

多様体

「ベクトル、1-形式、テンソル」で無視したを多様体の話を簡単にしています。
座標変換やテンソルの作り方は「ベクトル、1-形式、テンソル」と同じなので省いています。
最後にベクトル空間でのテンソル積の話をしています。

微分可能多様体においてテンソルを定義します。多様体は数学的にいろいろと分類されますが、ここでは微分可能ということだけでよく、それが微分可能多様体と呼ばれます。ここで多様体と言ったら微分可能多様体を指し(座標変換の写像が少なくとも1回は微分可能)、多様体は M と表記します。

多様体は数学的なことを省いて言えば、空間を一般化したものです(何かよく分からないが点が沢山集まっているもの)。面倒でしたら、物理で言う空間の数学用語が多様体なのだとでも思って下さい(空間は点の集まり)。ただし、その一般化された空間(多様体)の中に座標系を設定することができるという条件が付きます。この座標系は多様体全体に渡っている必要がなく、部分的に書ければいいことから局所座標系と呼ばれます(1つの座標系だけでは多様体全ての点を表現できない)。一般化と言っているように、例えば3次元ユークリッド空間や3次元ユークリッド空間上の面は多様体です。

多様体は一般化された空間なので、多様体上の点をユークリッド空間で表そうとします。これは数学用語での同相写像によって行われます。大まかには、ある点が別のある点と1対1対応(全単射)することです(1対1対応は単射の意味で使われることもあるので注意)。つまり、ある点からある点への連続写像が1つに決まり、逆写像で点同士は行き来できることです。この写像によって多様体上のある点を、ユークリッド空間上の対応する点に移したときの座標を局所座標と呼びます。

\mathbb{R}^n を n 個の実数の組 (x^1, x^2, \dots, x^n) による n 次元ユークリッド空間とします。一応、表記上の注意をしておきます。 \mathbb{R}^n は直接的には、1次元実数空間 \mathbb{R} の n 回の直積から作られ、 n 次元実数空間の意味です。そこに、ユークリッド空間の内積を加えれば n 次元ユークリッド空間 E^n となります。しかし、トポロジーとしては \mathbb{R}^n と E^n で同じで、 \mathbb{R}^n は E^n と同じ構造を持つとして扱われます。このため、 \mathbb{R}^n を n 次元ユークリッド空間として使うことが多いです。ここでも、 \mathbb{R}^n を n 次元ユークリッド空間とします。

近傍 (neighborhood) という単語があり、近傍は多様体上の点 p ($p \in M$) を含む任意の開集合と定義されます。しかし、知らなければ何かの集合と思って無視していいです。感覚的に分かりやすい例は、ある点 p からの距離 d が $d < r$ となる点を集めたものです。これは開球 $B_r(p)$ のことで、定義は

$$B_r(p) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}$$

$d(p, q)$ は点 p, q の間の距離です(これは距離が定義されている場合であることに注意)。

多様体上に2つの近傍 U, V を用意します。 U, V は集合として $U \cap V \neq \emptyset$ であるとし(U, V には共通部分がある)。この U, V を n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への写像(変換)をそれぞれ ψ, ϕ とし、 U, V の共通部分にいる点 p を考えます。今は同相写像としているので、多様体の点と \mathbb{R}^n の点は1対1対応で、間を繋ぐ写像 ψ の逆写像 ψ^{-1} が存在します。そうすると、 U の点 p に対応する \mathbb{R}^n の座標 (x^1, \dots, x^n) を持つ点は $\psi(p)$ で与えられ、ここから逆写像 ψ^{-1} によって多様体上の点 p へ戻れます。さらに、そこから写像 ϕ によって V に対応する \mathbb{R}^n の座標 $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ をもった点 $\phi(p)$ へと移せます。つまり、多様体を経由していることを無視することで合成写像 $\phi \circ \psi^{-1}$ は座標変換を表現します(「 \circ 」は二つの写像を合わせる記号(細かいこと無視して言えば、写像 ψ^{-1} を行ってから ϕ の写像を行うこと)。

多様体上の点 p と写像 ψ によって対応する \mathbb{R}^n の座標

$$\psi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$$

を局所座標 (local coordinate) と呼びます。点 p は多様体上の点なので、ユークリッド空間の座標を $x^i(p)$ と書く

のは紛らわしいですが、この表記はよく使われるので使ってしまいます。簡単な例として、多様体を 2 次元ユークリッド空間とし、その点 p と写像 ψ によって局所座標を

$$\psi(p) = (x, y)$$

とすれば、2 次元のデカルト座標になります。

この話が何を言いたいのか簡単にまとめておきます。大事なのは、多様体と \mathbb{R}^n の点が 1 対 1 対応していることで、多様体の点 p を \mathbb{R}^n の点で決定できることです。多様体の点 p からの $\psi(p)$ は、 \mathbb{R}^n の点 $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ と対応します。写像は 1 対 1 対応なので、多様体の点 q からの $\psi(q)$ を $(x^1(q), \dots, x^n(q))$ としたとき、 $x^i(p) = x^i(q)$ となっているなら、点 p と点 q は同じ点でなければいけません。よって、多様体の点 p は $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ によって与えられます。そして、 \mathbb{R}^n での点 (x^1, \dots, x^n) に対して $f_{VU} = \phi \circ \psi^{-1}$ (\mathbb{R}^n 上の関数) を使えば

$$(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) = f_{VU}(x^1, \dots, x^n)$$

という座標変換の式が書けるということです。逆変換も同様に

$$(x^1, \dots, x^n) = f_{UV}(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \quad (f_{UV} = \psi \circ \phi^{-1})$$

となります。 f_{VU}, f_{UV} が 1 回でも微分可能なら微分可能多様体と呼ばれます。

ちなみに、多様体上の集合 U とそれに対応する \mathbb{R}^n での集合があり (正確には開集合)、その同相写像を ψ したとき、 (U, ψ) を多様体の座標近傍 (coordinate neighbourhood) やチャート (chart) と言います。 $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ を座標近傍 (U, ψ) での点 p の局所座標と言い、写像に対応する多様体上の組 (x^1, \dots, x^n) (点 p が動くことを考えれば多様体上での関数の組) を局所座標系と言います。

次に多様体においてベクトル空間を作ります。そのために、曲線を微分すると曲線の接方向になり、それが接ベクトルとなることを利用します。

多様体 M から 1 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^1 への写像 f と、 M 上の滑らかな曲線 λ (\mathbb{R}^1 での微小間隔 t ($-\epsilon < t < \epsilon$) を M 上での曲線 $\lambda(t)$ と対応させる写像) を定義します。そうすると、間隔 $t \in \psi \circ \lambda$ という写像をすれば、 \mathbb{R}^n の対応する点の座標 $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ になります (x^i は t の滑らかな関数)。この写像を言葉で言えば、 t に λ を作用させ M 上での曲線 $\lambda(t)$ に持っていき、 ψ によって M から \mathbb{R}^n に持っていくものです。このとき作れる写像 $f \circ \lambda$ は \mathbb{R}^n への写像を含んでいないので局所座標と無関係になっています。

λ は M 上の曲線を作り、 ψ は \mathbb{R}^n でのその座標を与え、 f は M から \mathbb{R}^1 を作ります。そうすると、

$$f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \lambda$$

という写像が作れ、 $\psi^{-1} \circ \psi$ は恒等写像 (変化させない写像) です。なので、 $f \circ \lambda$ を考え、 $f \circ \lambda(t) = f(\lambda(t))$ とします。 $\lambda(t)$ は ψ の写像がいることを踏まえれば \mathbb{R}^n の座標 (x^1, \dots, x^n) なので、 $f(\lambda(t)) = f(x^i(t))$ と見ます ($f(x^i(t))$ は $f(x^1(t), \dots, x^n(t))$ のこと)。

こういったことを踏まえて曲線の $t = t_0$ での点 p で、 $f \circ \lambda$ を t 微分します。そうすると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}((f \circ \lambda)(t))|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}((f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \lambda)(t))|_{t=t_0} \\
&= \frac{d}{dt}((f \circ \psi^{-1})(x^i(t)))|_{t=t_0} \quad (x^i(t) = \psi \circ \lambda(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(F(x^i(t)))|_{t=t_0} \quad (F = f \circ \psi^{-1}) \\
&= \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial F}{\partial x^i}\right)|_{t=t_0} \\
&= \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f \circ \psi^{-1})(x^i(t))|_{t=t_0} \\
&= \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\right)((f \circ \lambda)(t))|_{t=t_0}
\end{aligned}$$

もしくは、 $f(\lambda(t)) = f(x^i(t))$ から

$$\frac{df(\lambda(t))}{dt}|_{t=t_0} = \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x^1, \dots, x^n)|_{t=t_0}$$

となります。曲線の座標 x^i をパラメータ t で微分しているので、 dx^i/dt は曲線の接ベクトルの成分と言えます。このことと $f \circ \lambda$ が任意であることから、作用している部分を多様体における曲線 $\lambda(t)$ の接ベクトルと定義します。このときの、基底 $\partial/\partial x^i$ は座標基底と呼ばれます。

接ベクトルと言っているのは、 d/dt は曲線の接線方向の微分であるために接ベクトルだからです。 d/dt は座標系に依存していませんが、成分と基底は座標系に依存しています。座標基底 $\partial/\partial x^i$ は座標を与えれば決まり、それはその座標系での座標軸方向の微分 (例えば x, y, z なら x, y, z 方向の微分) になります (曲線における座標軸方向の微分の線形結合だから接ベクトルと言うこともできます)。このような話から、接ベクトルは多様体上の点の接平面上にいと捉えるのが感覚的には分かりやすいです。

というわけで、点 p での接ベクトル X はベクトル成分 $X^i = dx^i/dt$ と座標基底 $\partial/\partial x^i$ から

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

このように、点 p を通る曲線から作られる全ての接ベクトルが接ベクトル空間となります。これで多様体でベクトル空間が作れ、接ベクトル空間 (点 p での接ベクトル空間) $T_p M$ に含まれるものがベクトルとして定義されます。多様体 M であることを表すために $T_p M$ や $T_p(M)$ と表記されます。また、接ベクトルはベクトルと言っていきます。

今度は m 次元多様体 M 上の曲線を n 次元多様体 N 上に写像することを考えます。 M 上の曲線はパラメータ t から $\lambda(t)$ なので、これに M 上の点 p を N 上の点 q に移す写像 f を行えば、 N 上の曲線を作れます。つまり合成写像 $f \circ \lambda$ を作ることで、点 p は $\lambda(t_0)$ 、点 q は $f \circ \lambda(t_0)$ で表せます (t_0 は点 p に対応する値)。これの t 微分を同じように行います。 $\lambda(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))$, $f \circ \lambda(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t))$ とします。点 p での d/dt の成分は

$$X^i = \frac{dx^i}{dt}$$

とします。 N での点 q の座標は M での点 p の座標の写像 f によるので

$$f(x^1, x^2, \dots, x^m) = (y^1, y^2, \dots, y^n)$$

つまり、各 y^i に対しては関数 f_i によって

$$y^i = f_i(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

と書けます。そうすると $f \circ \lambda$ の t 微分は、 x^i の微分は点 p 、 y^i の微分は点 q で行われるとして

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \lambda)}{dt} &= \frac{dy^i}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \lambda) \\ &= \frac{df_i(x^1, \dots)}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \lambda) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \lambda) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x^j} X^j \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \lambda) \end{aligned}$$

y^i 微分の前の部分を Y^i とすれば

$$\frac{d(f \circ \lambda)}{dt} = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \lambda)$$

つまり、 M 上の曲線 $\lambda(t)$ と N 上の曲線 $f \circ \lambda(t)$ の t 微分による係数には

$$Y^i = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} X^j \quad (1)$$

という関係があります。

また、接ベクトルの定義はそのまま方向微分 (directional derivative) の定義と一致します。任意の関数 ϕ に対して

$$\mathbf{X}\phi = X^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

とできて、 \mathbf{X} はライプニッツ則

$$\mathbf{X}(fg) = g\mathbf{X}f + f\mathbf{X}g$$

を満たします。

次に微分形式 (外微分形式) の話をします。1-形式 (1 次微分形式) だけを扱います。多様体 M の接ベクトル空間から \mathbb{R}^1 への写像 df を作ります。 m 次元多様体 M と n 次元多様体 N を用意し、 M の点 p から N の点 q への写像 f を用意します。 M の点 p での接ベクトル空間を T_pM 、 N の点 q での接ベクトル空間を T_qN とします。点 p での座標を (x^1, x^2, \dots, x^m) 、点 q での座標を (y^1, y^2, \dots, y^n) として

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{Y} = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

そして、 T_pM から T_qN への写像として df を、点 p のベクトル \mathbf{X} から点 q のベクトル \mathbf{Y} への写像として

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = Y \quad (2)$$

と定義します。このとき

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (3)$$

となります。 x^i の微分は点 p 、 y^i の微分は点 q で行われ、 f^i は

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

としています。 (3) を確かめます。 $df(\mathbf{X}) = df(X^i \partial/\partial x^i)$ の定義から、 (3) は

$$df\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

そして、 (1) から

$$X^i df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

なので

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

となります。

多様体 N を \mathbb{R}^1 とすれば、 df は $T_p M$ から $T_p \mathbb{R}^1$ への写像とできます。 $T_p \mathbb{R}^1$ は \mathbb{R}^1 とみなし、 $T_p M$ から \mathbb{R}^1 への写像とします。つまり、1次元接ベクトル空間 (基底が $\partial/\partial y$) でのベクトル $a\partial/\partial y$ において実数 a とみなします (\mathbb{R}^1 なので y^i は $y^1 = y$ のみ)。そうすると、 df は $T_p M$ から \mathbb{R}^1 への写像なので双対空間の元になっています (双対空間はベクトル空間から \mathbb{R}^1 への写像の集まり)。そうすると、 (2) と (3) から

$$df(\mathbf{X}) = df\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y} = (\mathbf{X}f) \frac{\partial}{\partial y}$$

最右辺の X は f に微分として作用しています。そして、 \mathbb{R}^1 とみなすので $\partial/\partial y = 1$ として

$$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f$$

となり、これによって定義される df が 1-形式です。例えば、 f を座標 (x^1, x^2, \dots, x^m) とし、 $f = x^i$ と書くことにし、座標基底 $X = \partial/\partial x^i$ を取ってみると

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

これは双対空間の定義から座標基底 $\partial/\partial x^i$ の双対が dx^i ということを表しています。

m 次元双対空間での基底は dx^i と分かったので、線形結合によって ω を座標 (x^1, x^2, \dots, x^m) において

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \dots + \omega_m dx^m$$

と作ります。 ω_i は定義から実数です。双対空間での基底 dx^i から作られる ω は双対空間にいて、 df と同じ 1-形式で、 m 次元接ベクトル空間から \mathbb{R}^1 への写像です。 ω に任意のベクトル X を与えることで

$$\omega(X) = \omega_1 dx^1(X) + \omega_2 dx^2(X) + \dots + \omega_m dx^m(X)$$

これは実数になります。座標基底に対して行ってみると

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \omega_1 dx^1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \omega_2 dx^2\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \dots + \omega_m dx^m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \omega_1 \frac{\partial x^1}{\partial x^i} + \omega_2 \frac{\partial x^2}{\partial x^i} + \dots + \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^i} + \dots + \omega_m \frac{\partial x^m}{\partial x^i} \\ &= \omega_i \end{aligned}$$

このように $\omega(\partial/\partial x^i)$ は実数 ω_i と等しくなっていることが分かります。

df でも座標 (x^1, x^2, \dots, x^m) での線形結合を考えて

$$df = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + \dots + f_m dx^m$$

座標基底によって

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

となっているので f_i は

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

よって、1-形式 df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m$$

と書けます。 w との違いは、 f から作られる 1-形式 df の形がこのようになっているということです。これも任意のベクトルを与えることで実数になります。

1-形式の座標変換を考えます。座標変換は、 m 次元多様体上の集合 U と V の共通部分の点を U での座標 (x^1, x^2, \dots, x^m) 、 V での座標 (y^1, y^2, \dots, y^m) に対応させることです。なので、多様体上の 1-形式 ω に対して各座標系によって

$$\omega = f_i dx^i, \quad \omega = g_i dy^i$$

の2つの形で書けます。 dy^i は1-形式なので

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

と書けることから

$$f_i dx^i = g_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

よって座標変換において

$$f_i = g_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

という関係を持ちます。

このようにして多様体上に1-形式を作ることができ、「ベクトル、1-形式、テンソル」で見たように1-形式のウェッジ積(もしくはテンソル積)から2, 3, ..., p -形式を定義されます。

微分形式は何をしているのかを具体的にするために、3次元ユークリッド空間の場合を見ておきます。3次元ユークリッド空間に限定してしまうので、単純に定義していきます。より詳しいことは数学の「微分形式」をご覧ください。

まず記号として

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dx \wedge dz = -dz \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy$$

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$$

このように定義します。これは外積やウェッジ積と呼ばれます。このような記号を定義するのは、 dx と dy の積が $dx dy = -dy dx$ のように交換したときに符号が反転するので、その意味を持たせるために \wedge という記号で積を書くというだけです。微分形式での p -形式はウェッジ積によって書いて、3次元では0-形式から3-形式まであり

$$0\text{-形式} : A(x, y, z)$$

$$1\text{-形式} : w_{(1)} = B_1(x, y, z)dx + B_2(x, y, z)dy + B_3(x, y, z)dz$$

$$2\text{-形式} : w_{(2)} = C_1(x, y, z)dy \wedge dz + C_2(x, y, z)dz \wedge dx + C_3(x, y, z)dx \wedge dy$$

$$3\text{-形式} : w_{(3)} = D(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz$$

となっています。 A, B, C, D は関数です。3次元で3-形式までしかないのは、 $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ なので、これ以上ウェッジ積をくっつけても0になってしまうからです。

例えば、1-形式同士のウェッジ積は、 dx, dy, dz の入れ替えで符号が反転することと、 $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ から

$$u \wedge v = (a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) \wedge (b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz)$$

$$= a_1 b_2 dx \wedge dy + a_1 b_3 dx \wedge dz + a_2 b_1 dy \wedge dx + a_2 b_3 dy \wedge dz + a_3 b_1 dz \wedge dx + a_3 b_2 dz \wedge dy$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) dy \wedge dz + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dz \wedge dx + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx \wedge dy$$

となります。

次に外微分 d を定義します。定義は 0-形式 A に作用させると

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

という 1-形式になり、1-形式 $w_{(1)}$ に作用させると

$$\begin{aligned} dw_{(1)} &= dB_1 \wedge dx + dB_2 \wedge dy + dB_3 \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} dx + \frac{\partial B_1}{\partial y} dy + \frac{\partial B_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \dots \\ &= \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} dy + \frac{\partial B_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} dx + \frac{\partial B_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial B_3}{\partial x} dx + \frac{\partial B_3}{\partial y} dy \right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial B_3}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial B_2}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial B_1}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial B_3}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial B_2}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial B_1}{\partial y} dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

という 2-形式になるように与えられてます。この定義から 2-形式 $w_{(2)}$ に作用させると

$$\begin{aligned} dw_{(2)} &= dC_1 \wedge dy \wedge dz + dC_2 \wedge dz \wedge dx + dC_3 \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} dx + \frac{\partial C_2}{\partial y} dy + \frac{\partial C_3}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \dots \\ &= \frac{\partial C_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial C_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial C_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial C_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

という 3-形式に、3-形式に作用させると明らかに

$$dw_{(3)} = dDdx \wedge dy \wedge dz = 0$$

となっています。このように外微分を作用させることで p -形式を $(p+1)$ -形式にすることができます。 dA はベクトル演算の勾配、 $dw_{(1)}$ は回転、 $dw_{(2)}$ は発散の形になっています。また、1-形式 dw にもう一度外微分を作用させると

$$\begin{aligned}
d(dw) &= d\left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}dy + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x}dx + \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y}dy\right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)dx \wedge dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

となっているので

$$dd = 0$$

また、座標 x の dx も外微分 d が作用したものと見なせて、 $d(dx) = 0$ という性質を持っています。

外微分を p -形式 u と q -形式 v による $u \wedge v$ に作用させたとき

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv$$

となっています。これは両辺を展開してみれば確かめられます。

さらに記号として

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy$$

$$*(dy \wedge dz) = dx, \quad *(dz \wedge dx) = dy, \quad *(dx \wedge dy) = dz$$

$$*1 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad *(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$$

という「*」を定義し、ホッジ作用素 (ホッジのスター作用素) と呼びます。0-形式 A には

$$*A = A dx \wedge dy \wedge dz$$

1-形式 $w_{(1)} = B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz$ には

$$*w_{(1)} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

2-形式 $w_{(2)} = C_1 dy \wedge dz + C_2 dz \wedge dx + C_3 dx \wedge dy$ には

$$*w_{(2)} = C_1 dx + C_2 dy + C_3 dz$$

3-形式 $w_{(3)} = Ddx \wedge dy \wedge dz$ には

$$*w_{(3)} = D$$

と作用します。関数部分には作用せずに 1 が dx, dy, dz の部分に作用します。これらから分かるようにホッジ作用素を 2 回作用させると

$$**A = A$$

$$**w_{(1)} = B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz$$

$$**w_{(2)} = C_1 dy \wedge dz + C_2 dz \wedge dx + C_3 dx \wedge dy$$

$$**w_{(3)} = Ddx \wedge dy \wedge dz$$

となっているので、

$$** = 1$$

外微分とホッジ作用素を組み合わせることでベクトルの計算を表現できます。ベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

の内積

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

と同じものを作ります。ベクトルの成分を持たせた 1-形式

$$v = b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz$$

にホッジ作用素を作用させた

$$*v = b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy$$

これと別の 1-形式

$$u = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

とのウェッジ積を取ると

$$\begin{aligned}
u \wedge *v &= (a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) \wedge (b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy) \\
&= a_1 b_1 dx \wedge dy \wedge dz + a_2 b_2 dy \wedge dz \wedge dx + a_3 b_3 dz \wedge dx \wedge dy \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

よって $*(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$ から、これにホッジ作用素を作用させることで

$$*(u \wedge *v) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

となって、内積に一致します。

外積との対応は、上での 1-形式の同士のウェッジ積

$$u \wedge v = (a_2 b_3 - a_3 b_2) dy \wedge dz + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dz \wedge dx + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx \wedge dy$$

から、これにホッジ作用素を作用させることで

$$*(u \wedge v) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) dx + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dy + (a_1 b_2 - a_2 b_1) dz$$

となり、ベクトルの外積に dx, dy, dz がくっついた形で書けます (ベクトルの成分表記 (a, b, c) は定義されていないので内積のように直接一致はしない)。

外微分の形がベクトルの微分演算の勾配、回転、発散の形になっていると言いましたが、ホッジ作用素を使ってウェッジ積を消せます。勾配 ∇f は

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

なので、これは 0-形式の外微分である 1-形式

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

と対応しています。ベクトルの発散 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ は

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

0-形式の外微分の形と内積の形を考えて

$$*u = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge dy$$

これに外微分を作用させると

$$\begin{aligned}
d * u &= da_1 dy \wedge dz + da_2 dz \wedge dx + da_3 dx \wedge dy \\
&= \frac{\partial a_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial a_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial a_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

よって、ホッジ作用素を作用させることで

$$*(d * u) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

となります。回転 $\nabla \times \mathbf{a}$ は

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)$$

これとの対応は、1-形式の外微分がこれと同じ格好をしているので du にホッジ作用素を作用させて

$$*du = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dz$$

となります。このようにベクトル演算と対応させられることから、微分形式の使用例としてマクスウェル方程式がよく持ち出されます。このような計算規則を作った利点は微分方程式へ応用するのが分かりやすいです。

微分形式は一般座標系に持っていくことができます。座標系を x^i とし結果だけ示せば

0-形式 : A

1-形式 : $\omega_i dx^i$

2-形式 : $\frac{1}{2!} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$

3-形式 : $\frac{1}{3!} \omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$

A はスカラー、 ω_i は共変ベクトル ((0,1) のテンソル)、 ω_{ij} は (0,2) の反対称テンソル、 ω_{ijk} は (0,3) の反対称テンソルです。2-形式の $1/2!$ と 3-形式 $1/3!$ は反対称性から出てきています (「テンソルの対称・反対称」参照)。外微分も座標系に依存していません。

テンソルの作り方は「ベクトル、1-形式、テンソル」と同じなので省くことにして、テンソル積をベクトル空間の話から見ておきます。数学的な細かい証明は省きます。ここでは有限次元の実数ベクトル空間のみを扱います。

まず、実数ベクトル空間 V と W を用意します。それぞれのベクトルを v, w とします。このときの双対空間 V^* のベクトルは f とし、基底は e^i とします。双対ベクトル f は V のベクトル v を実数にすると定義され (複素ベクトル空間なら複素数)、 $f(v)$ と書きます。 f は線形汎関数とも呼ばれ、1-形式のことです。このとき基底 e^i は

$$e^i(v) = v^i$$

と定義し、 e^i は双対基底と呼ばれます。

e_i を V の基底とすれば

$$f(v) = f(v^i e_i) = v^i f(e_i)$$

v^i が外に出てるのは f の線形性 $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ のためです。これを使うと

$$v^i = e^i(v) = v^j e^i(e_j)$$

なので

$$e^i(e_j) = \delta_j^i$$

となります。

双対空間 V^* の手続きをもう一度繰り返せば、 f を実数にする V^* の双対空間 $V^{**} = (V^*)^*$ が作れます。そして、雑に言ってしまうと、 V と V^* は同型で、同様に V^* と V^{**} も同型なので、 V と V^{**} も同型になります。このため、 V と V^{**} を同一視できます。

テンソル積の定義を与えます。まず、双線形性を持つ写像を定義します。直積 (Cartesian product) から $V \times W$ を作り、 $V \times W$ をベクトル空間 U へ移す写像として Φ を定義します ($\Phi: V \times W \rightarrow U$)。そして、 U のベクトルを $\Phi(v, w)$ とし ((v, w) は直積の意味)、双線形性 (bilinearity)

$$\alpha \Phi(v, w) = \Phi(\alpha v, w) = \Phi(v, \alpha w)$$

$$\Phi(v_1 + v_2, w) = \Phi(v_1, w) + \Phi(v_2, w)$$

$$\Phi(v, w_1 + w_2) = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, w_2)$$

を持つとします。 α はスカラーです。

U を双線形な写像 $\Phi(v, w)$ のベクトル空間とし、直積に作用させると実数を作るとします。実数へ移すことははっきりさせるために、実数の集まりを \mathbb{R} として $\Phi(v, w)$ のベクトル空間 U を $L(V, W; \mathbb{R})$ と書きます。数学記号を使えば、 $L(V, W; \mathbb{R})$ を

$$\Phi: V \times W \rightarrow L(V, W; \mathbb{R})$$

$$\Phi(v, w): V \times W \rightarrow \mathbb{R} \quad (\Phi(v, w) \in L(V, W; \mathbb{R}))$$

と与えます。このようにして定義される $\Phi(v, w)$ がテンソル積です。

次に実数の形を与えます。そのために、双線形な写像を $V \times W$ でなく $V^* \times W^*$ から作ります。 $V \times W$ でなく双対による $V^* \times W^*$ から $L(V^*, W^*; \mathbb{R})$ を作り、このときの双線形な写像を T とします。つまり、 T は $V^* \times W^*$ を実数にする双線形な写像です。双対空間を使うのはベクトルと双対ベクトルによって実数が作れるからです。なので、双対空間 V^*, W^* のベクトルを f, g とし、双対空間での直積 $V^* \times W^*$ に対して

$$T(f, g) = f(v)g(w)$$

と定義します。 (f, g) は $V^* \times W^*$ の意味です。双線形性を

$$\alpha T(f, g) = T(\alpha f, g) = T(f, \alpha g)$$

$$T(f_1 + f_2, g) = T(f_1, g) + T(f_2, g)$$

$$T(f, g_1 + g_2) = T(f, g_1) + T(f, g_2)$$

と与えます。このときの T が $v \otimes w$ と書かれ

$$v \otimes w(f, g) = f(v)g(w)$$

となり、 $L(V^*, W^*; \mathbb{R})$ は $V \otimes W$ と書かれます。これが $v, w (V, W)$ のテンソル積 $v \otimes w (V \otimes W)$ です。双対ベクトルによる (f, g) を実数にすることから分かるように、 $V \otimes W = V^{**} \otimes W^{**}$ です。

$v \otimes w$ は $\Phi(v, w)$ なので、双線形性は

$$\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w)$$

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$$

と書けます。

特に、 V^* から実数にするという場合では、 $U(V^*; \mathbb{R})$ は $(V^*)^* = V^{**}$ であればよく、 V^{**} は V と同一視できるので、 T は線形な写像です。なので、 V のベクトル v を線形な写像とし

$$v(f) = f(v)$$

となります。このため、 v と f を逆にしても同じになります。

また、テンソル積には

$$(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$$

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

という性質があります。テンソル積 $V^* \otimes W^*$ は $U(V, W; \mathbb{R})$ において、 $V \times W$ から実数への双線形な写像として定義されます。

基底で展開してみます。 V, V^* の基底を a_i, a^i 、 W, W^* の基底を b_i, b^i とすれば

$$v \otimes w(f, g) = v \otimes w(f_i a^i, g_j b^j)$$

定義 (双線形性) から f_i, g_j は外に出せるので

$$v \otimes w(f, g) = f_i g_j v \otimes w(a^i, b^j) = f_i g_j T^{ij}$$

$v \otimes w(a^i, b^j)$ は実数になるので T^{ij} としています。これと

$$\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j(\mathbf{a}^m, \mathbf{b}^n) = \mathbf{a}_i(\mathbf{a}^m) \mathbf{b}_j(\mathbf{b}^n) = \delta_i^m \delta_j^n$$

から

$$f_m g_n \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j(\mathbf{a}^m, \mathbf{b}^n) = f_m g_n \delta_i^m \delta_j^n$$

$$\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_i g_j$$

$$T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_i g_j T^{ij}$$

となることを比較すれば

$$v \otimes w = T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$$

このように基底のテンソル積で書けることが分かります。 T^{ij} は $(2, 0)$ 階のテンソル T の成分です ($T = T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$)。

$W^* \times V$ からのテンソル積は線形になっているために定義の仕方が異なります。 $T(\mathbf{g}, \mathbf{v})$ において、 \mathbf{v} としてある v_0 が与えられているとします (同じ T を使いますが、ここでの T は $W^* \times V$ から実数を作る写像)。そうすると、 T は与えられた v_0 における双対ベクトルを実数にするものと見えます (例えば行列 M_{ij} の j を固定)。双対ベクトルを実数にするので T は V^{**} にいて、 V^{**} は V と同一視できます。つまり、今の T は双線形でなく線形な写像です。なので、 $T = f \otimes w$ は V から W への線形な写像として

$$f \otimes w(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})w \quad (V^* \otimes W)$$

と定義されます。