - \gamma_{131}(\gamma_{231} + \gamma_{132} + \gamma_{433} - \gamma_{213}) + \gamma_{133}(-\gamma_{413} + \gamma_{134} + \gamma_{121} + \gamma_{431}) \\
= & \, \delta\kappa - D\sigma - \gamma_{131}\big(\gamma_{231} + \gamma_{132} + \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344})^* - \frac{3}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343})\big) \\
& + \gamma_{133}\big(-\gamma_{413} + \gamma_{134} - \frac{3}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) + \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341})^*\big) \\
= & \, \delta\kappa - D\sigma + \kappa(\pi^* - \tau + \alpha^* - 3\beta) - \sigma(-\rho^* - \rho - 3\epsilon + \epsilon^*)
\end{aligned}$$

なので

$$D\sigma - \delta\kappa = \kappa(\pi^* - \tau + \alpha^* - 3\beta) + \sigma(3\epsilon - \epsilon^* + \rho + \rho^*) + \Psi_0$$

このように R_{1313} に対応するものが求まります。

リーマンテンソル (1) は回転係数の対称性を考えて数えれば 36 個 (左辺のリーマンテンソルの添え字に合わせて数えれば $(4 \times 3 \div 2 \times 4 \times 3) \div 2 = 36$) の方程式を持ちますが、今の場合複素共役のおかげで 18 個の方程式を求めてしまえばいいです。その 18 個の方程式を求めるときに、ワイルスカラーとは別に

$$\begin{aligned}
&\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11}\ ,\ \Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}\ ,\ \Phi_{11} = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}),\ \Lambda = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}) = \frac{1}{24}R \\
&\Phi_{02} = -\frac{1}{2}R_{33}\ ,\ \Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}\ ,\ \Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}\ ,\ \Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14} \\
&\Phi_{12} = -\frac{1}{2}R_{23}\ ,\ \Phi_{21} = -\frac{1}{2}R_{24}
\end{aligned}$$

というのを定義しておきます。一番上の 4 個が実スカラー、下の 6 個は各々が複素共役で繋がっている ($\Phi_{01} = \Phi_{10}^*$ 等) ので 3 個の複素スカラーです。複素共役で繋がっているのは添え字の $3, 4$ は $m, \overline{m}$ によるものなので、複素共役で 3 と 4 が入れ替わるからです。Λ がリッチスカラーになるのは

$$\begin{aligned}
R &= \eta^{ab}R_{ab} = \eta^{12}R_{12} + \eta^{21}R_{21} + \eta^{34}R_{34} + \eta^{43}R_{43} \\
&= 2R_{12} - 2R_{34}
\end{aligned}$$

となっているからです。

必要になる (2) からのリーマンテンソルとワイルテンソルの関係を結果だけ全部示すと

$$R_{1212} = C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R\ ,\ R_{1324} = C_{1324} + \frac{1}{12}R$$

$$R_{1234} = C_{1234}\ ,\ R_{3434} = C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R$$

$$R_{1313} = C_{1313}\ ,\ R_{2323} = C_{2323}\ ,\ R_{1314} = \frac{1}{2}R_{11}$$

$$R_{2324} = \frac{1}{2}R_{22}\ ,\ R_{3132} = -\frac{1}{2}R_{33}$$

$$R_{1213} = C_{1213} + \frac{1}{2}R_{13}\ ,\ R_{1334} = C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}$$

$$R_{1223} = C_{1223} - \frac{1}{2}R_{23}\ ,\ R_{2334} = C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23}$$

ここからリッチ回転係数によるリーマンテンソルを、ここで定義した記号に書きなおします。例えば R_{2431} では

$$
\begin{aligned}
R_{2431} &= C_{2431} - \frac{1}{12}R \\
&= -\gamma_{243|1} + \gamma_{241|3} + \gamma_{42f}(\gamma_3{}^f{}_1 - \gamma_1{}^f{}_3) + \gamma_{f23}\gamma_4{}^f{}_1 - \gamma_{f21}\gamma_4{}^f{}_3 \\
&= -\gamma_{243|1} + \gamma_{241|3} \\
&\quad + \gamma_{421}(\gamma_3{}^1{}_1 - \gamma_1{}^1{}_3) + \gamma_{422}(\gamma_3{}^2{}_1 - \gamma_1{}^2{}_3) + \gamma_{423}(\gamma_3{}^3{}_1 - \gamma_1{}^3{}_3) + \gamma_{424}(\gamma_3{}^4{}_1 - \gamma_1{}^4{}_3) \\
&\quad + \gamma_{123}\gamma_4{}^1{}_1 + \gamma_{223}\gamma_4{}^2{}_1 + \gamma_{323}\gamma_4{}^3{}_1 + \gamma_{423}\gamma_4{}^4{}_1 \\
&\quad - \gamma_{121}\gamma_4{}^1{}_3 - \gamma_{221}\gamma_4{}^2{}_3 - \gamma_{321}\gamma_4{}^3{}_3 - \gamma_{421}\gamma_4{}^4{}_3 \\
&= -\gamma_{243|1} + \gamma_{241|3} \\
&\quad + \gamma_{421}(\eta^{12}\gamma_{321} - \eta^{12}\gamma_{123}) + \gamma_{422}(\eta^{12}\gamma_{311} - \eta^{12}\gamma_{113}) \\
&\quad + \gamma_{423}(\eta^{34}\gamma_{341} - \eta^{34}\gamma_{143}) + \gamma_{424}(\eta^{34}\gamma_{331} - \eta^{34}\gamma_{133}) \\
&\quad + \gamma_{123}\eta^{12}\gamma_{421} + \gamma_{223}\eta^{12}\gamma_{411} + \gamma_{323}\eta^{34}\gamma_{441} + \gamma_{423}\eta^{34}\gamma_{431} \\
&\quad - \gamma_{121}\eta^{12}\gamma_{423} - \gamma_{221}\eta^{12}\gamma_{413} - \gamma_{321}\eta^{34}\gamma_{443} - \gamma_{421}\eta^{34}\gamma_{433} \\
&= -\gamma_{243|1} + \gamma_{241|3} \\
&\quad + \gamma_{421}(\gamma_{321} - \gamma_{123}) + \gamma_{422}\gamma_{311} + \gamma_{423}(-\gamma_{341} + \gamma_{143}) + \gamma_{424}\gamma_{133} \\
&\quad + \gamma_{123}\gamma_{421} - \gamma_{423}\gamma_{431} - \gamma_{121}\gamma_{423} + \gamma_{421}\gamma_{433} \\
&= -\gamma_{243|1} + \gamma_{241|3} \\
&\quad + \gamma_{421}(\gamma_{321} - \gamma_{123} + \gamma_{123} + \gamma_{433}) - \gamma_{423}\gamma_{341} + \gamma_{423}\gamma_{143} - \gamma_{423}\gamma_{431} \\
&\quad + \gamma_{424}\gamma_{133} - \gamma_{121}\gamma_{423} + \gamma_{123}\gamma_{421} + \gamma_{422}\gamma_{311} \\
&= -D\mu + \delta\pi - \pi(-\pi^* + \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344})^* - \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}) - \mu\rho^* \\
&\quad + \lambda\sigma - \nu\kappa + \mu\gamma_{341} + \mu\gamma_{431} + \mu\gamma_{121} \\
&= -D\mu + \delta\pi - \pi(-\pi^* + \alpha^* - \beta) + \mu\gamma_{121} + \mu\rho^* + \lambda\sigma - \nu\kappa \\
&= -D\mu + \delta\pi - \pi(-\pi^* + \alpha^* - \beta) - \mu\frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341} + (\gamma_{211} + \gamma_{341})^*) + \mu\rho^* + \lambda\sigma - \nu\kappa \\
&= -D\mu + \delta\pi + \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) - \mu(\epsilon + \epsilon^*) + \mu\rho^* + \lambda\sigma - \nu\kappa
\end{aligned}
$$

そして、ワイルテンソルとリッチスカラーを複素スカラーに変えることで

$$R_{2431} = C_{2431} - \frac{1}{12}R = -\Psi_2 - 2\Lambda$$

なので、R_{2431} の式は

$$-\Psi_2 - 2\Lambda = -D\mu + \delta\pi + \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) - \mu(\epsilon + \epsilon^*) + \mu\rho^* + \lambda\sigma - \nu\kappa$$

$$D\mu - \delta\pi = \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) - \mu(\epsilon + \epsilon^*) + \mu\rho^* + \lambda\sigma - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda$$

となります。面倒なので他のは結果も書きませんが、リーマンテンソルを決めるために必要な 18 個のリーマンテンソルの成分は

$$\begin{aligned}
&R_{1314}\ ,\ R_{1313}\ ,\ R_{1312}\ ,\ \frac{1}{2}(R_{3414} - R_{1214})\ ,\ \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{3413}) \\
&\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})\ ,\ R_{2441}\ ,\ R_{2431}\ ,\ R_{2421}\ ,\ R_{2442}\ ,\ R_{3143} \\
&\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434})\ ,\ R_{2443}\ ,\ R_{2423}\ ,\ \frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432}) \\
&R_{1332}\ ,\ R_{1324}\ ,\ \frac{1}{2}(R_{1242} - R_{3442})
\end{aligned} \tag{3}$$

となっています。これらの結果は、例えば R_{1314} は Φ_{00} を含みますが、R_{1314} の複素共役をとると Φ_{00} は実スカラーであるために変化しないので、$R_{1314} - (R_{1314})^*$ で Φ_{00} を消してスピン係数のみの式にできます。このようにして導かれるものを eliminant relation と呼び、スピン係数のみの 10 個の方程式を取り出すことが出来ます。具体的な形を書くのは面倒なので省略します。

次にビアンキ恒等式について見ていきます。ビアンキ恒等式は「テトラッド」で書いたように

$$\begin{aligned}
R_{(a)(b)\{(c)(d);(f)\}} = \frac{1}{6}\sum_{\{(c)(d)(f)\}}\big(&R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} \\
&- \eta^{(n)(m)}(\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} + \gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} \\
&+ \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)})\big) = 0
\end{aligned}$$

添え字の { } は

$$R_{ab\{cd;e\}} = \frac{1}{3!}(R_{abcd;e} + R_{abec;d} + R_{abde;c})$$

のようにしていて、添え字が偶置換ならプラス、奇置換ならマイナスです。Σ の $\{(c)(d)(f)\}$ は、{ } の規則で $(c)(d)(f)$ を置換して足していけというの意味です。「;」は共変微分でなく

$$A_{(a);(b)} = e^{\nu}_{(a)}A_{\nu||\mu}e^{\mu}_{(b)}$$

と与えられる、$e_{(b)}$ 方向の intrinsic derivative です。ビアンキ恒等式は 20 個の独立な方程式を持ちますが、今の場合は複素共役がとれるので 8 個の複素数の方程式

$$R_{13\{13;4\}} = 0\ ,\ R_{13\{21;4\}} = 0\ ,\ R_{13\{13;2\}} = 0\ ,\ R_{13\{43;2\}} = 0 \tag{4a}$$

$$R_{42\{13;4\}} = 0\ ,\ R_{42\{21;4\}} = 0\ ,\ R_{42\{13;2\}} = 0\ ,\ R_{42\{43;2\}} = 0 \tag{4b}$$

によって 16 個の方程式となります。残りはビアンキの恒等式を縮約することで出せます。縮約から (係数は消してます)

$$\begin{aligned}
\eta^{bd}\eta^{ac}R_{ab\{cd;f\}} &= \eta^{bd}\eta^{ac}(R_{abcd;f} + R_{abfc;d} + R_{abdf;c}) \\
&= \eta^{bd}(R_{bd;f} - R_{bf;d} + R^{c}{}_{bdf;c}) \\
&= R_{;f} - R^{d}{}_{f;d} - R^{c}{}_{f;c} \\
&= R_{;f} - R^{c}{}_{f;c} - R^{c}{}_{f;c} \\
&= (\eta^{c}_{f}R - 2R^{c}{}_{f})_{;c} \\
&= \eta^{bc}(\eta_{bf}R - 2R_{bf})_{;c} = 0
\end{aligned}$$

これを見慣れた形に変形して

$$\eta^{bc}(R_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}R)_{;c} = 0$$

展開すると

$$\eta^{12}(R_{a1} - \frac{1}{2}\eta_{a1}R)_{;2} + \eta^{21}(R_{a2} - \frac{1}{2}\eta_{a2}R)_{;1} + \eta^{34}(R_{a3} - \frac{1}{2}\eta_{a3}R)_{;4} + \eta^{43}(R_{a4} - \frac{1}{2}\eta_{a4}R)_{;3} = 0$$

これの $a = 1, 2, 3, 4$ で残りの 4 つの方程式が作られます。$a = 1$ では

$$\begin{aligned}
R_{11;2} + (R_{12} - \frac{1}{2}R)_{;1} - R_{13;4} - R_{14;3} &= R_{11;2} + (R_{12} - R_{12} + R_{34})_{;1} - R_{13;4} - R_{14;3} \\
&= R_{11;2} + R_{34;1} - R_{13;4} - R_{14;3}
\end{aligned}$$

なので、同様にすることで $a = 2$ も求められて、$a = 1, 2$ で 2 つの実数の方程式

$$R_{11;2} + R_{34;1} - R_{13;4} - R_{14;3} = 0 \tag{4c}$$

$$R_{22;1} + R_{34;2} - R_{23;4} - R_{24;3} = 0 \tag{4d}$$

を作ります (実数といっているのは複素共役で式が変化しないからです)。同様にして $a = 3$ で複素数の方程式

$$R_{33;4} + R_{12;3} - R_{31;2} - R_{32;1} = 0 \tag{4e}$$

$a = 4$ はこれの複素共役の方程式です。

というわけで、これらが 20 個の方程式全てで、実質的に計算すべき方程式は (4a-4e) の 11 個です。このビアンキ恒等式をスピン係数を使って表現します。例として $R_{13[13;4]} = 0$ を使います。これは

$$R_{1313;4}+R_{1341;3}+R_{1334;1}=0$$

ワイルテンソルに書き直せば

$$R_{1313;4}+R_{1341;3}+R_{1334;1}=C_{1313;4}-\frac{1}{2}R_{11;3}+C_{1334;1}+\frac{1}{2}R_{13;1}$$

ワイルテンソルの intrinsic derivative($A_{(a);(b)}=A_{(a)|(b)}-\eta^{(n)(m)}\gamma_{(n)(a)(b)}A_{(m)}$ の成分が増えたもので、どうなるのか導きませんが実際に下で計算しているものを見れば法則性があることがわかります) を展開すると、$C_{1313;4}$ は

$$\begin{aligned}
C_{1313;4} &= C_{1313|4}-\eta^{nm}\gamma_{n14}C_{m313}-\eta^{nm}\gamma_{n34}C_{1m13}-\eta^{nm}\gamma_{n14}C_{13m3}-\eta^{nm}\gamma_{n34}C_{131m}\\
&= C_{1313|4}-\eta^{21}\gamma_{214}C_{1313}-\eta^{34}\gamma_{314}C_{4313}-\eta^{12}\gamma_{134}C_{1213}-\eta^{43}\gamma_{434}C_{1313}\\
&\quad -\eta^{21}\gamma_{214}C_{1313}-\eta^{34}\gamma_{314}C_{1343}-\eta^{12}\gamma_{134}C_{1312}-\eta^{43}\gamma_{434}C_{1313}\\
&= C_{1313|4}-2C_{1313}(\gamma_{214}-\gamma_{434})+2\gamma_{314}C_{4313}-2\gamma_{134}C_{1213}\\
&= C_{1313|4}-2C_{1313}(\gamma_{214}-\gamma_{434})+2\gamma_{314}(C_{4313}+C_{1213})\\
&= \ -\delta^{*}\Psi_0+4\Psi_0(\gamma_{214}+\gamma_{344})+2\rho(-C_{1231}+C_{1213})\\
&= \ -\delta^{*}\Psi_0+4\Psi_0\alpha-4\rho\Psi_1
\end{aligned}$$

$C_{1334;1}$ は

$$\begin{aligned}
C_{1334;1} &= C_{1334|1}-\eta^{nm}\gamma_{n11}C_{m334}-\eta^{nm}\gamma_{n31}C_{1m34}-\eta^{nm}\gamma_{n31}C_{13m4}-\eta^{nm}\gamma_{n41}C_{133m}\\
&= C_{1334|1}-\eta^{21}\gamma_{211}C_{1334}-\eta^{34}\gamma_{311}C_{4334}-\eta^{12}\gamma_{131}C_{1234}-\eta^{43}\gamma_{431}C_{1334}\\
&\quad -\eta^{12}\gamma_{131}C_{1324}-\eta^{21}\gamma_{231}C_{1314}-\eta^{43}\gamma_{431}C_{1334}\\
&\quad -\eta^{12}\gamma_{141}C_{1332}-\eta^{21}\gamma_{241}C_{1331}-\eta^{34}\gamma_{341}C_{1334}\\
&= C_{1334|1}-C_{1334}(\gamma_{211}-\gamma_{431}-\gamma_{431}-\gamma_{341})-\gamma_{131}(C_{1234}+C_{4334})\\
&\quad -\gamma_{131}C_{1324}-\gamma_{231}C_{1314}-\gamma_{141}C_{1332}-\gamma_{241}C_{1331}\\
&= C_{1334|1}-C_{1334}(\gamma_{211}-\gamma_{431})-\gamma_{131}(C_{1234}+C_{4334})\\
&\quad -\gamma_{131}C_{1324}-\gamma_{231}C_{1314}-\gamma_{141}C_{1332}-\gamma_{241}C_{1331}\\
&= D\Psi_1-2\epsilon\Psi_1-2\kappa C_{1342}+\kappa C_{1324}-\pi\Psi_0\\
&= D\Psi_1-2\epsilon\Psi_1+3\kappa\Psi_2-\pi\Psi_0
\end{aligned}$$

$R_{13;1}$ は

$$
\begin{aligned}
R_{13;1} &= R_{13|1} - \eta^{nm}\gamma_{n11}R_{m3} - \eta^{nm}\gamma_{n31}R_{1m} \\
&= R_{13|1} - \eta^{21}\gamma_{211}R_{13} - \eta^{34}\gamma_{311}R_{43} - \eta^{43}\gamma_{411}R_{33} \\
&\quad - \eta^{12}\gamma_{131}R_{12} - \eta^{21}\gamma_{231}R_{11} - \eta^{43}\gamma_{431}R_{13} \\
&= R_{13|1} - (\gamma_{211} - \gamma_{431})R_{13} + \gamma_{311}R_{43} + \gamma_{411}R_{33} - \gamma_{131}R_{12} - \gamma_{231}R_{11} + \gamma_{431}R_{13} \\
&= -2D\Phi_{01} + 2(\gamma_{211} - \gamma_{431})\Phi_{01} + \gamma_{311}(-4\Phi_{11} - R_{12}) - 2\gamma_{411}\Phi_{02} - \gamma_{131}R_{12} + 2\gamma_{231}\Phi_{00} \\
&= -2D\Phi_{01} + 2(\gamma_{211} - \gamma_{431})\Phi_{01} - 4\gamma_{311}\Phi_{11} - 2\gamma_{411}\Phi_{02} + 2\gamma_{231}\Phi_{00}
\end{aligned}
$$

$R_{11;3}$ は

$$
\begin{aligned}
R_{11;3} &= R_{11|3} - \eta^{nm}\gamma_{n13}R_{m1} - \eta^{nm}\gamma_{n13}R_{1m} \\
&= R_{11|3} - \eta^{21}\gamma_{213}R_{11} - \eta^{34}\gamma_{313}R_{41} - \eta^{43}\gamma_{413}R_{31} \\
&\quad - \eta^{21}\gamma_{213}R_{11} - \eta^{34}\gamma_{313}R_{14} - \eta^{43}\gamma_{413}R_{13} \\
&= R_{11|3} - 2\gamma_{213}R_{11} + 2\gamma_{313}R_{14} + 2\gamma_{413}R_{13} \\
&= -2\delta\Phi_{00} + 4\gamma_{213}\Phi_{00} - 4\gamma_{313}\Phi_{10} - 4\gamma_{413}\Phi_{01}
\end{aligned}
$$

$R_{11;3}$ と $R_{13;1}$ はくっつけて

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(R_{13;1} - R_{11;3}) &= -D\Phi_{01} + (\gamma_{211} - \gamma_{431})\Phi_{01} - 2\gamma_{311}\Phi_{11} - \gamma_{411}\Phi_{02} + \gamma_{231}\Phi_{00} \\
&\quad + \delta\Phi_{00} - 2\gamma_{213}\Phi_{00} + 2\gamma_{313}\Phi_{10} + 2\gamma_{413}\Phi_{01} \\
&= -D\Phi_{01} + 2\epsilon\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} + \pi^*\Phi_{00} \\
&\quad + \delta\Phi_{00} - 2\gamma_{213}\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{10} + 2\rho^*\Phi_{01} \\
&= -D\Phi_{01} + 2\epsilon\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} + \pi^*\Phi_{00} \\
&\quad + \delta\Phi_{00} - \big((\gamma_{214} + \gamma_{344})^* + (\gamma_{213} + \gamma_{343})\big)\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{10} + 2\rho^*\Phi_{01} \\
&= -D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + (2\epsilon + 2\rho^*)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} + (\pi^* - 2\alpha^* - 2\beta)\Phi_{00}
\end{aligned}
$$

というわけで、全部加えることで $R_{1313;4} + R_{1341;3} + R_{1334;1} = 0$ は

$$
\begin{aligned}
0 = &-\delta^*\Psi_0 + 4\Psi_0\alpha - 4\rho\Psi_1 + D\Psi_1 - 2\epsilon\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 - \pi\Psi_0 \\
&- D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + (2\epsilon + 2\rho^*)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} + (\pi^* - 2\alpha^* - 2\beta)\Phi_{00}
\end{aligned}
$$

となります。残りの 10 個の方程式も同じようにやっていけば求まります。

ゴールドバーグ・ザックスの定理に移ります。で使うものだけ書き出せば

$$R_{13\{13;4\}} \ : \ -\delta^*\Psi_0 + D\Psi_1 + (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 + [R] = 0 \tag{5a}$$

$$R_{13\{21;4\}} \ : \ \delta^*\Psi_1 - D\Psi_2 - \lambda\Psi_0 + 2(\pi - \alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 + [R] = 0 \tag{5b}$$

$$R_{42\{13;4\}} \ : \ -\delta^*\Psi_2 + D\Psi_3 + 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\epsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 + [R] = 0 \tag{5c}$$

$$R_{13\{13;2\}} \ : \ -\Delta\Psi_0 + \delta\Psi_1 + (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 + [R] = 0 \tag{5d}$$

$$R_{13\{43;4\}} \ : \ -\Delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 + \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 + [R] = 0 \tag{5e}$$

$$R_{42\{13;4\}} \ : \ -\Delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 + 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + \Psi_2 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 + [R] = 0 \tag{5f}$$

リッチテンソルが含まれている部分は $[R]$ としています。リッチテンソルの項 $[R]$ はアインシュタイン方程式のエネルギー・運動量テンソル部分に当たります (真空ならリッチテンソルの項は消える)。

本当は光学的スカラー (optical scalar) について触れる必要はありますが、その結果だけを使うことにしてゴールドバーグ・ザックスの定理 (Gorldberg-Sachs theorem) の説明をしてしまいます。光学的スカラーの定義だけ示しておくと、l^μ と共変微分によって

$$\theta = \frac{1}{2} l^\mu_{||\mu}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} l_{\{\mu||\nu\}} l^{\mu||\nu}$$

$$|\sigma|^2 + \theta^2 = \frac{1}{2} l_{(\mu;\nu)} l^{\mu||\nu}$$

として与えられる θ, ω, σ のことです。( ) は対称化の記号です。$|\sigma|^2$ は実際にスピン係数 σ の $\sigma\overline{\sigma}$ に対応しています (θ, ω は ρ で書ける)。光学的スカラーは幾何学的には、θ が発散、ω が回転、σ がねじれに対応しています。発散は divergence でなく expansion、回転は rotation でなく twist と呼ばれることが多いです。σ は shear や distortion です。

真空としたとき、リーマンテンソルが代数的に特別で $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ なら（ペトロフタイプ II)、$\kappa = \sigma = 0$ です。これがゴールドバーグ・ザックスの定理で、必要十分条件になっています。$\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ のとき $\kappa = \sigma = 0$ となることの証明は簡単で、上で書き出したビアンキ恒等式 (5a〜5f) に対して $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ として (真空としているので $[R] = 0$)

$$3\kappa\Psi_2 = 0 \tag{6a}$$

$$-D\Psi_2 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 = 0 \tag{6b}$$

$$-\delta^*\Psi_2 + D\Psi_3 - 3\pi\Psi_2 + 2(\epsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 = 0 \tag{6c}$$

$$3\sigma\Psi_2 = 0 \tag{6d}$$

$$\delta\Psi_2 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 = 0 \tag{6e}$$

$$-\Delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 - 3\mu\Psi_2 + \Psi_2 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 = 0 \tag{6f}$$

そして、空間が平坦でないなら Ψ_0〜$\Psi_4 \neq 0$ なので、(6a〜6c) より $\kappa = 0$、(6d〜6f) より $\sigma = 0$ がすぐにわかり証明されます。逆の証明はここまで簡単ではないです。しかも (3) の結果を使わなくてはいけなく面倒なので省略します。

ゴールドバーグ・ザックスの定理はそのままペトロフタイプ D の場合にも使えて、$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ のとき $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ となります。なんで光学的スカラーの結果が必要なのかというと、$\kappa = 0$ は主要ヌルベクトル $\boldsymbol{l}$ が測地線であることを意味し、$\sigma = 0$ が shear-free（ズレがない、円だったものが楕円にならない）ということを意味しているのを教えてくれるからです。つまり、タイプ D は 2 つの主要ヌルベクトル $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ が測地線で shear-free となっている必要があるということです。