

キリング方程式

空間が対称性を持つときに現れるキリング方程式を求めます。

ある座標系における固有の対称性 (何らかの変換に対して不変であること) というのがあり、例えば球座標における球対称性です。球対称性は球座標から他の適当な座標系に移すと、対称性がはっきり分からなくなります。違う例を挙げれば、計量が時間に依存していない座標系があったとしても、他の座標系に移すと計量は時間依存性を持つといったことも起きます。なので、空間に対称性が存在するのかどうかを確かめる手段が欲しいです。

計量が空間の性質を与えるので、計量が対称性を持っていると考えます。計量の座標変換は

$$g_{ij}(x^k) = \bar{g}_{ab}(\bar{x}^k) \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}$$

で与えられますが、ここで計量がある座標変換に対して変わらないとして

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k) = g_{ij}(x^k) \quad (1)$$

とします。この関係から、空間が持っている対称性は計量が変わらない変換に含まれていると考えます。例えば、見た目が回転に対して不変でないように見えても実は回転に対して不変であれば、計量は回転に対して変化しないということです。計量を線素に言い換えたほうが分かりやすいかもしれませんが。

一般的な変換を扱いたいので、形を具体的に決めずに

$$\bar{x}^i = \phi^i(x^l; \lambda)$$

と書けるような連続的な変換とします。 ϕ が何かしらの連続的な変換 (回転とか) を行う関数で、 λ はその変換に使われるパラメータです。なので、 $\phi^i(x^l; \lambda)$ は座標 x^l を λ を使ってある変換をしたら \bar{x}^i になったというものです。計量はこの変換を受けても変わらないとします。

(1) を ϕ で書けば

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} = g_{ij}(\phi^k(x^l; \lambda)) \phi_{|a}^i \phi_{|b}^j = g_{ab}(x^l)$$

これでは、どうなっていれば計量が対称性を持っているのか分からないので、 λ で微分してみます。 λ で微分して、 $\lambda = 0$ にすれば

$$\begin{aligned} & \frac{dg_{ij}(\phi^k(x^l; \lambda))}{d\lambda} \phi_{|a}^i \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^k(x^l; \lambda)) \frac{d\phi_{|a}^i}{d\lambda} \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^k(x^l; \lambda)) \phi_{|a}^i \frac{d\phi_{|b}^j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ & = g_{ij|k}(\phi^s(x^l; \lambda)) \frac{d\phi^k(x^l; \lambda)}{d\lambda} \phi_{|a}^i \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^s(x^l; \lambda)) \frac{d\phi_{|a}^i}{d\lambda} \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^s(x^l; \lambda)) \phi_{|a}^i \frac{d\phi_{|b}^j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

$g_{ab}(x^l)$ は λ の微分で消えるので

$$g_{ij|k}(\phi^s) \frac{d\phi^k(x^l; \lambda)}{d\lambda} \phi_{|a}^i \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^s) \frac{d\phi_{|a}^i}{d\lambda} \phi_{|b}^j \Big|_{\lambda=0} + g_{ij}(\phi^s) \phi_{|a}^i \frac{d\phi_{|b}^j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$$

$g_{ij}(\phi^s(x^l; \lambda = 0))$ を $g_{ij}(\phi^s)$ と省略して書いています。

$\lambda = 0$ での変換はパラメータがないことに当たるので、変換は恒等変換になって

$$x^k = \phi^k(x^r; 0)$$

これを x で微分すると

$$\delta_r^k = \phi_{|r}^k$$

これを使って

$$\begin{aligned} 0 &= g_{ij|k} \frac{d\phi^k(x^l; \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \delta_a^i \delta_b^j + g_{ij} \frac{d\phi_{|a}^i}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \delta_b^j + g_{ij} \delta_a^i \frac{d\phi_{|b}^j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ &= g_{ab|k} \frac{d\phi^k(x^l; \lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + g_{ib} \frac{d\phi_{|a}^i}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + g_{aj} \frac{d\phi_{|b}^j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \\ &= g_{ab|k} \Phi^k + g_{ib} \Phi_{|a}^i + g_{aj} \Phi_{|b}^j \end{aligned} \quad (2)$$

よって、これを満たすようなベクトル Φ^k が存在すれば、計量は何かしらの対称性を持つことになります。

対称性を見るのに、(2) よりも便利な形にできます。まず、共変ベクトルとして

$$\Phi_a = g_{ab} \Phi^b$$

このを用い、この共変微分は

$$\begin{aligned} \Phi_{a||i} &= \Phi_{a|i} - \left\{ \begin{matrix} l \\ a \ i \end{matrix} \right\} \Phi_l \\ &= (g_{ab} \Phi_{|i}^b + g_{ab|i} \Phi^b) - \frac{1}{2} g^{jl} (g_{aj|i} + g_{ij|a} - g_{ai|j}) \Phi_l \\ &= (g_{aj} \Phi_{|i}^j + g_{aj|i} \Phi^j) - \frac{1}{2} (g_{aj|i} + g_{ij|a} - g_{ai|j}) \Phi^j \\ &= g_{aj} \Phi_{|i}^j + \frac{1}{2} (g_{aj|i} - g_{ij|a} + g_{ai|j}) \Phi^j \end{aligned}$$

これに添え字を入れ替えた $\Phi_{i||a}$ を足すと

$$\begin{aligned} \Phi_{a||i} + \Phi_{i||a} &= g_{aj} \Phi_{|i}^j + \frac{1}{2} (g_{aj|i} - g_{ij|a} + g_{ai|j}) \Phi^j + g_{ij} \Phi_{|a}^j + \frac{1}{2} (g_{ij|a} - g_{aj|i} + g_{ia|j}) \Phi^j \\ &= g_{aj} \Phi_{|i}^j + \frac{1}{2} g_{ai|j} \Phi^j + g_{ij} \Phi_{|a}^j + \frac{1}{2} g_{ia|j} \Phi^j \\ &= g_{aj} \Phi_{|i}^j + g_{ai|j} \Phi^j + g_{ij} \Phi_{|a}^j \end{aligned} \quad (3)$$

これを (2) の式

$$g_{aj}\Phi_{|b}^j + g_{ab|k}\Phi^k + g_{ib}\Phi_{|a}^i = 0$$

と比べると、(3) での添え字を $i = b$ として、(2) でのダミーインデックスの添え字を j にすれば同じになるので、(3) は 0 になり

$$\Phi_{a||i} + \Phi_{i||a} = 0$$

これをキリング方程式と呼び、キリング (Killing) 方程式を満たすベクトルをキリングベクトルと呼びます。

よって、計量が何かの対称性 (変換に対する不変性) を持っているなら、それに対応するキリングベクトル Φ_a が存在することになります。言い換えると、空間に対称性があるなら、それに対応するキリングベクトルが存在する、ということです。

n 次元空間でのキリングベクトルの最大数は $n(n+1)/2$ 個です。この個数になることをちゃんと証明するのは面倒なので雰囲気だけ言っておきます。 Φ_a では n 個、 $\Phi_{a||i}$ ではキリング方程式によって $n(n-1)/2$ 個 (反対称な行列と同じ) が独立になっています。ここで、キリング方程式をさらに共変微分することで $\Phi_{a||i}$ に対する微分方程式を作ります。そうすると、この Φ_a と $\Phi_{a||i}$ に対する微分方程式での全体の独立な数は $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ 個になり、これからキリング方程式の解 Φ_a には任意定数が $n(n+1)/2$ 個いることになります。よって、これがキリングベクトルの個数になります。特に $n(n+1)/2$ 個であるためにはリッチスカラーが定数になる場合で、それ以外では $n(n+1)/2$ 個より少ないことが示されています。これはキリング方程式の積分可能条件から出てくる結果です (リッチスカラーが定数なら完全積分可能)。

計量が座標変換で不変とすることの別の視点にも触れておきます。これは、計量のある方向に動かしても値が変わらないという状況を作り出すためです。その方向が対称性の方向だからです。例えば、 z 軸に対して対称であるような空間ではその z 軸方向に移動しても計量は変わらないということです。このような言い方をすれば、リー微分に対して計量が不変であると言ってもいいのが分かると思います。実際に、計量のリー微分は

$$\mathcal{L}_t g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu||\lambda} t^\lambda + t_{\mu||\lambda} g_{\nu}^\lambda + t_{||\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = t_{\mu||\nu} + t_{\mu||\nu}$$

このように与えられており、今の場合ベクトル ϕ^λ が t^λ に対応するので、ベクトルの方向に対するリー微分が 0 になるとすれば全く同じ式になります。

キリングベクトルの例としてミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ による空間 (ミンコフスキー空間) の対称性を見ます。ミンコフスキー空間なので共変微分は偏微分が変わって、キリング方程式は

$$\Phi_{\mu|\nu} + \Phi_{\nu|\mu} = 0$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ なので、これは $i, j = 1, 2, 3$ として

$$\Phi_{0|0} = \Phi_{1|1} = \Phi_{2|2} = \Phi_{3|3}$$

$$\Phi_{0|i} + \Phi_{i|0} = 0$$

$$\Phi_{j|i} + \Phi_{i|j} = 0$$

となっています。 $\mu = \nu$ の式を見ると、 Φ_0 では x_0 微分で 0、 Φ_1 では x_1 微分で 0 となっているので

$$\Phi_0(x_1, x_2, x_3), \Phi_1(x_0, x_2, x_3), \Phi_2(x_0, x_1, x_3), \Phi_3(x_0, x_1, x_2) \quad (4)$$

という変数になっています。この構造を満たすキリングベクトル $\Phi(x)$ は

$$\Phi_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu}x^\nu + a_\mu$$

という形が考えられます。 $\epsilon_{\mu\nu}$ は任意の反対称テンソル、 a_μ は任意のベクトルです (両方とも x_μ 依存性のない定数)。このようにすれば、反対称テンソルのおかげで (4) を満たせます ($\mu = 0$ のとき $\nu = 0$ で第一項は反対称のために消える)。キリングベクトルを上付きにするにはミンコフスキー計量 $\eta^{\mu\nu}$ を作用させればいだけなので

$$\Phi^\mu(x) = \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

キリングベクトルのこの形から、キリングベクトルの独立なパラメータは 10 個であることも分かります ($\epsilon_{\mu\nu}$ は反対称なので 6 個、 a_μ からは素直に 4 個)。これに対応して、キリング方程式の解として 10 個の独立なキリングベクトルが存在することになります。で、4 次元でのキリングベクトルの最大数は $4(4+1)/2 = 10$ 個なので、4 次元ミンコフスキー空間は最大の対称性を持っています。

このキリングベクトルが何の対称性を表しているかは行列で書くと分かりやすいです。 Φ^μ を行列で書けば (添え字の位置が揃って見やすいので Φ^μ を使います)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} &= \eta^{\mu\alpha} \epsilon_{\alpha\nu} x^\nu + a^\mu \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{10} & 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{20} & \epsilon_{21} & 0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{30} & \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ -\epsilon_{10} & 0 & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ -\epsilon_{20} & -\epsilon_{21} & 0 & -\epsilon_{23} \\ -\epsilon_{30} & -\epsilon_{31} & -\epsilon_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{01} & 0 & -\epsilon_{12} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & 0 & -\epsilon_{23} \\ \epsilon_{03} & -\epsilon_{31} & \epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この式の第二項から、 x^0, x^1, x^2, x^3 軸に沿った寄与を a_μ が与えているのが分かります。つまり、 a_μ は軸に沿った平行移動に対応するパラメータで、軸に沿った平行移動に対して対称になっていることを表しています。そして第一項において、 $\epsilon_{\mu\nu}$ の成分を ± 1 とし、 $\epsilon_{0i} = 1, \epsilon_{12} = 1, \epsilon_{23} = 1, \epsilon_{31} = 1$ と設定すると、時間成分 ($(0, \mu)$ 成分) と $(\mu, 0)$ 成分) を抜いた成分は x, y, z 周りの三次元回転の生成子

$$I_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の和と同じ形をしているのが分かります。つまり、三次元回転に対する対称性があることを示しています。残っている時間成分部分は x, y, z 軸周りの (もしくは沿った) ローレンツ変換の生成子

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応しています。つまり、 $\epsilon_{\mu\nu}$ の部分は三次元回転を含むローレンツ変換の対称性を表しています。実際に、 I_x, I_y, I_z からは 3 次元回転、 L_1, L_2, L_3 からはローレンツ変換の式を導くことができます (相対論的量子力学の「ローレンツ変換」参照)。

このようにキリングベクトルは、4次元ミンコフスキー空間にはローレンツ変換と軸に沿った平行移動に対する対称性 (正確には無限小変換での) があることを示し、この対称性をポアンカレ群 (Poincaré group) と呼びます。特殊相対論を使う理論はポアンカレ群に対して不変な理論でなくてはならないと言えます。