ニューマン・ペンローズ技法

テトラッドに複素ヌルベクトルを選ぶ方法をニューマン・ペンローズ技法と言います。これを見ていき、最後にペトロフの分類を与えます。
ここではギリシャ文字は 4 次元空間の成分、ローマ文字はテトラッドの成分で 1 から 4 とします。

基底をヌルベクトルに選び、それによってテトラッドの関係を構成させるのがニューマン・ペンローズ技法 (Newman-Penrose formalism) です。基底となるヌルベクトルは $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ として、$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ は実ベクトル、$\boldsymbol{m}$ と $\overline{\boldsymbol{m}}$ は複素共役です。この 4 組を複素ヌルテトラッド (complex null tetrad) と呼び、この前段階での $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を実ヌルテトラッド (real null tetrad) と呼びます。複素数にするので単純に

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) \ , \ \overline{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b})$$

と対応しています。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は内積において、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = -1, \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ と規格直交化され、$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}$ とは直交します。複素ヌルテトラッドでの直交性は

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{l}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = 0$$

規格化は

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = 1 \ , \ \boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = -1$$

となり、後はヌルベクトルなので

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = \overline{\boldsymbol{m}}\cdot\overline{\boldsymbol{m}} = 0$$

これが基本的な設定です (通常のテトラッドと違い直交基底を作っているわけではないです)。

これから使用していくのは複素ヌルテトラッドです。4 つの基底 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}}$ によるテトラッドの添え字の上げ下げをする $\eta_{(a)(b)}$ は、テトラッドのベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{l} \ , \ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n} \ , \ \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{m} \ , \ \boldsymbol{e}_4 = \overline{\boldsymbol{m}}$$

のように組めば

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、値を持つのは規格化による部分だけです。そうすると、添え字の関係は

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{l} \ , \ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{n} \ , \ -\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}^4 = -\boldsymbol{m} \ , \ -\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}^3 = -\overline{\boldsymbol{m}}$$

となります。これらを使って必要なものを構成していきます。また、今の表記において、テトラッドを $e^\mu_{(a)}$ とするなら

$$e^\mu_{(1)} = l^\mu \ , \ e^\mu_{(2)} = n^\mu \ , \ e^\mu_{(3)} = m^\mu \ , \ e^\mu_{(4)} = \overline{m}^\mu$$

となっています。このためテトラッドの添え字 $1, 2, 3, 4$ と $l, n, m, \overline{m}$ は対応します。

ワイルテンソルはリーマンテンソルによって

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{n-2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho}) \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \end{aligned}$$

$$g^{\mu\lambda}C_{\mu\nu\rho\lambda} = 0$$

このように定義されます。n には $n \geq 3$ という条件があり、今は 4 次元を考えるので、

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda} &- \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho}) \\ &+ \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \end{aligned}$$

これをテトラッドの添え字を使って表せば、テンソルの添え字の変更の仕方から単純に

$$\begin{aligned} C_{(a)(b)(c)(d)} = R_{(a)(b)(c)(d)} &- \frac{1}{2}(\eta_{(a)(c)}R_{(b)(d)} - \eta_{(b)(c)}R_{(a)(d)} + \eta_{(b)(d)}R_{(a)(c)}) \\ &+ \frac{1}{6}(\eta_{(a)(c)}\eta_{(b)(d)} - \eta_{(a)(d)}\eta_{(b)(c)})R \end{aligned}$$

$$\eta^{(a)(d)}C_{(a)(b)(c)(d)} = 0$$

いちいち括弧を付けるのが面倒なので、これ以降アルファベットの添え字に関してはテトラッドの添え字とし、ギリシャ文字が 4 次元空間のテンソル成分を表すとします。

今の場合、計量 η_{ab} の具体的な形がわかっているので、リッチスカラーは

$$R = \eta^{ab}R_{ab} = R_{12} + R_{21} - R_{34} - R_{43} = 2(R_{12} - R_{34}) \quad (R_{ab} = R_{ba})$$

ワイルテンソルに η^{ad} をかけると

$$\begin{aligned} \eta^{ad}C_{abcd} &= \eta^{12}C_{1bc2} + \eta^{21}C_{2bc1} + \eta^{34}C_{3bc4} + \eta^{43}C_{4bc3} \\ &= C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc4} - C_{4bc3} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

また、ワイルテンソルはリーマンテンソルと同じ対称性を持つことから、添え字の置換に対して

$$C_{abcd} = -C_{bacd}\ ,\ C_{abcd} = -C_{abdc}\ ,\ C_{abcd} = C_{cdab} \tag{2a}$$

$$C_{abcd} + C_{acdb} + C_{adbc} = 0 \tag{2b}$$

という関係を持ちます。これらの関係の内最初の 3 つを用いて、(1) で $b = c$ とすると

$$\begin{aligned}
-C_{3114} - C_{4113} = 0 \ &\Rightarrow\ C_{1314} = 0 \\
-C_{3224} - C_{4223} = 0 \ &\Rightarrow\ C_{2324} = 0 \\
C_{1332} + C_{2331} = 0 \ &\Rightarrow\ C_{1332} = 0 \\
C_{1442} + C_{2441} = 0 \ &\Rightarrow\ C_{1442} = 0
\end{aligned}$$

そして、$b \neq c$ なら $C_{abcd} + C_{acdb} + C_{adbc} = 0$ を使って

- $b = 1,\ c = 3$

$$C_{1132} + C_{2131} - C_{3134} - C_{4133} = C_{2131} - C_{3134} = 0 \ \Rightarrow\ C_{1231} = C_{1334}$$

- $b = 1,\ c = 4$

$$C_{1142} + C_{2141} - C_{3144} - C_{4143} = C_{2141} - C_{4143} = 0 \ \Rightarrow\ C_{1241} = C_{1443}$$

- $b = 2,\ c = 3$

$$C_{1232} + C_{2231} - C_{3234} - C_{4233} = C_{1232} - C_{3234} = 0 \ \Rightarrow\ C_{1232} = C_{2343}$$

- $b = 2,\ c = 4$

$$C_{1242} + C_{2241} - C_{3244} - C_{4243} = C_{1242} - C_{4243} = 0 \ \Rightarrow\ C_{1242} = C_{2434}$$

- $b = 3,\ c = 4$

$$\begin{aligned}
C_{1342} + C_{2341} - C_{3344} - C_{4343} &= C_{1342} + C_{2341} - C_{4343} \\
&= C_{1342} + C_{1432} - C_{4343} = 0
\end{aligned}$$

$b=3,\ c=4$ に対して (1) で $b=2,\ c=1$ とした

$$C_{1212}-C_{3214}-C_{4213}=0$$

これを使うことで

$$C_{1212}=C_{3434}$$

また、$C_{abcd}+C_{acdb}+C_{adbc}=0$ から

$$C_{1234}+C_{1342}+C_{1423}=0$$

を使うことで、$b=3,\ c=4$ は

$$\begin{aligned}C_{1342}&=C_{3434}-C_{1432}\\&=C_{3434}+C_{1423}\\&=C_{3434}-C_{1234}-C_{1342}\end{aligned}$$

となるので

$$C_{1342}=\frac{1}{2}(C_{3434}-C_{1234})=\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234})$$

関係をまとめておくと

$$C_{1314}=C_{2324}=C_{1332}=C_{1442}=0 \tag{3a}$$

$$C_{1231}=C_{1334}\ ,\ C_{1241}=C_{1443}\ ,\ C_{1232}=C_{2343} \tag{3b}$$

$$C_{1242}=C_{2434}\ ,\ C_{1212}=C_{3434} \tag{3c}$$

$$C_{1342}=\frac{1}{2}(C_{3434}-C_{1234})=\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234}) \tag{3d}$$

というのをワイルテンソル C_{abcd} は持っています。

ワイルテンソルはリッチテンソルと同じように 10 個の独立な成分を持っていますが、この 10 個の成分は 5 個の複素スカラーで表現できます。それは、複素ヌルテトラッドの成分によって

$$\Psi_0 = -C_{1313} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda \tag{4a}$$

$$\Psi_1 = -C_{1213} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda \tag{4b}$$

$$\Psi_2 = -C_{1342} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda \tag{4c}$$

$$\Psi_3 = -C_{1242} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda \tag{4d}$$

$$\Psi_4 = -C_{2424} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda \tag{4e}$$

と表せられ、この 5 個をワイルスカラーと呼びます (真ん中の C_{1313} 等はテトラッド成分)。$l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ は基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_4$ でのテトラッド e_a^μ に対応するので、このように書けます。

これでワイルテンソルの成分が表現できることを見るために、反対称化を

$$\begin{aligned}\{p_\mu q_\nu r_\rho s_\lambda\} &= p_\mu q_\nu r_\rho s_\lambda - p_\mu q_\nu s_\rho r_\lambda - q_\mu p_\nu s_\rho r_\lambda + q_\mu p_\nu s_\rho r_\lambda + r_\mu s_\nu p_\rho q_\lambda \\ &\quad - r_\mu s_\nu q_\rho p_\lambda - s_\mu r_\nu p_\rho q_\lambda + s_\mu r_\nu q_\rho p_\lambda\end{aligned}$$

と定義します (ここでは係数を省いています)。これは見て分かるように、リーマンテンソルの対称性に従って構成されています。つまり、これを使うことでワイルテンソルは

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu\rho\lambda} &= Q_{1212}\{l_\mu n_\nu l_\rho n_\lambda\} + Q_{3434}\{m_\mu \overline{m}_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} \\ &\quad + Q_{1234}\{l_\mu n_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} + Q_{1314}\{l_\mu m_\nu l_\rho \overline{m}_\lambda\} + Q_{2324}\{n_\mu m_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\} \\ &\quad + \big[Q_{1313}\{l_\mu m_\nu l_\rho m_\lambda\} + Q_{2323}\{n_\mu m_\nu n_\rho m_\lambda\} + Q_{1213}\{l_\mu n_\nu l_\rho m_\lambda\} \\ &\quad + Q_{1223}\{l_\mu n_\nu n_\rho m_\lambda\} + Q_{1323}\{l_\mu m_\nu n_\rho m_\lambda\} + Q_{1324}\{l_\mu m_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\} \\ &\quad + Q_{1334}\{l_\mu m_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} + Q_{2334}\{n_\mu m_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} + \text{複素共役}\,\big]\end{aligned}$$

複素共役と書いてある部分は [ ] 内の各項で 3 と 4 を入れ替えたものになります。例えば Q_{1313} の項なら $Q_{1414}\{l_\mu \overline{m}_\nu l_\rho \overline{m}_\lambda\}$ となります。この式は、{ } がワイルテンソルが満たすべき対称性を持った 4 階テンソルの成分に対応し、それの全パターンを係数 Q_{abcd} を付けて足し合わせているものです。それによってこの対称性を満たすテンソルが作れることから、ワイルテンソルを表現できます。この Q_{abcd} を決定するには両辺に $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ の組を適当に選んでかけて、右辺で縮約をとっていけばわかります。

例えば Q_{1212} に対しては

$$\begin{aligned}n^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda C_{\mu\nu\rho\lambda} &= n^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda Q_{1212}\{l_\mu n_\nu l_\rho n_\lambda\} \\ C_{2121} &= Q_{1212} n^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda (l_\mu n_\nu l_\rho n_\lambda - l_\mu n_\nu n_\rho l_\lambda - n_\mu l_\nu l_\rho n_\lambda + n_\mu l_\nu n_\rho l_\lambda \\ &\qquad - n_\mu l_\nu l_\rho n_\lambda - l_\mu n_\nu n_\rho l_\lambda + n_\mu l_\nu n_\rho l_\lambda) \\ &= Q_{1212}\end{aligned}$$

左辺はワイルテンソルの関係 (3d) より

$$C_{1212} = 2C_{1342} + C_{1234}$$

ワイルスカラー Ψ を使って表せば

$$\begin{aligned} 2C_{1212} = C_{1212} + C^*_{1212} &= 2C_{1342} + C_{1234} + 2C_{1432} + C_{1243} \\ &= 2C_{1342} + 2C_{1432} \\ &= -2\Psi_2 - 2\Psi^*_2 \end{aligned}$$

なので

$$Q_{1212} = -(\Psi_2 + \Psi^*_2)$$

これと同じことを他の項でも行えばいいです。ただし、これを見てわかるように、左辺は縮約を取らせる $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ によってテトラッドの添え字が決まっているので、ワイルテンソルの関係 (3a) から

$$Q_{1314} = Q_{2324} = Q_{1323} = Q_{1424} = 0$$

となっています。他は右辺がどうなっているのか見ないといけないので地道にやっていきます。

もう 1 つだけ計算を示しておくと、Q_{1313} の項は

$$\begin{aligned} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda C_{\mu\nu\rho\lambda} &= n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda Q_{1313}\{l_\mu m_\nu l_\rho m_\lambda\} \\ C_{2424} &= Q_{1313} \end{aligned}$$

なので

$$Q_{1313} = -\Psi_4$$

他のも結果だけ示せば

$$\begin{aligned} &Q_{1314} = Q_{2324} = Q_{1323} = Q_{1424} = 0 \\ &Q_{1212} = Q_{3434} = -(\Psi_2 + \Psi^*_2)\ ,\ Q_{1234} = (\Psi_2 - \Psi^*_2) \\ &Q_{1324} = \Psi_2\ ,\ Q_{1313} = -\Psi_4\ ,\ Q_{2424} = -\Psi_0 \\ &Q_{1213} = -Q_{1334} = \Psi_3\ ,\ Q_{1224} = Q_{2443} = -\Psi_1 \end{aligned}$$

これらよりワイルテンソルは

$$
\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\lambda} = & -(\Psi_2+\Psi_2^*)(\{l_\mu n_\nu l_\rho n_\lambda\}+\{m_\mu \overline{m}_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\}) \\
& +(\Psi_2-\Psi_2^*)\{l_\mu n_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} + \big[-\Psi_4\{l_\mu m_\nu l_\rho m_\lambda\} - \Psi_0\{n_\mu \overline{m}_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\} \\
& +\Psi_3(\{l_\mu n_\nu l_\rho m_\lambda\}+\{l_\mu m_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\}) \\
& -\Psi_1(\{l_\mu n_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\}+\{n_\mu \overline{m}_\nu \overline{m}_\rho m_\lambda\}) \\
& + \text{複素共役} \big]
\end{aligned}
$$

そして、これはテンソル成分ですが、これをテトラッド成分に変えるために両辺に $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ をかけていくと

$$
C_{1212}=C_{3434}=-(\Psi_2+\Psi_2^*)\ ,\ C_{1234}=\Psi_2-\Psi_2^*\ ,\ C_{2443}=\Psi_3\ .\ C_{1334}=\Psi_1 \tag{5}
$$

このようなものが出てきて、残りの項は (4a) から (4e) に対応します。これで、ワイルテンソルの成分が全てワイルスカラーによって (4a）から (4e) と (5) で与えられたことになります。

次にテトラッドの変換についてですが、テトラッドの変換 (回転) は３つあり

(i) $\boldsymbol{l}$ を変化させずに、他のを

$$
\boldsymbol{m}\Rightarrow \boldsymbol{m}+a\boldsymbol{l}\ ,\ \overline{\boldsymbol{m}}\Rightarrow \overline{\boldsymbol{m}}+a^*\boldsymbol{l}\ ,\ \boldsymbol{n}\Rightarrow \boldsymbol{n}+a^*\boldsymbol{m}+a\overline{\boldsymbol{m}}+aa^*\boldsymbol{l}\quad (a: \text{複素関数})
$$

(ii) $\boldsymbol{n}$ を変化させずに、他のを

$$
\boldsymbol{m}\Rightarrow \boldsymbol{m}+b\boldsymbol{n}\ ,\ \overline{\boldsymbol{m}}\Rightarrow \overline{\boldsymbol{m}}+b^*\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{l}\Rightarrow \boldsymbol{l}+b^*\boldsymbol{m}+b\overline{\boldsymbol{m}}+bb^*\boldsymbol{n}\quad (b: \text{複素関数})
$$

(iii) $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{n}$ の方向を変えずに、$\boldsymbol{m}$ を $(\boldsymbol{m}-\overline{\boldsymbol{m}})$ 面上で θ 回転させる

$$
\boldsymbol{l}\Rightarrow A^{-1}\boldsymbol{l}\ ,\ \boldsymbol{n}\Rightarrow A\boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{m}\Rightarrow e^{i\theta}\boldsymbol{m}\ ,\ \overline{\boldsymbol{m}}\Rightarrow e^{-i\theta}\overline{\boldsymbol{m}}\quad (A,\theta: \text{実関数})
$$

この３パターンになります。この３つの変換によってワイルスカラーがどうなるのか見てみます。

単純なベクトルの和とスカラー倍の組み合わせなのでベクトルの成分も同様に変換されます。

- (i) の場合

  $$\Psi_0=-C_{1313}=-C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda\ \Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu(m^\nu+al^\nu)l^\rho(m^\lambda+al^\lambda)=-C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda=\Psi_0$$

  $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \overline{m}^\mu$ と $C_{\mu\nu\rho\lambda}$ の縮約ではワイルテンソルの対称性 (2a) と (3a) から (3c) があるので、$al^\mu l^\nu l^\rho m^\lambda$ のような項は消えます。他のも同様に計算できます。ワイルテンソルの成分 (4b) から Ψ_1 は

$$\Psi_1 = -C_{1213} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda$$

$$\Rightarrow \; -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu (n^\nu + a^* m^\nu + a\overline{m}^\nu + aa^* l^\nu) l^\rho (m^\lambda + a l^\lambda)$$

$$= \; -C_{\mu\nu\rho\lambda}(l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda + a^* l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda)$$

$$= \; -C_{1213} - a^* C_{1313}$$

$$= \Psi_1 + a^* \Psi_0$$

Ψ_2 は

$$\Psi_2 = -C_{1342} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda$$

$$\Rightarrow -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu (m^\nu + a l^\nu)(\overline{m}^\rho + a^* l^\rho)(n^\lambda + a^* m^\lambda + a\overline{m}^\lambda + aa^* l^\lambda)$$

$$= \; -C_{\mu\nu\rho\lambda}(l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda + a^* l^\mu m^\nu l^\rho n^\lambda + a^* l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho m^\lambda + (a^*)^2 l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda)$$

$$= \; -C_{1342} - a^* C_{1312} - a^* C_{1343} - (a^*)^2 C_{1313}$$

$$= \Psi_2 + 2a^* \Psi_1 + (a^*)^2 \Psi_0$$

Ψ_3 は

$$\Psi_3 = -C_{1242} = -\,C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda$$

$$\Rightarrow \; -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu (n^\nu + a^* m^\nu + a\overline{m}^\nu + aa^* l^\nu)(\overline{m}^\rho + a^* l^\rho)(n^\lambda + a^* m^\lambda + a\overline{m}^\lambda + aa^* l^\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \; -C_{\mu\nu\rho\lambda}(l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda + a^* l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho m^\lambda + aa^* l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a^* l^\mu n^\nu l^\rho n^\lambda + (a^*)^2 l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda \\
&\quad + aa^* l^\mu n^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^2 l^\mu m^\nu l^\rho n^\lambda + (a^*)^3 l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda + a^* l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda \\
&\quad + (a^*)^2 l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho m^\lambda + aa^* l^\mu \overline{m}^\nu \overline{m}^\rho m^\lambda \\
&\quad + a^2 a^* l^\mu \overline{m}^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + aa^* l^\mu \overline{m}^\nu l^\rho n^\lambda + a^2 a^* l^\mu \overline{m}^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda) \\
&= \; -C_{1242} - a^* C_{1243} - aa^* C_{1241} - a^* C_{1212} - (a^*)^2 C_{1213} \\
&\quad - aa^* C_{1214} - (a^*)^2 C_{1312} - (a^*)^3 C_{1313} - a^* C_{1342} - (a^*)^2 C_{1343} \\
&\quad - aa^* C_{1443} - a^2 a^* C_{1441} - aa^* C_{1412} - a^2 a^* C_{1414} \\
&= \Psi_3 + a^*(\Psi_2 - \Psi_2^*) - aa^* \Psi_1^* + a^*(\Psi_2 + \Psi_2^*) + (a^*)^2 \Psi_1 + aa^* \Psi_1^* + (a^*)^2 \Psi_1 + (a^*)^3 \Psi_0 \\
&\quad + a^* \Psi_2 + (a^*)^2 \Psi_1 - aa^* \Psi_1^* - a^2 a^* \Psi_0^* + aa^* \Psi_1^* + a^2 a^* \Psi_0^* + a^* \Psi_1^* \\
&= \Psi_3 + 3a^* \Psi_2 + 3(a^*)^2 \Psi_1 + (a^*)^3 \Psi_0
\end{aligned}$$

Ψ_4 は

$$\Psi_4 = -C_{2424} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda$$

$$\Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda}(n^\mu + a^* m^\mu + a\overline{m}^\mu + aa^* l^\mu)(\overline{m}^\nu + a^* l^\nu)(n^\rho + a^* m^\rho + a\overline{m}^\rho + aa^* l^\rho)(\overline{m}^\lambda + a^* l^\lambda)$$

$$\begin{aligned}
= &-C_{\mu\nu\rho\lambda}(n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + a^* n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho l^\lambda + a^* n^\mu \overline{m}^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^2 n^\mu \overline{m}^\nu m^\rho l^\lambda \\
&+ aa^* n^\mu \overline{m}^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + aa^* n^\mu \overline{m}^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda + a^* n^\mu l^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^2 n^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda \\
&+ (a^*)^2 n^\mu l^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^3 n^\mu l^\nu m^\rho l^\lambda + a(a^*)^2 n^\mu l^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a(a^*)^2 n^\mu l^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda \\
&+ a^* m^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^2 m^\mu \overline{m}^\nu n^\rho l^\lambda + (a^*)^2 m^\mu \overline{m}^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^3 m^\mu \overline{m}^\nu m^\rho l^\lambda \\
&+ (a^*)^2 a m^\mu \overline{m}^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a(a^*)^2 m^\mu \overline{m}^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^2 m^\mu l^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^3 m^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda \\
&+ (a^*)^3 m^\mu l^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + (a^*)^4 m^\mu l^\nu m^\rho l^\lambda + a(a^*)^3 m^\mu l^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a(a^*)^3 m^\mu l^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda \\
&+ aa^* \overline{m}^\mu l^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + a(a^*)^2 \overline{m}^\mu l^\nu n^\rho l^\lambda + a(a^*)^2 \overline{m}^\mu l^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + a(a^*)^3 \overline{m}^\mu l^\nu m^\rho l^\lambda \\
&+ a^2(a^*)^2 \overline{m}^\mu l^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a^2(a^*)^2 \overline{m}^\mu l^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda + aa^* l^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda + a(a^*)^2 l^\mu \overline{m}^\nu n^\rho l^\lambda \\
&+ a(a^*)^2 l^\mu \overline{m}^\nu m^\rho \overline{m}^\lambda + a(a^*)^3 l^\mu \overline{m}^\nu m^\rho l^\lambda + a^2(a^*)^2 l^\mu \overline{m}^\nu \overline{m}^\rho l^\lambda + a^2(a^*)^2 l^\mu \overline{m}^\nu l^\rho \overline{m}^\lambda \\
= &-C_{2424} - a^* C_{2421} - a^* C_{2434} - (a^*)^2 C_{2431} \\
&- aa^* C_{2441} - aa^* C_{2414} - a^* C_{2124} - (a^*)^2 C_{2121} \\
&- (a^*)^2 C_{2134} - (a^*)^3 C_{2131} - a(a^*)^2 C_{2141} - a(a^*)^2 C_{2114} \\
&- a^* C_{3424} - (a^*)^2 C_{3421} - (a^*)^2 C_{3434} - (a^*)^3 C_{3431} \\
&- (a^*)^2 a C_{3441} - a(a^*)^2 C_{3414} - (a^*)^2 C_{3124} - (a^*)^3 C_{3121} \\
&- (a^*)^3 C_{3134} - (a^*)^4 C_{3131} - a(a^*)^3 C_{3141} - a(a^*)^3 C_{3114} \\
&- aa^* C_{4124} - a(a^*)^2 C_{4121} - a(a^*)^2 C_{4134} - a(a^*)^3 C_{4131} \\
&- a^2(a^*)^2 C_{4141} - a^2(a^*)^2 C_{4114} - aa^* C_{1424} - a(a^*)^2 C_{1421} \\
&- a(a^*)^2 C_{1434} - a(a^*)^3 C_{1431} - a^2(a^*)^2 C_{1441} - a^2(a^*)^2 C_{1414} \\
= &\ \Psi_4 + a^*\Psi_3 + a^*\Psi_3 + (a^*)^2\Psi_2 \\
&+ a^*\Psi_3 + (a^*)^2(\Psi_2 + \Psi_2^*) + (a^*)^2(\Psi_2 - \Psi_2^*) + (a^*)^3\Psi_1 \\
&+ a(a^*)^2\Psi_1^* + a(a^*)^2\Psi_1^* + a^*\Psi_3 + (a^*)^2(\Psi_2 - \Psi_2^*) + (a^*)^2(\Psi_2 + \Psi_2^*) \\
&+ (a^*)^3\Psi_1 - (a^*)^2 a\Psi_1^* - a(a^*)^2\Psi_1^* + (a^*)^2\Psi_2 \\
&+ (a^*)^3\Psi_1 + (a^*)^3\Psi_1 + (a^*)^4\Psi_0 + a(a^*)^2\Psi_1^* \\
&- a(a^*)^2\Psi_1^* + a^2(a^*)^2\Psi_0^* - a^2(a^*)^2\Psi_0^* - a(a^*)^2\Psi_1^* + a(a^*)^2\Psi_1^* \\
&- a^2(a^*)^2\Psi_0^* + a^2(a^*)^2\Psi_0^* \\
= &\ \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6(a^*)^2\Psi_2 + 4(a^*)^2\Psi_3 + (a^*)^4\Psi_0
\end{aligned}$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &\Rightarrow \Psi_0 \\
\Psi_1 &\Rightarrow \Psi_1 + a^*\Psi_0 \\
\Psi_2 &\Rightarrow \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + (a^*)^2\Psi_0 \\
\Psi_3 &\Rightarrow \Psi_3 + 3a^*\Psi_2 + 3(a^*)^2\Psi_1 + (a^*)^3\Psi_0 \\
\Psi_4 &\Rightarrow \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6(a^*)^2\Psi_2 + 4(a^*)^2\Psi_3 + (a^*)^4\Psi_0
\end{aligned}
$$

- (ii) の場合

  (i) と同じ計算をすればいいですが、$\boldsymbol{l}$ でなく $\boldsymbol{n}$ が同じ変化をするようになるだけなので、(i) の結果をそのまま利用します。そうすると、$\Psi_0 \to \Psi_4^*,\ \Psi_1 \to \Psi_3^*,\ \Psi_2 \to \Psi_2^*$ と置き換えてやり、a を b にするだけで済みます。つまり

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &\Rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 \\
\Psi_1 &\Rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4 \\
\Psi_2 &\Rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4 \\
\Psi_3 &\Rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4 \\
\Psi_4 &\Rightarrow \Psi_4
\end{aligned}
$$

  となっています。

- (iii) の場合

  (iii) は簡単に計算できます。Ψ_0 は

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 = -C_{1313} = -C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda \\
\Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda}A^{-1}l^\mu e^{i\theta}m^\nu A^{-1}l^\rho e^{i\theta}m^\lambda = -C_{\mu\nu\rho\lambda}A^{-2}e^{2i\theta}l^\mu m^\nu l^\rho m^\lambda = A^{-2}e^{2i\theta}\Psi_0
\end{aligned}
$$

  Ψ_1 は

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 = -C_{1213} = -C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda \\
\Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda}A^{-1}l^\mu An^\nu A^{-1}l^\rho e^{i\theta}m^\lambda = -C_{\mu\nu\rho\lambda}Ae^{i\theta}l^\mu n^\nu l^\rho m^\lambda = Ae^{i\theta}\Psi_1
\end{aligned}
$$

  Ψ_2 は

$$
\Psi_2 = -C_{1342} = -C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\mu m^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda\ \Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda}A^{-1}l^\mu e^{i\theta}m^\nu e^{-i\theta}\overline{m}^\rho An^\lambda = \Psi_2
$$

Ψ_3 は

$$\Psi_3 = -C_{1242} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\mu n^\nu \overline{m}^\rho n^\lambda \ \Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda} A^{-1} l^\mu A n^\nu e^{-i\theta} \overline{m}^\rho A n^\lambda = A e^{-i\theta} \Psi_3$$

Ψ_4 は

$$\Psi_4 = -C_{2424} = -C_{\mu\nu\rho\lambda} n^\mu \overline{m}^\nu n^\rho \overline{m}^\lambda \ \Rightarrow\ -C_{\mu\nu\rho\lambda} A n^\mu e^{-i\theta} \overline{m}^\nu A n^\rho e^{-i\theta} \overline{m}^\lambda = A^2 e^{-2i\theta} \Psi_4$$

最後に、ペトロフの分類がどのように与えらるのか見ていきます。テトラッドの変換 (ii) から

$$\Psi'_0 = \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4$$
$$\Psi'_1 = \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4$$
$$\Psi'_2 = \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4$$
$$\Psi'_3 = \Psi_3 + b\Psi_4$$
$$\Psi'_4 = \Psi_4$$

のように新しいワイルスカラー Ψ'_0 から Ψ'_4 が作れます。このとき、Ψ'_0 は b での 4 次方程式になっているので、b が

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0 \tag{6}$$

この方程式の根であれば Ψ'_0 は消えます。(ii) の変換による新しい $\boldsymbol{l}$ である、$\boldsymbol{l} + b^*\boldsymbol{m} + b\overline{\boldsymbol{m}} + bb^*\boldsymbol{n}$ のことをワイルテンソルの主要ヌル方向 (principal null direction) と呼び、この線上にあるベクトルを主要ヌルベクトルと呼びます。$\boldsymbol{l}$ も主要ヌルベクトルです。このときの根がどのようになっているかで分類されるのがペトロフの分類です。

- タイプ I

  (6) の方程式の 4 つの根全てが区別されるとき、タイプ I に分類されます。このときワイルテンソルは $\Psi_0 = 0$ で、さらに I の変換を行うことで Ψ_4 も消せます (I の変換は Ψ_0 を変化させない)。残りの Ψ_1 から Ψ_3 は消えずに残ります。

- タイプ II

  4 つの根 (b_1, b_2, b_3, b_4) のうち $b_1 = b_2$ で後は等しくない場合タイプ II に分類されます。(6) を b で微分すると

  $$4\Psi_4 b^3 + 12\Psi_3 b^2 + 12\Psi_2 b + 4\Psi_1 = \Psi_4 b^3 + 3\Psi_3 b^2 + 3\Psi_2 b + \Psi_1 = 0$$

  となって、これは Ψ_1 の変換と一致し、この場合でも $b = b_2$ で方程式が満たされるので、$b = b_1 = b_2$ の変換 II で Ψ_0, Ψ_1 は消えることになります。そして、変換 I で Ψ_4 も消せるので、残るのは Ψ_2 と Ψ_3 になります。

- タイプ D

  根が二つの二重根 b_1 と b_2 になるときにタイプ D に分類されます。この場合 b_1 での変換 II と $a^* = (b_2 - b_1)^{-1}$ の変換 I を行うことで $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4$ が消え、Ψ_2 だけが消えずに残ります。

- タイプ III

  4 つの根のうち $b_1 = b_2 = b_3 \neq b_4$ のように 3 つが等しいときタイプ III に分類されます。(6) を 2 回 b で微分すれば

$$\Psi_4 b^2 + 2\Psi_3 b + \Psi_2 = 0$$

  これは Ψ_2 の変換と一致するので、$b = b_1$ の変換 II と変換 I によって $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_4$ が消え、Ψ_3 だけが消えずに残ります。

- タイプ N

  4 つの根全てが 1 つの根 b であるときタイプ N に分類されます。この場合変換 II によって Ψ_0 から Ψ_3 が消され、Ψ_4 が消えずに残ります。

このように分類されますが、「ペトロフの分類」でのようにワイルテンソルのヌルベクトル $\boldsymbol{l}$(主要ヌル方向) の条件によっても区別されます。これも見ておきます。

ワイルテンソルは

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\lambda} = &-(\Psi_2 + \Psi_2^*)(\{l_\mu n_\nu l_\rho n_\lambda\} + \{m_\mu \overline{m}_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\}) \\
&+ (\Psi_2 - \Psi_2^*)\{l_\mu n_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\} + \Big[-\Psi_4\{l_\mu m_\nu l_\rho m_\lambda\} - \Psi_0\{n_\mu \overline{m}_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\} \\
&+ \Psi_3(\{l_\mu n_\nu l_\rho m_\lambda\} + \{l_\mu m_\nu m_\rho \overline{m}_\lambda\}) \\
&- \Psi_1(\{l_\mu n_\nu n_\rho \overline{m}_\lambda\} + \{n_\mu \overline{m}_\nu \overline{m}_\rho m_\lambda\}) \\
&+ \text{複素共役} \Big]
\end{aligned}$$

このように表現できることから、{ } の中で添え字が動くことに注意して $l^\nu l^\rho$ による縮約を行うと

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\lambda} l^\nu l^\rho = &(\Psi_2 + \Psi_2^*) l_\mu l_\lambda + \Psi_0 \overline{m}_\mu \overline{m}_\lambda + \Psi_0^* m_\mu m_\lambda \\
&- \Psi_1 l_\mu \overline{m}_\lambda - \Psi_1 l_\lambda \overline{m}_\mu - \Psi_1^* l_\mu m_\lambda - \Psi_1^* l_\lambda m_\mu
\end{aligned}$$

今度は $l^\nu l^\rho$ と l_λ による反対称な形として

$$
\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho &= C_{\mu\nu\rho\lambda}l_\gamma l^\nu l^\rho - C_{\mu\nu\rho\gamma}l_\lambda l^\nu l^\rho \\
&= (\Psi_2+\Psi_2^*)l_\gamma l_\mu l_\lambda + \Psi_0 l_\gamma \overline{m}_\mu \overline{m}_\lambda + \Psi_0^* l_\gamma m_\mu m_\lambda \\
&\quad - \Psi_1 l_\gamma l_\mu \overline{m}_\lambda - \Psi_1 l_\gamma l_\lambda \overline{m}_\mu - \Psi_1^* l_\gamma l_\mu m_\lambda - \Psi_1^* l_\gamma l_\lambda m_\mu \\
&\quad - \big((\Psi_2+\Psi_2^*)l_\lambda l_\mu l_\gamma + \Psi_0 l_\lambda \overline{m}_\mu \overline{m}_\gamma + \Psi_0^* l_\lambda m_\mu m_\gamma \\
&\quad - \Psi_1 l_\lambda l_\mu \overline{m}_\gamma - \Psi_1 l_\lambda l_\gamma \overline{m}_\mu - \Psi_1^* l_\lambda l_\mu m_\gamma - \Psi_1^* l_\lambda l_\gamma m_\mu\big) \\
&= \Psi_0(l_\gamma \overline{m}_\mu \overline{m}_\lambda - l_\lambda \overline{m}_\mu \overline{m}_\gamma) + \Psi_0^*(l_\gamma m_\mu m_\lambda - l_\lambda m_\mu m_\gamma) \\
&\quad + \Psi_1(l_\lambda l_\mu \overline{m}_\gamma - l_\gamma l_\mu \overline{m}_\lambda) + \Psi_1^*(l_\lambda l_\mu m_\gamma - l_\gamma l_\mu m_\lambda) \\
&= (\Psi_0^* m_\mu - \Psi_1^* l_\mu)m_{[\lambda}l_{\gamma]} + (\Psi_0 \overline{m}_\mu - \Psi_1 l_\mu)\overline{m}_{[\lambda}l_{\gamma]}
\end{aligned}
$$

さらに反対称な l_μ を加えて

$$
\begin{aligned}
l_{[\sigma}C_{\mu]\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho &= l_\sigma C_{\mu\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho - l_\mu C_{\sigma\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho \\
&= (\Psi_0^* l_\sigma m_\mu - \Psi_1^* l_\sigma l_\mu)m_{[\lambda}l_{\gamma]} + (\Psi_0 l_\sigma \overline{m}_\mu - \Psi_1 l_\sigma l_\mu)\overline{m}_{[\lambda}l_{\gamma]} \\
&\quad - \big((\Psi_0^* l_\mu m_\sigma - \Psi_1^* l_\mu l_\sigma)m_{[\lambda}l_{\gamma]} + (\Psi_0 l_\mu \overline{m}_\sigma - \Psi_1 l_\mu l_\sigma)\overline{m}_{[\lambda}l_{\gamma]}\big) \\
&= \Psi_0(l_\sigma \overline{m}_\mu - l_\mu \overline{m}_\sigma)\overline{m}_{[\lambda}l_{\gamma]} + \Psi_0^*(l_\sigma m_\mu - l_\mu m_\sigma)m_{[\lambda}l_{\gamma]} \\
&= \Psi_0 l_{[\sigma}\overline{m}_{\mu]}\overline{m}_{[\lambda}l_{\gamma]} + \Psi_0^* l_{[\sigma}m_{\mu]}m_{[\lambda}l_{\gamma]}
\end{aligned}
$$

これらによってワイルテンソルは分類されます。

- タイプ I

  主要ヌル方向 $\boldsymbol{l}$ が 1 つも重複してなく (縮退していない)、$\boldsymbol{l}$ が $\Psi_0=0$(根で区別したときのタイプ I での結果に対応し、Ψ_4 が消えるのはここでは関係してきません。これは他のタイプでも同様です) で

  $$l_{[\sigma}C_{\mu]\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho = 0 \quad (\Psi_0=0)$$

  を満たすときにワイルテンソルはタイプ I に分類されます (逆に言えば、タイプ I のワイルテンソルの縮退してない主要ヌル方向 $\boldsymbol{l}$ が存在するための条件がこの式です)。つまり、このように条件式を満たす $\boldsymbol{l}$ の存在によってワイルテンソルは分類されていきます。

- タイプ II

  主要ヌル方向 $\boldsymbol{l}$ が 2 重に重複（縮退）しており、$\Psi_0=\Psi_1=0$ で

  $$C_{\mu\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^\nu l^\rho = 0 \quad (\Psi_0=\Psi_1=0)$$

  $$C_{\mu\nu\rho\lambda}l^\nu l^\rho = (\Psi_2+\Psi_2^*)l_\mu l_\lambda \quad (\Psi_0=\Psi_1=0)$$

を満たすときに、ワイルテンソルはタイプ II に分類されます。

- タイプ D

  タイプ II のときに、もう 1 つ 2 重に縮退している $\boldsymbol{l}$ に線形独立なヌル方向 $\boldsymbol{n}$ があり、同じように

$$C_{\mu\nu\rho[\lambda}n_{\gamma]}n^{\nu}n^{\rho} = 0 \quad (\Psi_0 = \Psi_1 = 0)$$

$$C_{\mu\nu\rho\lambda}n^{\nu}n^{\rho} = (\Psi_2 + \Psi_2^*)n_{\mu}n_{\lambda} \quad (\Psi_0 = \Psi_1 = 0)$$

  を満たすなら、タイプ D に分類されます。

- タイプ III

  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ で

$$\begin{aligned}
C_{\mu\nu\rho\lambda}l^{\lambda} &= l^{\lambda}\big[-\Psi_4\{l_{\mu}m_{\nu}l_{\rho}m_{\lambda}\} + \Psi_3(\{l_{\mu}n_{\nu}l_{\rho}m_{\lambda}\} + \{l_{\mu}m_{\nu}m_{\rho}\overline{m}_{\lambda}\}) + \text{複素共役}\,\big] \\
&= \Psi_3 l_{\mu}l_{\rho}m_{\nu} - \Psi_3 l_{\nu}l_{\rho}m_{\mu} + \Psi_3^* l_{\mu}l_{\rho}\overline{m}_{\nu} - \Psi_3^* l_{\nu}l_{\rho}\overline{m}_{\mu} \\
&= \Psi_3(l_{\mu}m_{\nu} - l_{\nu}m_{\mu})l_{\rho} + \Psi_3^*(l_{\mu}\overline{m}_{\nu} - l_{\nu}\overline{m}_{\mu})l_{\rho}
\end{aligned}$$

  と

$$C_{\mu\nu\rho[\lambda}l_{\gamma]}l^{\rho} = 0$$

  を満たすときに、タイプ III に分類されます。

- タイプ N

  $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ で

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = -\Psi_4 l_{\mu}m_{\nu}l_{\rho}m_{\lambda} - \Psi_4^* l_{\mu}\overline{m}_{\nu}l_{\rho}\overline{m}_{\lambda}$$

  と

$$C_{\mu\nu\rho\lambda}l^{\lambda} = 0$$

  を満たすときにタイプ N になります。

これによって、「ペトロフの分類」の表と同じものが作れます。