normal coordinate

空間のある点でクリストッフェル記号が 0 になる座標系を導入します。
前半で測地座標系と normal coordinate を導出して、後半では normal coordinate での関係を導出しています。なので、normal coordinate が必要ないなら後半は飛ばしていいです。
ここでは原点での微分を $\partial T_\mu/\partial x^\nu|_0$、$\partial_\nu T_\mu|_0$、$\partial_\nu T_\mu(0)$、$T_{\mu|\nu}(0)$ のように書いていますが、どれも同じ意味です。

まず、x^μ による座標系を用意し、点 P の座標を $x^\mu(P)$ とします。これから座標変換によって新しい座標系 $\overline{x}^\mu$ を作ったとき、この点 P でのクリストッフェル記号 $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(P)$ が座標変換によって $\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(P)=0$ になるにはどうなっていればいいのか求めます。座標変換に対してクリストッフェル記号は

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}=\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta}\Gamma^\nu_{\lambda\rho}-\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta}$$

と変換されるので、変換後にクリストッフェル記号が点 P で $\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(P)=0$ になるには

$$0=(\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta}\Gamma^\nu_{\lambda\rho}-\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta})_P$$

であればいいことが分かります (括弧についてる P は点 P での計算という意味です)。これはもう少し簡単にすることができて、

$$\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^\eta}\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}$$

をかけると

$$\begin{aligned}
0&=\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^\eta}\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta}\Gamma^\nu_{\lambda\rho}-\frac{\partial\overline{x}^\beta}{\partial x^\eta}\frac{\partial\overline{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial\overline{x}^\alpha}\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^\beta}\\
&=\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\delta^\lambda_\sigma\delta^\rho_\eta\Gamma^\nu_{\lambda\rho}-\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\rho}\delta^\lambda_\sigma\delta^\rho_\eta\\
&=\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\sigma\eta}-\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\sigma\partial x^\eta}\\
\frac{\partial\overline{x}^\mu}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\sigma\eta}&=\frac{\partial^2\overline{x}^\mu}{\partial x^\sigma\partial x^\eta} \qquad (1)
\end{aligned}$$

となるので、これが点 P で成立していればクリストフェｆル記号は 0 になります。
ここで座標変換として

$$\overline{x}^\mu=C^\mu_{\ \nu}(x^\nu-x^\nu(P))+\frac{1}{2}C^\mu_{\ \nu}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(P)(x^\alpha-x^\alpha(P))(x^\beta-x^\beta(P)) \qquad (2)$$

というのを与えます。$C^\mu_{\ \nu}$ は定数、$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(P)$ は点 P でのクリストッフェル記号です。そうすると、点 P での微分として

$$(\frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu})_P = C^\mu{}_\nu\ ,\ (\frac{\partial^2 \overline{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta})_P = C^\mu{}_\nu \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(P)$$

というのが求まります（点 P なので余った $x^\alpha - x^\alpha(P)$ は $x^\alpha(P) - x^\alpha(P) = 0$ で消える)。これと (1) を見ると同じ関係になっていることが分かります。なので、この変換 (2) によってクリストッフェル記号 $\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(P)$ は 0 になります。$C^\mu{}_\nu$ は任意なので (逆を存在させるために行列式が 0 にならなければいい)、$C^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$ とするのが便利です。このようにすれば点 P での座標変換が

$$(\frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\nu})_P = \delta^\mu_\nu$$

で与えられるので、テンソルが変更されないです。

このように座標変換 (1) で $\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(P)$ を 0 にできますが、さらに $x^\alpha - x^\alpha(P)$ の高次の項を加えていっても問題はないです（点 P での微分で消えるから)。このため $\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(P)$ を 0 にする座標変換 (座標系) は無数に存在します。このようなある点でクリストッフェル記号が 0 になる座標系のことを測地座標系 (geodesic system) や局所慣性系と呼んだりします。測地座標系ではクリストッフェル記号が 0 になるために、共変微分がただの偏微分になるので計算が簡単になります。特に、その点で計量が $g_{\mu\nu||\alpha} = g_{\mu\nu|\alpha} = 0$ となるのが便利です。

測地座標系では簡単にリーマンテンソルの関係が導けます。リーマンテンソルの定義は

$$R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta|\nu} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu|\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

としています。測地座標系において、リーマンテンソルはクリストッフェル記号が 0 となる点で (明記しませんが 0 となる点での計算です)

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha\beta} &= g_{\mu\rho}R^\rho{}_{\nu\alpha\beta} \\
&= g_{\mu\rho}(\Gamma^\rho_{\nu\beta|\alpha} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha|\beta}) \\
&= g_{\mu\rho}(\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\nu|\beta|\alpha} + g_{\lambda\beta|\nu|\alpha} - g_{\nu\beta|\lambda|\alpha}) - \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\nu|\alpha|\beta} + g_{\lambda\alpha|\nu|\beta} - g_{\nu\alpha|\lambda|\beta})) \quad (g^{\rho\lambda}_{|\alpha} = 0) \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\rho}g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\nu|\beta|\alpha} + g_{\lambda\beta|\nu|\alpha} - g_{\nu\beta|\lambda|\alpha} - g_{\lambda\nu|\alpha|\beta} - g_{\lambda\alpha|\nu|\beta} + g_{\nu\alpha|\lambda|\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\delta^\lambda_\mu(g_{\lambda\beta|\nu|\alpha} - g_{\nu\beta|\lambda|\alpha} - g_{\lambda\alpha|\nu|\beta} + g_{\nu\alpha|\lambda|\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(g_{\mu\beta|\nu|\alpha} - g_{\nu\beta|\mu|\alpha} - g_{\mu\alpha|\nu|\beta} + g_{\nu\alpha|\mu|\beta})
\end{aligned}$$

となります。これから

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

であることがすぐに分かり、添え字の入れ替えの計算を行っていけば

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0$$

であることも分かります。さらにリーマンテンソルの共変微分 (クリストッフェル記号が 0 になる地点での)

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta||\lambda}=\Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha|\lambda}-\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta|\lambda}$$

から

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta||\lambda}+R^{\mu}{}_{\nu\lambda\alpha||\beta}+R^{\mu}{}_{\nu\beta\lambda||\alpha}=\Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha|\lambda}-\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta|\lambda}+\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\lambda|\beta}-\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda|\alpha|\beta}+\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda|\beta|\alpha}-\Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\lambda|\alpha}=0$$

となって、ビアンキの恒等式が出てきます。

測地座標系は座標変換 (1) によって求められますが、別の方向から具体的な座標系を求めます。まず、ある点 P を通る測地線を考えます。測地線のアフィンパラメータは τ とし、測地線を表す曲線を $x^{\mu}(\tau)$ とします。測地線方程式は

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}=0$$

このとき、点 P を通過する測地線は点 P での接ベクトル

$$\xi^{\mu}_0=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}|_P$$

と点 P の位置 x^{μ}_0 で決定されます。これは測地線方程式の構造から分かります。簡単のために点 P でのアフィンパラメータは $\tau=0$ とし、$\tau=0$ のとき x^{μ}_0,ξ^{μ}_0 とします。測地線方程式は接ベクトル $\xi^{\mu}=dx^{\mu}/d\tau$ を使うと

$$\begin{aligned}\xi^{\mu}&=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\\ \frac{d\xi^{\mu}}{d\tau}&+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=0\end{aligned}$$

という連立の 1 階微分方程式になっています。なので、1 階微分方程式の解の一意性から、初期条件を $\tau=0$ で x^{μ}_0,ξ^{μ}_0 と与えれば、$\tau=0$ の付近において 1 つの測地線が与えられます。というわけで、この測地線は τ,x_0,ξ_0 による関数で

$$x^{\mu}(\tau)=F^{\mu}(\tau,x_0,\xi_0)$$

と書けます。さらに τ を $\tau'=\tau/l$ (l は定数) と変換しても測地線方程式は変更されないので

$$x^{\mu}(\tau)=F^{\mu}(\tau/l,x_0,l\xi_0)\quad\Big(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}|_P\ \Rightarrow\ \frac{dx^{\mu}}{d\tau'}|_P=l\frac{dx^{\mu}}{d\tau}|_P=l\xi_0\Big)$$

$F^{\mu}(\tau,x_0,\xi_0)$ でのある点は τ によって決まり、それに対応する点が $F^{\mu}(\tau/l,x_0,l\xi_0)$ では $l=\tau$ で与えられるとすれば

$$x^{\mu}(\tau)=F^{\mu}(1,x_0,\tau\xi_0)$$

ここで

$$y^\mu = \tau\xi_0$$

とすれば、$x^\mu = x^\mu(\tau)$ は x_0 と y^μ で決まるので

$$x^\mu = G^\mu(x_0, y)$$

と書けます。これを τ で微分すると左辺は

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \xi_0^\mu$$

右辺は

$$\frac{dG^\mu}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{dy^\nu}{d\tau}\frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0} = \xi_0^\nu\frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0}$$

となるので

$$\xi_0^\mu = \xi_0^\nu\frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0}$$

これから

$$\frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0} = \delta_\nu^\mu$$

となっていることが分かり、$\partial G^\mu/\partial y^\nu$ $(\partial x^\mu(y)/\partial y^\nu)$ のヤコビアンは 0 でないです。このため、$x^\mu = x^\mu(x_0, y) = G^\mu(x_0, y)$ の y^μ からの変換に対する逆変換も存在します。というわけで、y^μ は x_0^μ, x^μ からの座標変換として

$$y^\mu = y^\mu(x_0, x)$$

として存在します。もっと見やすい形で同じことをすれば

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}|_{\tau=0} = \xi_0^\mu 0.21cm] \qquad \frac{dx^\mu}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = (\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\nu}{\partial \tau})_{\tau=0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0}\frac{\partial y^\nu}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0}\xi_0^\nu$$

から

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\Big|_{\tau=0} = \delta_\nu^\mu$$

となります。

　というわけで、座標系 x^μ から別の座標系 y^μ が作れたことになります。このようにして点 P 付近で定義される座標系 $y^\mu = \tau\xi_0^\mu$ のことを normal coordinate もしくは Riemann normal coordinate と呼びます。日本語だと標準

座標と呼ばれることもありますが、そんなに定着していないです。normal coordinate での原点は $y^\mu = 0$ $(\tau = 0)$ なので点 P です。normal coordinate は点 P(原点) 付近で与えられていることに注意してください。

点 P を通る測地線は

$$y^\mu = \tau\xi_0$$
$$x^\mu = G^\mu(x_0, y) = F^\mu(1, x_0, t\xi_0)$$

によって与えられるので、この測地線は $y^\mu = \tau\xi_0$ で表されます。y^μ による座標系での測地線方程式は

$$\frac{d^2y^\mu}{d\tau^2} + \overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0$$

となっていて、これは原点 (点 P) である $y^\mu = 0$ を通ります。$y^\mu = \tau\xi_0$ を入れると

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\xi_0^\alpha\xi_0^\beta = 0$$

よって、原点 $y^\mu = 0$ を通る測地線で ξ_0^μ が任意定数なので、原点において

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(0) = 0$$

となっています。というわけで、座標系 y^μ では原点 (点 P) でクリストッフェル記号が 0 になるので、測地座標系になっています。

normal coordinate になるための条件はここまでの話から分かるように、接ベクトル $dx^\mu/d\tau$ が定数 ξ_0^μ で、その結果測地線が $y^\mu = \tau\xi_0^\mu$ になるということです (必要十分条件になっている)。もしくは、その結果出てきた

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\xi_0^\alpha\xi_0^\beta = 0$$

これに τ^2 をかけた

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = 0$$

これも normal coordinate の条件です (どちらの条件も等価)。

$x^\mu(\tau)$ を $\tau = 0$ (点 P) で展開してみると、測地線方程式によって

$$\begin{aligned}
x^\mu(\tau) &= x^\mu(P) + \frac{dx^\mu}{d\tau}|_{\tau=0}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}|_{\tau=0}\tau^2 + \cdots \\
&= x^\mu(P) + \xi_0\tau - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P)\frac{dx^\alpha}{d\tau}|_{\tau=0}\frac{dx^\alpha}{d\tau}|_{\tau=0}\tau^2 + \cdots \\
&= x^\mu(P) + \xi_0\tau - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P)\xi_0^\alpha\xi_0^\beta\tau^2 + \cdots \\
&= x^\mu(P) + y^\mu - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P)y^\alpha y^\beta + \cdots
\end{aligned}$$

この展開は (2) から分かるように座標変換になっています。

normal coordinate では原点でクリストッフェル記号が 0 になるので、原点周りでの展開を考えることができます。適当なテンソル $W_{\mu\nu\cdots}(y)$ があったとき、normal coordinate の原点で

$$W_{\mu\nu\cdots}(y)=W_{\mu\nu\cdots}(0)+\frac{\partial W_{\mu\nu\cdots}}{\partial y^\alpha}\Big|_0 y^\alpha+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 W_{\mu\nu\cdots}}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\Big|_0 y^\alpha y^\beta+\cdots$$

と展開できます。0 は原点を表します。ここからは normal coordinate で考えるので、微分 ∂_μ やクリストッフェル記号は y^μ によるものです。

normal coordinate でのクリストッフェル記号（$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$ を $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ とします）も

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(y)=\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(0)+(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\lambda+\frac{1}{2!}(\partial_\rho\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\rho y^\lambda+\cdots$$

と展開します ($\partial_\lambda=\partial/\partial y^\lambda$)。normal coordinate では

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(y)y^\alpha y^\beta=0$$

なので、右辺に $y^\alpha y^\beta$ をかけたとき

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(0)y^\alpha y^\beta=0 \tag{3a}$$

$$(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\lambda y^\alpha y^\beta=0 \tag{3b}$$

$$(\partial_\rho\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\rho y^\lambda y^\alpha y^\beta=0 \tag{3c}$$

である必要があります。2 番目の (3b) は、$y^\lambda y^\alpha y^\beta$ の並びは入れ替えられることを利用して添え字を付け替えると ($\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$)

$$\begin{aligned}0&=(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\lambda y^\alpha y^\beta\\&=\frac{1}{6}[(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0+(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\beta\alpha})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\lambda\alpha})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\alpha\lambda})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\lambda})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\lambda\beta})|_0]y^\lambda y^\alpha y^\beta\\&=\partial_{(\lambda}\Gamma^\mu_{\alpha\beta)})|_0 y^\lambda y^\alpha y^\beta\end{aligned}$$

と変形できます。添え字の ( ) は

$$T_{(\mu\alpha\beta)}=\frac{1}{3!}(T_{\mu\alpha\beta}+T_{\mu\beta\alpha}+T_{\alpha\mu\beta}+T_{\alpha\beta\mu}+T_{\beta\alpha\mu}+T_{\beta\mu\alpha})$$

という対称化の記号です。そうすると、クリストッフェル記号の関係として

$$\partial_{(\lambda}\Gamma^\mu_{\alpha\beta)})|_0=0$$

というのが与えられます。もしくは、$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ から

$$
\begin{aligned}
(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0+&(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\beta\alpha})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\lambda\alpha})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\alpha\lambda})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\lambda})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\lambda\beta})|_0\\
&=2[(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\lambda\alpha})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\lambda})|_0]
\end{aligned}
$$

と出来るので

$$
(\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0+(\partial_\beta\Gamma^\mu_{\lambda\alpha})|_0+(\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\lambda})|_0=0
$$

同様に 3 番目の (3c) は 4 つの添え字の対称化によって (添え字の入れ替えで 24 項出てくる)

$$
(\partial_\rho\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta})|_0 y^\rho y^\lambda y^\alpha y^\beta=0
$$

4 つの場合はの対称化は (面倒だったので添え字をローマ文字にしています)

$$
\begin{aligned}
T_{(abcd)}=\frac{1}{4!}(&T_{abcd}+T_{abdc}+T_{bacd}+T_{badc}\\
&+T_{acbd}+T_{acdb}+T_{cabd}+T_{cadb}\\
&+T_{adbc}+T_{adcb}+T_{dabc}+T_{dacb}\\
&+T_{bcad}+T_{bcda}+T_{cbad}+T_{cbda}\\
&+T_{bdac}+T_{bdca}+T_{dbac}+T_{dbca}\\
&+T_{cdab}+T_{cdba}+T_{dcab}+T_{dcba})
\end{aligned}
$$

よって、normal coordinate のときクリストッフェル記号の関係 (3a)〜(3c) は

$$
\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(0)=0 \tag{4a}
$$

$$
\partial_{(\lambda}\Gamma^\mu_{\alpha\beta)})|_0=0 \tag{4b}
$$

$$
(\partial_{(\rho}\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta)})|_0=0 \tag{4c}
$$

という対称化された関係に書き換えられます。これらから予想できるように、さらに高次まで展開すれば

$$
(\partial_{(\rho_1}\cdots\partial_{\rho_n}\Gamma^\mu_{\alpha\beta)})|_0=0
$$

という関係が出てきます。これらは (1) の導出と同じ手順からも出てきます (クリストッフェル記号の変換則をさらに微分していけばいい)。

次にリーマンテンソルを見ていきます。リーマンテンソルは

$$
R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}=\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\beta}-\Gamma^\mu_{\beta\rho}\Gamma^\rho_{\nu\alpha}+\Gamma^\mu_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\nu\beta}
$$

と定義されているので、normal coordinate の原点では (クリストッフェル記号が 0)

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(0) = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) \quad (\Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha}(0) = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}(0) = (\partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta})|_0)$$

添え字を動かしたリーマンテンソルを足すことで

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(0) + R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}(0) &= \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\nu}(0) - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu|\beta}(0) \\
&= -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) + \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha}(0) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\nu}(0) \\
&= -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta} \quad (\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\nu}(0) + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) + \Gamma^{\mu}_{\beta\nu|\alpha}(0) = 0) \\
\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta}(0) &= -\frac{1}{3}(R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(0) + R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}(0))
\end{aligned}$$

という関係が求められます。もしくは、対称化の記号を使うと

$$\begin{aligned}
2\partial_{(\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu)\alpha}(0) &= -\frac{2}{3}R^{\mu}{}_{(\nu\alpha)\beta}(0) \quad (R^{\mu}{}_{(\nu\alpha)\beta} = \frac{1}{2}(R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta})) \\
\partial_{(\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu)\alpha}(0) &= \frac{1}{3}R^{\mu}{}_{(\nu\alpha)\beta}(0)
\end{aligned} \tag{5}$$

と書けます。最後では

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(0) + \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}(0) + \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}(0) = 0 \\
\partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}(0) = -2\partial_{(\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha)\beta}(0))
\end{aligned}$$

を使っています。

リーマンテンソルを原点で共変微分すると

$$\begin{aligned}
R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta||\lambda}(0) &= \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha||\lambda}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta||\lambda}(0) \\
&\quad - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho||\lambda}(0)\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}(0) - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}(0)\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha||\lambda}(0) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho||\lambda}(0)\Gamma^{\rho}_{\nu\beta}(0) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}(0)\Gamma^{\rho}_{\nu\beta||\lambda}(0) \\
&= \Gamma^{\mu}_{\nu\beta|\alpha|\lambda}(0) - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha|\beta|\lambda}(0)
\end{aligned}$$

これから (見づらくなるので (0) を省きます)

$$
\begin{aligned}
&R^\mu{}_{\nu\alpha\beta||\lambda}+R^\mu{}_{\nu\alpha\lambda||\beta}+R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu||\beta}+R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta||\nu}+R^\mu{}_{\beta\alpha\lambda||\nu}+R^\mu{}_{\beta\alpha\nu||\lambda}\\
&\quad=\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha|\lambda}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\beta|\lambda}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha|\beta}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}\\
&\qquad+\Gamma^\mu_{\lambda\nu|\alpha|\beta}-\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\nu|\beta}+\Gamma^\mu_{\lambda\beta|\alpha|\nu}-\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}\\
&\qquad+\Gamma^\mu_{\beta\lambda|\alpha|\nu}-\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\lambda|\nu}+\Gamma^\mu_{\beta\nu|\alpha|\lambda}-\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda}\\
&\quad=2\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha|\lambda}+2\Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha|\beta}+2\Gamma^\mu_{\lambda\beta|\alpha|\nu}-2\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}-2\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}-2\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda}\\
&\quad=2(\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha|\lambda}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha|\beta}+\Gamma^\mu_{\lambda\beta|\alpha|\nu}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}-\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}-\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda})\\
&\quad=2(\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha|\lambda}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda|\alpha|\beta}+\Gamma^\mu_{\lambda\beta|\alpha|\nu}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}-\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}-\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda})\\
&\quad=2(-\Gamma^\mu_{\alpha\beta|\nu|\lambda}-\Gamma^\mu_{\alpha\nu|\lambda|\beta}-\Gamma^\mu_{\alpha\lambda|\beta|\nu}-\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}-\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}-\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda})\\
&\quad=\;-4(\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda}+\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}+\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu})\\
&\quad=\;-2(\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\nu|\lambda}+\Gamma^\mu_{\beta\alpha|\lambda|\nu}+\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\lambda|\beta}+\Gamma^\mu_{\nu\alpha|\beta|\lambda}+\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\beta|\nu}+\Gamma^\mu_{\lambda\alpha|\nu|\beta})
\end{aligned}
$$

途中で、(4c) と $\Gamma^\mu_{\nu\beta}=\Gamma^\mu_{\beta\nu}$, $\Gamma^\mu_{\nu\beta|\alpha|\lambda}=\Gamma^\mu_{\nu\beta|\lambda|\alpha}$ から

$$
\Gamma^\mu_{(\nu\beta|\alpha|\lambda)}(0)=(\partial_{(\alpha}\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\beta)})|_0=\frac{1}{6}(\partial_\alpha\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\beta}+\partial_\alpha\partial_\nu\Gamma^\mu_{\lambda\beta}+\partial_\alpha\partial_\beta\Gamma^\mu_{\lambda\nu}+\partial_\nu\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\alpha\beta}+\partial_\lambda\partial_\beta\Gamma^\mu_{\alpha\nu}+\partial_\nu\partial_\beta\Gamma^\mu_{\alpha\lambda})|_0=0
$$

となることを使っています。これは、対称化の記号を使って書けるように添え字の位置を動かすことで

$$
\partial_{(\lambda}\partial_\alpha\Gamma^\nu_{\beta)\mu}(0)=-\frac{1}{2}R_{\mu(\lambda}{}^\nu{}_{\alpha||\beta)}(0)
$$

となります。

リーマンテンソルに対する今見てきた結果を使うと、$W_{\mu\nu\cdots}$ の展開を共変微分にできます。例えば $W_{\mu\nu}$ に対してとすると、共変微分は

$$
W_{\mu\nu||\alpha}(0)=W_{\mu\nu|\alpha}(0)
$$

$W_{\mu\nu||\alpha||\beta}$ では (5) を使って ((0) は省きます)

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu||\alpha||\beta}y^\alpha y^\beta &= \big(\partial_\beta W_{\mu\nu||\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha}W_{\mu\nu||\rho} - \Gamma^\rho_{\beta\nu}W_{\mu\rho||\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}W_{\rho\nu||\alpha}\big)y^\alpha y^\beta \\
&= \big(\partial_\beta(\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu}W_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}W_{\mu\rho})\big)y^\alpha y^\beta \\
&= \big(\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - (\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\mu})W_{\rho\nu} - (\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\nu})W_{\mu\rho}\big)y^\alpha y^\beta \\
&= \big[\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \frac{1}{2}((\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\mu})W_{\rho\nu} + (\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\mu})W_{\rho\nu}) - \frac{1}{2}((\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\nu})W_{\mu\rho} + (\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\nu})W_{\mu\rho})\big]y^\alpha y^\beta \\
&= \big[\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\mu}) + (\partial_\alpha\Gamma^\rho_{\beta\mu}))W_{\rho\nu} - \frac{1}{2}((\partial_\beta\Gamma^\rho_{\alpha\nu}) + (\partial_\alpha\Gamma^\rho_{\beta\nu}))W_{\mu\rho}\big]y^\alpha y^\beta \\
&= \big[\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^\rho{}_{(\alpha\beta)\mu}W_{\rho\nu} - \frac{1}{3}R^\rho{}_{(\alpha\beta)\nu}W_{\mu\rho}\big]y^\alpha y^\beta \\
&= \big[\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \frac{1}{6}(R^\rho{}_{\alpha\beta\mu} + R^\rho{}_{\beta\alpha\mu})W_{\rho\nu} - \frac{1}{6}(R^\rho{}_{\alpha\beta\nu} + R^\rho{}_{\beta\alpha\nu})W_{\mu\rho}\big]y^\alpha y^\beta \\
&= \big(\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\beta\mu}W_{\rho\nu} - \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\beta\nu}W_{\mu\rho}\big)y^\alpha y^\beta \\
&= \big(\partial_\beta\partial_\alpha W_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\mu\beta}W_{\rho\nu} + \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\nu\beta}W_{\mu\rho}\big)y^\alpha y^\beta \qquad (R^\rho{}_{\alpha\mu\beta} = -R^\rho{}_{\alpha\beta\mu})
\end{aligned}
$$

なので、$W_{\mu\nu}(y)$ の原点での展開は

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(y) &= W_{\mu\nu}(0) + W_{\mu\nu|\alpha}(0)y^\alpha + \frac{1}{2!}W_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0)y^\alpha y^\beta + \cdots \\
&= W_{\mu\nu}(0) + W_{\mu\nu||\alpha}(0)y^\alpha + \frac{1}{2!}(W_{\mu\nu||\alpha||\beta}(0) - \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\mu\beta}W_{\rho\nu} - \frac{1}{3}R^\rho{}_{\alpha\nu\beta}W_{\mu\rho})y^\alpha y^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

となります。これを $W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ と一般化すると

$$
\begin{aligned}
W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(y) = W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(0) &+ W_{\lambda_1\cdots\lambda_n||\alpha}(0)y^\alpha \\
&+ \frac{1}{2!}(W_{\lambda_1\cdots\lambda_n||\alpha||\beta}(0) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}R^\nu{}_{\alpha\lambda_k\beta}(0)W_{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\nu\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}(0))y^\alpha y^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

となります。

計量の場合は

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(y) &= g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2!}\frac{1}{3}(R^\rho{}_{\alpha\mu\beta}(0)g_{\rho\nu}(0) + R^\rho{}_{\alpha\nu\beta}(0)g_{\mu\rho}(0))y^\alpha y^\beta + \cdots \\
&= g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2!}\frac{1}{3}(R_{\nu\alpha\mu\beta}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta}(0))y^\alpha y^\beta + \cdots \\
&= g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2!}\frac{1}{3}(R_{\mu\beta\nu\alpha}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta}(0))y^\alpha y^\beta + \cdots \qquad (R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}) \\
&= g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{2!}\frac{1}{3}(R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta}(0))y^\alpha y^\beta + \cdots \\
&= g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

同じ点なので ${R^\rho}_{\alpha\mu\beta||\lambda}(0)$ の添え字は $g_{\rho\nu}(0)$ で動かせます（もしくは ${R^\rho}_{\alpha\mu\beta||\lambda}g_{\rho\nu}$ の後に原点に持っていく）。また、これに y^ν をかけてみると、リーマンテンソルの反対称性 $R_{\mu\nu\alpha\beta}=-R_{\nu\mu\alpha\beta}=-R_{\mu\nu\beta\alpha}$ から第一項以外消えるので（高次の項も同じ構造なので消える）

$$g_{\mu\nu}(y)y^\nu=g_{\mu\nu}(0)y^\nu \tag{6}$$

になっていることが分かります。$g_{\mu\nu}(0)$ は定数なので $y'^\mu=C^\mu_\nu y^\nu$ (C^μ_ν は定数) でミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ に持っていけて、$g_{\mu\nu}(0)=\eta_{\mu\nu}$ と出来ます。このため、原点において局所的にミンコフスキー計量による空間が出来上がるので、測地座標系を局所慣性系とも呼ぶ理由が分かると思います。

$g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}(0)+\frac{1}{3}{R^\mu}_\alpha{}^\nu{}_\beta(0)y^\alpha y^\beta+\cdots$$

となっています。これは、y^α の 2 次までで

$$\begin{aligned}
g_{\mu\rho}g^{\rho\nu}&=(g_{\mu\rho}(0)-\frac{1}{3}R_{\mu\alpha\rho\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\cdots)(g^{\rho\nu}(0)+\frac{1}{3}{R^\rho}_\alpha{}^\nu{}_\beta(0)y^\alpha y^\beta+\cdots)\\
&=\delta^\nu_\mu-\frac{1}{3}g^{\rho\nu}(0)R_{\mu\alpha\rho\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\frac{1}{3}g_{\mu\rho}(0){R^\rho}_\alpha{}^\nu{}_\beta(0))y^\alpha y^\beta+\cdots\\
&=\delta^\nu_\mu
\end{aligned}$$

となることから確かめられます。行列式 $g=\det g_{\mu\nu}$ は、$g(0)=\det g_{\mu\nu}(0)$ を使って

$$\det g^{\alpha\beta}(0)\det g_{\mu\nu}=g^{-1}(0)g\qquad(\det g^{\alpha\beta}=g^{-1})$$

このようにしておきます。そうすると、det は単位行列を I とし微小な行列を M としたとき

$$\det[I+M]=1+\mathrm{tr}M+\cdots$$

と展開できることを利用して

$$\begin{aligned}
\frac{g(y)}{g(0)}=&\ \det g^{\alpha\beta}(0)\det g_{\mu\nu}\\
=&\ \det[g^{\mu\rho}(0)g_{\rho\nu}]\\
=&\ \det[g^{\mu\rho}(0)(g_{\rho\nu}(0)-\frac{1}{3}R_{\rho\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\cdots)]\\
=&\ \det[\delta^\mu_\nu-\frac{1}{3}{R^\mu}_{\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\cdots]\\
=&\ 1-\frac{1}{3}{R^\mu}_{\alpha\mu\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\cdots\\
=&\ 1-\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}(0)y^\alpha y^\beta+\cdots
\end{aligned}$$

となります。$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}(0)y^{\alpha}y^{\beta}$ は α,β は潰れて $T^{\mu}_{\ \nu}$ のようになっているので、これのトレースとして $T^{\mu}_{\ \mu}$ としています。$g_{\mu\nu}(0)$ をミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ とすれば $\det\eta_{\mu\nu}=-1$ なので

$$g(y)=-1+\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}(0)y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots$$

また、$g(y)$ を原点周りの展開として

$$\frac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}=gg^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\alpha}}$$

と、$\partial g_{\mu\nu}/\partial y^{\alpha}|_0=0$ から

$$\begin{aligned}
g(y)&=g(0)+\frac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}|_0y^{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}}|_0y^{\alpha}y^{\beta}\cdots\\
&=g(0)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}(gg^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\beta}})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)+\frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial y^{\alpha}}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\beta}})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\frac{1}{2}(g\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^{\beta}})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\frac{1}{2}(gg^{\mu\nu}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)+\frac{1}{2}(gg^{\mu\nu}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial y^{\alpha}\partial y^{\beta}})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)-\frac{1}{6}g(0)g^{\mu\nu}(0)\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}(R_{\mu\rho\nu\lambda}(0)\delta^{\rho}_{\beta}y^{\lambda}+R_{\mu\rho\nu\lambda}(0)y^{\rho}\delta^{\lambda}_{\beta})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)-\frac{1}{6}g(0)g^{\mu\nu}(0)\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}(R_{\mu\beta\nu\lambda}(0)y^{\lambda}+R_{\mu\rho\nu\beta}(0)y^{\rho})|_0y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)-\frac{1}{6}g(0)g^{\mu\nu}(0)(R_{\mu\beta\nu\alpha}(0)+R_{\mu\alpha\nu\beta}(0))y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)-\frac{1}{3}g(0)g^{\mu\nu}(0)R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)-g(0)\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}(0)y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots\\
&=g(0)(1-\frac{1}{3}R_{\alpha\beta}(0)y^{\alpha}y^{\beta}+\cdots)
\end{aligned}$$

となって同じ形になります。

今の計量の展開で noormal coordinate になっていることを確かめます。(6) を微分すると

$$g_{\mu\nu|\alpha}y^{\nu}+g_{\mu\alpha}=g_{\mu\alpha}(0)$$

となり、これに y^{μ} をかけて (6) を使うと

$$g_{\mu\nu|\alpha}y^{\mu}y^{\nu}+g_{\mu\alpha}y^{\mu}=g_{\mu\alpha}(0)y^{\mu}$$

$$g_{\mu\nu|\alpha}y^{\mu}y^{\nu}=0$$

もしくは y^α をかければ

$$g_{\mu\nu|\alpha}y^\nu y^\alpha + g_{\mu\alpha}y^\alpha = g_{\mu\alpha}(0)y^\alpha$$
$$g_{\mu\nu|\alpha}y^\nu y^\alpha = 0$$

そうすると、クリストッフェル記号

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(g_{\nu\alpha|\beta}y^\alpha y^\beta + g_{\nu\beta|\alpha}y^\alpha y^\beta - g_{\alpha\beta|\nu}y^\alpha y^\beta\big) = 0$$

となり、normal coordinate の条件を満たしていることが確かめられます。

計量の微分をリーマンテンソルで表すことも出来ます。計量の共変微分は 0 であるので

$$0 = g_{\mu\nu||\alpha} = g_{\mu\nu|\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}g_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu}g_{\rho\nu}$$

これをさらに共変微分して原点に持っていくと

$$\begin{aligned}0 &= g_{\mu\nu|\alpha||\beta}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\nu||\beta}(0)g_{\mu\rho}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}(0)g_{\mu\rho||\beta}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\mu||\beta}(0)g_{\rho\nu}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\mu}(0)g_{\rho\nu||\beta}(0)\\ &= g_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\nu|\beta}(0)g_{\mu\rho}(0) - \Gamma^\rho_{\alpha\mu|\beta}(0)g_{\rho\nu}(0)\end{aligned}$$

なので

$$g_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0) = \Gamma^\rho_{\alpha\nu|\beta}(0)g_{\mu\rho}(0) + \Gamma^\rho_{\alpha\mu|\beta}(0)g_{\rho\nu}(0)$$

リーマンテンソルに変えると

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0) &= -\frac{1}{3}(R^\rho{}_{\alpha\nu\beta}(0) + R^\rho{}_{\nu\alpha\beta}(0))g_{\mu\rho}(0) - \frac{1}{3}(R^\rho{}_{\alpha\mu\beta}(0) + R^\rho{}_{\mu\alpha\beta}(0))g_{\rho\nu}(0)\\ &= -\frac{1}{3}(R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + R_{\mu\nu\alpha\beta}(0)) - \frac{1}{3}(R_{\nu\alpha\mu\beta}(0) + R_{\nu\mu\alpha\beta}(0))\\ &= -\frac{1}{3}(R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + R_{\mu\nu\alpha\beta}(0) + R_{\nu\alpha\mu\beta}(0) - R_{\mu\nu\alpha\beta}(0))\\ &= -\frac{1}{3}(R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + R_{\mu\beta\nu\alpha}(0))\end{aligned}$$

となります。ちなみに、これから

$$g_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0)y^\alpha y^\beta = -\frac{1}{3}(R_{\mu\alpha\nu\beta}(0) + R_{\mu\beta\nu\alpha}(0))y^\alpha y^\beta = -\frac{2}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta$$

となるので、計量の展開の 2 次の部分が

$$g_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu|\alpha|\beta}(0)y^\alpha y^\beta + \cdots = g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta + \cdots$$

と簡単に出てきます。

最後に、y^μ の 3 次の項までの $W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(y)$ の展開を載せておきます。

$$\begin{aligned}W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(y) = W_{\lambda_1\cdots\lambda_n}(0) &+ W_{\lambda_1\cdots\lambda_n||\alpha}(0)y^\alpha \\ &+ \frac{1}{2!}(W_{\lambda_1\cdots\lambda_n||\alpha||\beta}(0) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}R^\nu{}_{\alpha\lambda_k\beta}(0)W_{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\nu\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}(0))y^\alpha y^\beta \\ &+ \frac{1}{3!}(W_{\lambda_1\cdots\lambda_n||\alpha||\beta||\mu}(0) - \sum_{k=1}^{n}R^\nu{}_{\alpha\lambda_k\beta}(0)W_{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\nu\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n||\mu}(0) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}R^\nu{}_{\alpha\lambda_k\beta||\mu}(0)W_{\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\nu\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}(0))y^\alpha y^\beta y^\mu\end{aligned}$$

これに対応する計量の展開の 3 次の項は

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(R^\rho{}_{\alpha\mu\beta||\lambda}(0)g_{\rho\nu}(0) + R^\rho{}_{\alpha\nu\beta||\lambda}(0)g_{\mu\rho}(0))y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &= -\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(R_{\nu\alpha\mu\beta||\lambda}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0))y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &= -\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(R_{\mu\beta\nu\alpha||\lambda}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0))y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &= -\frac{1}{3!}\frac{1}{2}(R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0) + R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0))y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &= -\frac{1}{3!}R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0)y^\alpha y^\beta y^\lambda\end{aligned}$$

と出せます。ついでに 4 次までの項もくっつけると

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(0) - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}(0)y^\alpha y^\beta &- \frac{1}{3!}R_{\mu\alpha\nu\beta||\lambda}(0)y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &- \frac{1}{5!}\big(6R_{\mu\rho\nu\lambda||\alpha||\beta}(0) - \frac{16}{3}R_{\lambda\mu\rho\sigma}(0)R_{\alpha\nu\beta}{}^\sigma(0)\big)y^\alpha y^\beta y^\lambda y^\rho + \cdots\end{aligned}$$

$g^{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(0) + \frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta(0)y^\alpha y^\beta &+ \frac{1}{3!}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_{\beta||\lambda}(0)y^\alpha y^\beta y^\lambda \\ &+ \frac{1}{5!}\big(6R^\mu{}_\rho{}^\nu{}_{\lambda||\alpha||\beta}(0) + 8R^\mu{}_{\alpha\sigma\beta}(0)R^\sigma{}_\lambda{}^\nu{}_\rho(0)\big)y^\alpha y^\beta y^\lambda y^\rho\end{aligned}$$

行列式は

$$
\begin{aligned}
\frac{g}{g(0)} = 1 - \frac{1}{3}R_{\mu\nu}(0)y^\mu y^\nu - \frac{1}{3!}R_{\mu\nu||\alpha}(0)y^\mu y^\nu y^\alpha \\
- \frac{1}{4!}\big(- \frac{4}{3}R_{\mu\nu}(0)R_{\alpha\beta}(0) + \frac{4}{15}R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}(0)R_{\rho\alpha\beta}{}^\lambda(0) + \frac{6}{5}R_{\mu\nu||\alpha\beta}(0)\big)y^\mu y^\nu y^\alpha y^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

となります。