光の軌道

シュバルツシルト解において光がどう運動するのかのを求めます。光の軌道はヌル測地線になります。

特殊相対論から光は $ds^2=0$ 持つということと、重力場中の運動は測地線になることを使います。変分問題は

$$\delta\int dp\ g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}=0$$

$ds^2=0$ のためにパラメータとして s でなく、別のパラメータ p を使っています。これはパラメータ p を使っているだけで、「近日点」と同じです。なので、赤道面上とすれば「近日点」での結果

$$h=r^2\dot{\varphi}\ ,\ l=(1-\frac{2m}{r})\dot{t}$$

がそのまま使えます。ただし、ドットは s でなく p の微分です。そして、「近日点」では最初にシュバルツシルト線素を ds^2 で割った式

$$\begin{aligned}1&=(1-\frac{2m}{r})(c\frac{dt}{ds})^2-\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}(\frac{dr}{ds})^2-r^2((\frac{d\theta}{ds})^2+\sin^2\theta(\frac{d\varphi}{ds})^2)\\&=(1-\frac{2m}{r})^{-1}c^2l^2-(1-\frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2-\frac{h^2}{r^2}\end{aligned}$$

を出しましたが、ここでは $ds^2=0$ にしているので、ds^2 の代わりに dp^2 で割ることで

$$0=(1-\frac{2m}{r})^{-1}c^2l^2-(1-\frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2-\frac{h^2}{r^2}$$

r は $r(\varphi)$ として

$$\begin{aligned}&\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}=r'=\frac{dr}{dp}\frac{dp}{d\varphi}=\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}\\&\dot{r}=\dot{\varphi}r'=\frac{h}{r^2}r'\\&r(\varphi)=\frac{1}{u(\varphi)}\ ,\ r'=-\frac{u'}{u^2}\end{aligned}$$

これらを使うと u に対する微分方程式として

$$\begin{aligned}0&=c^2l^2-h^2u'^2-h^2u^2(1-2mu)\\u'^2&=\frac{c^2l^2}{h^2}-u^2(1-2mu)\end{aligned}$$

これをさらに φ で微分するともっと解きやすい形になり

$$
\begin{aligned}
0 =& -2h^2u'u'' - 2h^2uu'(1-2mu) + 2mh^2u^2u' \\
=& u'(u'' + u - 3mu^2) \\
u'' + u =& 3mu^2
\end{aligned}
$$

これの解として、$u' = 0 \to u = const$ というのが存在していますが、この解は問題があります。

近日点では解として許しても問題ない状況でしたが、ここでは違います。$u = const$ であるなら、$u = (3m)^{-1}$ にしかならなくなり、これは $r = 3m$ で一定ということになります。逆に言えば、$r = 3m$ のときにしか解として成り立たないということです。近日点では $u = const$ でも角運動量の項が残っていたために、他の $r = const$ の円軌道に連続に変化させられますが、これはそれさえも許さず $r = 3m$ の時のみです。なので、この $u = const$ は一般的に考えるなら無視すべき解です。

というわけで、別の解を求めます。この方程式は厳密に解けないので、邪魔な非線形項 $3mu^2$ を近日点と同じように摂動的な寄与とします。解く前に、$3mu^2$ を微小な摂動とすることで意味のある状況を作れるのかを確かめておきます。m はシュバルツシルト半径 r_s に関係していて

$$
3m = \frac{3}{2}r_s
$$

太陽による重力場として考えるなら、シュバルツシルト半径は 3(km) 程度です。そして、光が最も近づけるのは太陽表面で、その場合で約 10^5(km) です。よって

$$
3mu^2 = \frac{3}{2}\frac{r_s}{r^2}
$$

これは明らかに小さい値になります。なので、小さな摂動として問題ないです。

というわけで、$3m = \epsilon$ として

$$
u'' + u = \epsilon u^2
$$

近日点と同じように、摂動的な解を

$$
u = u_0 + \epsilon v + O(\epsilon^2)
$$

とします。ϵ が 0 次では

$$
u_0'' + u_0 = 0
$$

これの一般解は、A, α を定数として $u_0 = A\sin(\varphi + \alpha)$ で与えられます。α は $\alpha = 0$ に固定します。0 次のみで軌道が表現されているなら、$u_0 = 1/r$ から

$$
r\sin\varphi = \frac{1}{A}
$$

なので、$r\sin\varphi$ が定数 A によって固定されます。赤道面上としているので、例えば xy 平面上の運動とすれば、$r\sin\varphi$ が定数に固定されているために、軌道は x 軸に平行な直線になります (xy 平面上で $r\sin\varphi$ は y 座標になるから)。

　ϵ が 1 次での式は

$$v'' + v = u_0^2$$

定数 A を $1/A = r_0$ とすれば

$$v'' + v = \frac{1}{r_0^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2r_0^2}(1-\cos 2\varphi)$$

これの特解を右辺の形から

$$v_p = B + C\cos 2\varphi$$

と仮定します。式に入れれば

$$-4C\cos 2\varphi + B + C\cos 2\varphi = \frac{1}{2r_0^2}(1-\cos 2\varphi)$$

から、定数 B, C は

$$B = \frac{1}{2r_0^2}\ ,\ C = \frac{1}{6r_0^2}$$

と求まり、特解は

$$v_p = \frac{1}{2r_0^2} + \frac{1}{6r_0^2}\cos 2\varphi$$

よって、u は

$$u = u_0 + \epsilon v = \frac{1}{r_0}\sin\varphi + \epsilon(\frac{1}{2r_0^2} + \frac{1}{6r_0^2}\cos 2\varphi) = \frac{1}{r_0}\sin\varphi + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi)$$

これが 1 次まで考えた時の光の軌道になります。

　感覚的に分かりやすくするために xy 平面上で書くと、$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ から

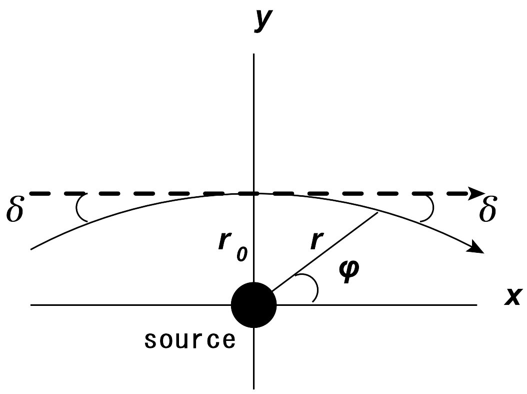

図 1

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0}\frac{y}{r} + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(1 + \frac{1}{3}(\cos^2\varphi - \sin^2\phi)) \\
&= \frac{1}{r_0}\frac{y}{r} + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(1 + \frac{1}{3}(\frac{x^2 - y^2}{r^2})) \\
1 &= \frac{y}{r_0} + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(r + \frac{1}{3}(\frac{x^2 - y^2}{r})) \\
y &= r_0 - \frac{\epsilon}{6r_0}(\frac{3(x^2 + y^2)}{r} + \frac{x^2 - y^2}{r}) \\
&= r_0 - \frac{\epsilon}{3r_0}\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}
$$

xy 平面での図にしたのが図 1 です。点線が 0 次での直線軌道で、曲がっている実線が 1 次の寄与を加えた軌道です。δ が軌道の差を現す角度で、source が重力を作っている物体 (太陽とか) です。

この結果から知りたいのは光の曲がり角 δ です。重力場付近では空間が強く曲がっているために角度がどうなっているのか調べるのは面倒です。しかし、そんな厳密な状況は現在の観測では必要にならないので、現実的な設定をします。例えば、太陽による光の屈折を地球上で調べるとき、地球には太陽の重力の影響はほぼないので、空間は平坦になっていると近似していいはずです。なので、r を無限大に取って、漸近的に平坦になっているとします。平坦なので、光の軌道も直線になっているとできます。

r 無限大では $u = 0$ なので

$$
\frac{1}{r_0}\sin\varphi + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(1 + \frac{1}{3}\cos 2\varphi) = 0
$$

この軌道は原点を中心に対称になっています。このことは、φ が十分小さいとして (r 無限大では x 軸に近づくので φ が小さくなる)、$\sin\varphi \simeq \varphi$ を使うと

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r_0}\sin\varphi + \frac{\epsilon}{2r_0^2}(1 + \frac{1}{3}) \\
&\simeq \frac{1}{r_0}\varphi + \frac{\epsilon}{2r_0^2}\frac{4}{3} \\
\varphi &\simeq -\frac{2\epsilon}{3r_0} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

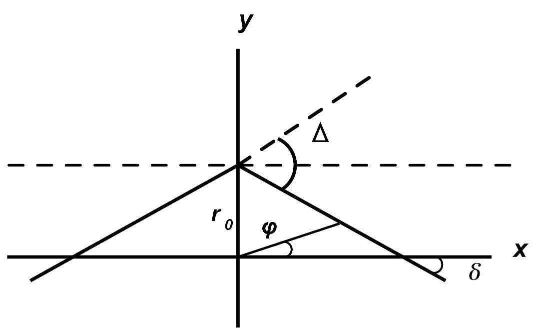

図 2

反対側では

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r_0}\sin(\pi-\varphi)+\frac{\epsilon}{2r_0^2}(1+\frac{1}{3}\cos 2(\pi-\varphi)) \\
&= \frac{1}{r_0}(\sin\pi\cos\varphi-\cos\pi\sin\varphi)+\frac{\epsilon}{2r_0^2}(1+\frac{1}{3}(\cos 2\pi\cos 2\varphi+\sin 2\pi\sin 2\varphi)) \\
&\simeq \frac{1}{r_0}\varphi+\frac{\epsilon}{2r_0^2}(1+\frac{1}{3}) \\
\varphi &\simeq -\frac{2\epsilon}{3r_0}
\end{aligned}
$$

となって、同じ角度になるからです。

もしくは、x, y に対して $|x| \gg y$ として

$$
y = r_0 - \frac{2\epsilon}{3r_0}|x|
$$

この形から明らかに十分遠方で直線になっており、原点を中心に対称な 2 本の直線があることがわかります。このときの角度 φ もこれから

$$
\tan\varphi \simeq \frac{r_0 - \frac{2\epsilon}{3r_0}|x|}{\pm|x|} \simeq \pm\frac{2\epsilon}{3r_0}
$$

なので、$\sin\varphi \simeq \varphi,\ \cos\varphi \simeq 1$ から

$$
\varphi = \pm\frac{2\epsilon}{3r_0}
$$

となるのが分かります。

このような漸近的な直線を交差するように伸ばしたものを図にしたのが図 2 です。点線は角度の関係が分かるように引いた補助線です。$y=0$ となるのは、$|x| = 3r_0^2/2\epsilon$ のときなので δ は

$$
\tan\delta = \frac{2r_0\epsilon}{3r_0^2} = \frac{2\epsilon}{3r_0}
$$

よって、δ と φ は等しいことが分かるので、(1) に角度の向きを合わせるならマイナスをつけて

$$\delta = -\frac{2\epsilon}{3r_0} = -\frac{2m}{r_0}$$

となります。

光の曲がりの角度は Δ のことを指すので、屈折の全体角度は

$$\Delta = \frac{4m}{r_0}$$

これを使うと太陽の表面を通る光がどれだけ屈折するのかが分かります。Δ は

$$\Delta = \frac{4m}{r_0} = \frac{4\kappa M}{c^2 r_0}$$

なので、重力定数 κ、r_0 に太陽の半径 6.96×10^{10}(cm)、M に太陽の質量 1.99×10^{33}(g) をいれることで

$$\Delta = 8.48 \times 10^{-6} = 1.75(\text{秒角})$$

これは現在の観測結果と比べて誤差が 1% 程度にまで抑えられています。ちなみに、これを最初に観測したエディントンは相対論の結果に当てはまるような観測結果を選んで発表したという話があります。

ここで求めた光の軌道の式は、粒子の軌道の方程式からも求めることができます。粒子の軌道の式は「近日点」で求めたように

$$\begin{aligned} u'' + u &= \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \\ &= \frac{\kappa M}{c^2 r^4}(\frac{ds}{d\varphi})^2 + 3mu^2 \end{aligned}$$

これを $ds^2 = 0$ とするだけで

$$u'' + u = 3mu^2$$

となり、光の場合になります。