マクスウェル方程式

マクスウェル方程式について簡単にまとめます。
ここでの単位系はヘヴィサイド・ローレンツ（Heaviside-Lorentz）単位系です。CGS ガウス単位系との違い、4π が出てきません。

　真空でのマクスウェル方程式は、電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$、磁場 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$、電荷密度 ρ、電流密度 $\boldsymbol{j}$ として

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \quad (\boldsymbol{j} = (j_x, j_y, j_z)) \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{1b}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1d}$$

電荷の保存 (連続の方程式) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

これらは電磁気での結果です。この形式を相対論での共変な形式にするときに、計量テンソルは何かというのが問題になります。これは、単純にマクスウェル方程式を共変な形に書き換えれば分かりますが (電磁気の「ミンコフスキー空間」参照)、マクスウェル方程式の構造として出すこともできます (下の補足参照)。
　特殊相対性理論での話から、ミンコフスキー空間の線素は

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (x^0 = ct)$$

計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となっています。電荷の保存は

$$c\rho_{|0} + j^i_{|i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

と書けるので、４元電流密度ベクトルを

$$s^\alpha = (\rho, \frac{\boldsymbol{j}}{c})$$

と定義して

$$s^\alpha_{\ |\alpha} = 0$$

と簡単に書けます。これはただの微分で書いてますが、ミンコフスキー空間なので共変微分と同じ意味です (クリストッフェル記号が 0)。一般的な座標系で考えるなら、共変微分で

$$s^\alpha_{\ ||\alpha} = 0$$

とします。

マクスウェル方程式をテンソル形式にするために

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

として、電磁場テンソル（マクスウェルテンソル）$F^{\mu\nu}$ を定義します。これは反対称テンソルです。また、微分の作用の仕方によって符号を反転させる場合もあります。ここでは、次に見るように $F^{\mu\nu}$ の ν に微分が作用するようにしてマクスウェル方程式を作っています。

電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ を共変微分すると

$$F^{\mu\nu}_{\ \ \ ||\nu} = s^\mu$$

平坦な時空では

$$F^{\mu\nu}_{\ \ \ |\nu} = s^\mu$$

これらはマクスウェル方程式のうちの 2 つの式

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\ ,\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

を表現します。ちなみに、共変微分を実行すれば

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu}{}_{||\nu} &= F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \nu\ \alpha \end{matrix} \right\} F^{\mu\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\ \nu \end{matrix} \right\} F^{\alpha\nu} \\
&= F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + (\log\sqrt{-g})_{|\alpha} F^{\mu\alpha} \\
&= F^{\mu\nu}{}_{|\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{|\nu} F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{|\nu}
\end{aligned}
$$

このような形になっています。これがマクスウェル方程式になることを見ておきます。

共変微分、通常の微分のどちらで行ってもいいので、通常の微分を使います。$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho$ は、$\mu=0$ での場合から

$$
F^{0\nu}_{|\nu} = \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = 0 + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho
$$

と出てきます。$\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}$ でも、例えば $\mu=1$ のとき

$$
F^{1\nu}_{|\nu} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla\times\boldsymbol{B})_x = \frac{1}{c}j_x
$$

となっています。残りの 2 つ

$$
\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0\ ,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0
$$

は

$$
F_{\mu\nu|\lambda} + F_{\lambda\mu|\nu} + F_{\nu\lambda|\mu} = 0
$$

が対応します。これは反対称化の { } を使うことで

$$
\{F_{\mu\nu|\lambda}\} = 0
$$

と書くこともできます。共変微分にしても関係は変わりません。

下付きの $F_{\mu\nu}$ は計量 $g_{\mu\nu}$ で下に落とせば求まるので

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta} = g_{\mu0}g_{\nu0}F^{00} + g_{\mu0}g_{\nu1}F^{01} + g_{\mu0}g_{\nu2}F^{02} + g_{\mu0}g_{\nu3}F^{03} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このようになっているのが分かります。$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ なので、電場の部分だけが符号反転します。

電磁場テンソルには双対テンソルと呼ばれる ${}^*F_{\mu\nu}$ も重要になります。これはレヴィ・チビタテンソル密度によって

$$
{}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}
$$

と定義されます。$F_{\mu\nu}$ がテンソルのとき、この式によって作られるものを双対テンソルと呼びます。電磁場テンソルの双対テンソルは

$$
{}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & -B_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \ {}^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}
$$

となって、電場と磁場が入れ替わった形で現れます。この構造から分かるように、モノポールが存在しているとする時に使うこともできます。

テンソルによる性質ですが、反対称テンソルにおいて

$$
F_{\mu\nu} = \phi_{\mu|\nu} - \phi_{\nu|\mu}
$$

となるような 4 元ベクトル ϕ_μ が存在します。この ϕ_μ に任意のスカラー Λ を微分した $\Lambda_{|\mu}$ を加えると

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= (\phi_\mu + \Lambda_{|\mu})_{|\nu} - (\phi_\nu + \Lambda_{|\nu})_{|\mu} \\
&= \phi_{\mu|\nu} - \phi_{\nu|\mu} + \Lambda_{|\mu|\nu} - \Lambda_{|\nu|\mu} \\
&= \phi_{\mu|\nu} - \phi_{\nu|\mu} = F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

微分の順序は入れ替え可能なのでスカラー A が落ちています。これは電磁気で出てくるゲージ変換で、このような $F_{\mu\nu}$ をゲージ不変と言います。

テンソル密度の式から電磁場テンソル密度は

$$
f^{\mu\nu} = \sqrt{-g}F^{\mu\nu}
$$

これの発散は

$$
f^{\mu\nu}{}_{|\nu} = (\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{|\nu} = \sqrt{-g}F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = \sqrt{-g}s^\mu
$$

なので、真空 (電荷分布がない) と考えてしまえば $s^\mu = 0$ なので

$$f^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$$

これはライスナー・ノルトシュトレーム解を導出するときに使います。

・補足

マクスウェル方程式の構造から計量の形が出てくることを簡単に触れておきます。本質的には偏微分方程式の性質によるものですが、それは省いて求めます。そのために、マクスウェル方程式の一般的な解とせず特殊な場合を使います。

マクスウェル方程式は衝撃波の解を持っていて、このとき波面において電場や磁場の導関数は連続的でなくなります（衝撃波は波面の前後で導関数が連続的でない場合のこと）。例えば、波面の後方では電磁場があり、前方ではないという状況を作れます。今はこの状況を考えます。もう少し具体的な言い方をすれば、電磁場がインパルスのように伝わっているとして、その波面を電場、磁場の導関数が連続的でないほどに鋭いとするということです。

そのような波面を求めるために超曲面を考えます。まず 3 次元曲面の式を

$$t = \frac{1}{c}h(x, y, z)$$

とし、4 次元の超曲面 S の式を

$$w(ct, x, y, z) = h(x, y, z) - ct = 0 \tag{2}$$

とします。w, h の導関数は連続的とします。3 次元曲面を導入したのは $\partial w/\partial t \neq 0$ とし、S 上で ct を x, y, z の関数で書けるようにするためです。このようにすることで、超曲面 S 上での電場、磁場を x, y, z で書けます。つまり、3 次元ベクトル $\boldsymbol{F}(ct, x, y, z) = F_i(ct, x, y, z)$ を S 上で

$$\overline{F}_i(x, y, z) = F_i(h, x, y, z)$$

とできます (S 上で ct, x, y, z は (2) の関係を持つから)。$\overline{F}_i$ の導関数は連続的とします。これを $x^i = (x, y, z)$ で偏微分すれば、$x^0 = ct$ として

$$\frac{\partial \overline{F}_j}{\partial x^i} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i} + \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial F_j}{\partial x^0} \quad (x^0 = h(x^i))$$

発散の形 $i = j$ にすれば

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{F}} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x^0} \cdot \nabla h \tag{3}$$

また、i と j を入れ替えたものを引くと

$$\frac{\partial \overline{F}_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \overline{F}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^j} + \frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial F_j}{\partial x^0} - \frac{\partial h}{\partial x^j}\frac{\partial F_i}{\partial x^0}$$

これは回転の形になっているので

$$\nabla \times \overline{\boldsymbol{F}} = \nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla h \times \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x^0} \tag{4}$$

これらの結果を真空でのマクスウェル方程式（$\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$）に使います。

S 上において、(1b),(1d) は (3) から

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \ \Rightarrow\ \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \cdot \nabla h = 0 \tag{5a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ \Rightarrow\ \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \nabla h = 0 \tag{5b}$$

(1a),(1c) は (4) から

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow\ \nabla \times \overline{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{c}\nabla h \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{5c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow\ \nabla \times \overline{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{c}\nabla h \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{5d}$$

(5c),(5d) に対して ∇h の内積を取ると

$$\boldsymbol{X} \cdot (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) = 0$$

から

$$\nabla h \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{B}}) - \frac{1}{c}\nabla h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{6a}$$

$$\nabla h \cdot (\nabla \times \overline{\boldsymbol{E}}) + \frac{1}{c}\nabla h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{6b}$$

今度は (5c),(5d) に対して ∇h のベクトル積を取ると

$$\boldsymbol{X} \times (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y})\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^2\boldsymbol{Y}$$

から

$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})-((\frac{1}{c}\nabla h\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})-\frac{1}{c}\nabla h\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$
$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})-((\frac{1}{c}\nabla h\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})+\frac{1}{c}\nabla h\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

これらの第 3 項に (5c),(5d) を入れれば

$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})-((\frac{1}{c}\nabla h\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})-(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})=0$$
$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})-((\frac{1}{c}\nabla h\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})+\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

さらに (6a),(6b) を使って

$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})-(-\nabla h\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})-(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})=0$$
$$\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})-(\nabla h\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})\nabla h-\frac{1}{c}(\nabla h)^2\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t})+\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

変形させれば

$$\frac{1}{c}(1-(\nabla h)^2)\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}+\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})+\nabla h\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})\nabla h$$
$$\frac{1}{c}(1-(\nabla h)^2)\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}}+\nabla h\times(\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}})-\nabla h\cdot(\nabla\times\overline{\boldsymbol{B}})\nabla h$$

これらに対して $(\nabla h)^2\neq 1$ と $(\nabla h)^2=1$ の場合を考えます。$(\nabla h)^2\neq 1$ であれば左辺は時間微分の式になり、$\partial\boldsymbol{E}/\partial t,\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ を求められる形になります。さらに、右辺はすべて連続的になっているので ($h,\overline{\boldsymbol{E}},\overline{\boldsymbol{B}}$ の導関数は連続的)、$\partial\boldsymbol{E}/\partial t,\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ も連続的になります。つまり、電場、磁場の導関数が連続的になってしまうので、これは今欲しい結果ではないです。

次に $(\nabla h)^2=1$ とします。このとき左辺は 0 になるので、$\partial\boldsymbol{E}/\partial t,\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ を決められないです。つまり、連続的でないとすることが可能になります。というわけで、h は $(\nabla h)^2=1$ に従うとします。

w は

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t})^2=1\ ,\ (\nabla w)^2=(\nabla h)^2$$

なので、$1-(\nabla h)^2=0$ は

$$(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t})^2-(\nabla w)^2=0 \tag{7}$$

と同じ意味です。よって、この式に従う超曲面 S の前後で導関数は連続的とならないので、これが今欲しい波面となります。(7) から、w は

$$w = ct - ct_0 - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \tag{8}$$

と与えられ、球面になります。t_0, x_0, y_0, z_0 は任意定数です。

次に超曲面 S の進み方を求めます。(7) はルートの符号をマイナスに取れば (符号は S の進行方向を決める)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c\sqrt{(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2} = 0$$

と書けます。これはハミルトン・ヤコビ方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = 0$$

と同じ形をしています。H はハミルトニアンです。このため

$$H = c\sqrt{(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2} = c\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

とすれば、解析力学の話をそのまま適用でき、S の運動を粒子的に見れます。なので、S は何かの曲線の集まりとなります。その曲線がどのようになっているかは運動方程式を解けば分かります。

運動方程式は正準変数 (x, w_x) に対する正準方程式として

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w_x} = \frac{cw_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}\ ,\ \frac{dw_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

と与えられます (他の成分も同様)。2 番目の式から w_x は t に依存しない定数と分かるので、1 番目の式は積分できて

$$x - x_0 = \frac{cw_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}(t - t_0)\ ,\ y - y_0 = \frac{cw_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}(t - t_0)\ ,\ z - z_0 = \frac{cw_z}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}(t - t_0)$$

これらから直線で動いていることが分かり、

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = c^2(t-t_0)^2 \tag{9}$$

から (8) を再現します。よって、S はこれらによって与えられる速度 c で進んでいる直線によって構成されています。

この結果を物理の言葉にします。超曲面 S は 4 次元における 3 次元の面で、電磁場による波面のことです。そうすると、波面が速度 c で動く直線となっているので、幾何光学での光線 (light ray) になっている言えます (波の

性質を無視して光を直線に近似したもの)。波面で連続的でないというのも、光による信号の伝達に対応した設定になっています (光が伝わっている領域と伝わっていない領域とで連続性がなくなる)。この結果から、光は原点から半径 R の地点へ速度 c で進むことから (9) の形になる、という特殊相対性理論の始めによく出てくる言い回しとなります。なので、ここでした話は、光の当たり前の性質と思えば必要のないものです。

このように、波面で電場、磁場の導関数が連続的でないとしたことから、特殊相対性理論で出てくる光線が出てきます。そして、(9) を微小な線素とすることで

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$$

となり、マクスウェル方程式の構造からミンコフスキー空間の計量を与えられます。

ここでの結果は偏微分方程式の数学的な取り扱い (初期値問題) を無視して求めたものです。偏微分方程式の言葉で、超曲面 (波面)S は characteristic hypersurface、超曲面 S の直線は bicharacteristic となります。