カー・ニューマン解

重力源が電荷を持って回転している解を求めます。
ここでは、カー解をシュバルツシルト解をもとにして導出出来ることを示し、その結果から電荷があるときの解が出せるとしています。

真空でのアインシュタイン方程式の解として

シュバルツシルト解	質量 M	
ライスナー・ノルトシュトレーム解	質量 M,	電荷 e
カー解	質量 M,	回転 a

というのが求められました。この並びから、質量 M、回転 a、電荷 e の 3 つのパラメータによる解があると考えられます。というわけで、この 3 つのパラメータを持った解を求めます。ここでの導出方法の裏には細かい話がありますが、触れずにいきます。

シュバルツシルト解から始めます。線素は

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})(cdt)^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi)$$

これを

$$\begin{aligned}
&u = x^0 - r - 2m\log[r - 2m]\ ,\ r' = r\ ,\ \theta' = \theta\ ,\ \varphi' = \varphi \\
&dx^0 = cdt = du + dr + \frac{2m}{r - 2m}dr
\end{aligned} \tag{1}$$

として、座標変換します。この変換によって線素は

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - \frac{2m}{r})(du^2 + dr^2 + (\frac{2m}{r - 2m})^2dr^2 + 2dudr + \frac{4m}{r - 2m}dudr + \frac{4m}{r - 2m}dr^2) \\
&\quad - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi) \\
&= \frac{r - 2m}{r}du^2 + \frac{(r - 2m)^2 + (2m)^2 + 4m(r - 2m)}{r(r - 2m)}dr^2 + 2dudr \\
&\quad - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi) \\
&= \frac{r - 2m}{r}du^2 + \frac{r^2}{r(r - 2m)}dr^2 + 2dudr - \frac{r^2}{r(r - 2m)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi) \\
&= (1 - \frac{2m}{r})du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi)
\end{aligned}$$

「$'$」は省いてます。ここから特殊なことをします。今の計量は

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2m}{r} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}\ ,\ g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1-\dfrac{2m}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2\sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}
$$

ここで $g^{\mu\nu}$ を

$$
g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu \tag{2}
$$

として

$$
\begin{aligned}
&l^\mu = (0,1,0,0) = \delta^\mu_1 \\
&n^\mu = (1,-\frac{1}{2}(1-\frac{2m}{r}),0,0) = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}(1-\frac{2m}{r})\delta^\mu_1 \\
&m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3) \\
&\overline{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0,0,1,\frac{-i}{\sin\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)
\end{aligned}
$$

とします。δ^μ_ν はクロネッカーデルタです。m^μ と $\overline{m}^\mu$ は複素共役の関係になっています。$l^\mu, n^\mu, m^\mu\overline{m}^\mu$ の４つのベクトルの組をテトラッド (tetrad) と呼びます (「テトラッド」や「ニューマン・ペンローズ技法」参照)。もっと正確に言うと、複素ヌルテトラッド (complex null tetrad) です。名前の通り $l^\mu, n^\mu, m^\mu\overline{m}^\mu$ は全てヌルベクトルです。

r を複素数としたら

$$
\begin{aligned}
&l^\mu = \delta^\mu_1 \\
&n^\mu = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\big(1-\frac{2m}{2}(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^*})\big)\delta^\mu_1 \\
&m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r^*}(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3) \\
&\overline{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)
\end{aligned}
$$

r^* は r の複素数です。ここで、複素数の座標変換として

$$
r' = r - ia\cos\theta\ ,\ u' = u + ia\cos\theta
$$

というのを行います。ベクトルの変換則に従って座標変換を行うと、l^μ は

$$
l'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} l^\nu = (0,1,0,0) = \delta^\mu_1
$$

n^μ は成分ごとに見ていくと、第 0 成分は

$$n'^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} n^0 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} n^1 = 1$$

第 1 成分は

$$\begin{aligned}
n'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} n^0 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} n^1 =& -\frac{1}{2}\big(1 - \frac{2m}{2}(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*})\big) \\
=& -\frac{1}{2}\big(1 - \frac{2m}{2}(\frac{1}{r' + ia\cos\theta} + \frac{1}{r' - ia\cos\theta})\big) \\
=& -\frac{1}{2}\big(1 - \frac{2mr'}{r'^2 + a^2\cos^2\theta}\big)
\end{aligned}$$

残りの第 2,3 成分は消えるので

$$n'^\mu = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\big(1 - 2m(\frac{r'}{r'^2 + a^2\cos^2\theta})\big)\delta^\mu_1 = \big(1, -\frac{1}{2}\big(1 - \frac{2mr'}{r'^2 + a^2\cos^2\theta}\big), 0, 0\big)$$

m^μ も成分ごとに見ていくと、第 0 成分は

$$\begin{aligned}
m'^0 &= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} m^0 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} m^1 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} m^2 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} m^3 \\
&= 0 + 0 + \frac{\partial(u + ia\cos\theta)}{\partial\theta} m^2 + 0 \\
&= -ia\sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}r^*}
\end{aligned}$$

第 1 成分では

$$m'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} m^2 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} m^3 = \frac{\partial(r - ia\cos\theta)}{\partial\theta} m^2 = ia\sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}r^*}$$

第 2,3 成分はそのままなので、

$$\begin{aligned}
m'^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta)}(ia\sin\theta(\delta^\mu_1 - \delta^\mu_0) + \delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta)}(-ia\sin\theta, ia\sin\theta, 1, \frac{i}{\sin\theta})
\end{aligned}$$

$\overline{m}'^\mu$ はこれの複素共役なので

$$\overline{m}'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia\cos\theta)}(-ia\sin\theta(\delta^\mu_1 - \delta^\mu_0) + \delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)$$

となるだけです。

これらの結果を (2) に入れれば、計量は（「$'$」は省きます）

$$
\begin{aligned}
g^{00} &= -\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\
g^{01} &= 1-\frac{(-ia\sin\theta)^2}{(r^2+a^2\cos^2\theta)} = \frac{r^2+a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = \frac{r^2+a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\
g^{02} &= -\frac{-ia\sin\theta}{2(r^2+a^2\cos^2\theta)} - \frac{ia\sin\theta}{2(r^2+a^2\cos^2\theta)} = 0 \\
g^{03} &= -\frac{-ia\sin\theta}{2(r^2+a^2\cos^2\theta)}(-\frac{i}{\sin\theta}) - \frac{ia\sin\theta}{2(r^2+a^2\cos^2\theta)}(\frac{i}{\sin\theta}) = \frac{a}{(r^2+a^2\cos^2\theta)} \\
g^{11} &= -\big(1-2m(\frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta})\big) - \frac{a^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta} = \frac{-(r^2+a^2)+2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\
g^{12} &= 0\ ,\ g^{13} = \frac{-a}{r^2+a^2\cos^2\theta}\ ,\ g^{22} = \frac{-1}{r^2+a^2\cos^2\theta} \\
g^{23} &= 0\ ,\ g^{33} = -\frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta}(\frac{1}{\sin\theta})^2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

行列で書けば $(\Sigma=(r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1})$

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
(-a^2\sin^2\theta)\Sigma & (r^2+a^2)\Sigma & 0 & a\Sigma \\
(r^2+a^2)\Sigma & (2mr-(r^2+a^2))\Sigma & 0 & -a\Sigma \\
0 & 0 & -\Sigma & 0 \\
a\Sigma & -a\Sigma & 0 & -(\sin\theta)^{-2}\Sigma
\end{pmatrix}
$$

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
1-2mr\Sigma & 1 & 0 & -2mra\Sigma\sin^2\theta \\
1 & 0 & 0 & a\sin^2\theta \\
0 & 0 & -\Sigma^{-1} & 0 \\
-2mra\Sigma\sin^2\theta & a\sin^2\theta & 0 & -(r^2+a^2+2mra^2\Sigma\sin^2\theta)\sin^2\theta
\end{pmatrix}
$$

これは符号が一部違いますが、「カー解〜ボイヤー・リンキスト座標」での、ボイヤー・リンキスト座標に変換する前の計量の形です。つまり、ここで行った座標変換によってシュバルツシルト解からカー解を導出できたことになります。このような複素数の座標変換による導出は Newman と Janis によって与えられました。

実際に、ボイヤー・リンキスト座標に変換できます。符号の一部が違うだけなので、「カー解〜ボイヤー・リンキスト座標」での A', B' を変更するだけです。A', B' は

$$
A' = \frac{g_{01}g_{33}-g_{03}g_{13}}{g_{03}^2-g_{33}g_{00}}\ , B' = \frac{g_{13}g_{00}-g_{03}g_{01}}{g_{03}^2-g_{00}g_{33}}
$$

「カー解〜ボイヤー・リンキスト座標」での計量と今求めた計量の符号の関係は

$$
\begin{array}{ccc}
\text{カー解の計量} & \Leftrightarrow & \text{今求めた計量} \\
g_{01}=-1 & \Leftrightarrow & g_{01}=1 \\
g_{03}=-2m\rho a\Sigma\sin^2\theta & \Leftrightarrow & g_{03}=-2mra\Sigma\sin^2\theta \\
g_{13}=-a\sin^2\theta & \Leftrightarrow & g_{13}=a\sin^2\theta
\end{array}
$$

そうすると、今の場合を「カー解の導出 2〜ボイヤー・リンキスト座標〜」に合わせと A', B' は

$$
A' = \frac{-g_{01}g_{33} + g_{03}g_{13}}{g_{03}^2 - g_{33}g_{00}} \ , \ B' = \frac{-g_{13}g_{00} + g_{03}g_{01}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}
$$

そして、線素は

$$
ds^2 = g_{00}(cd\hat{t})^2 + (-g_{01}A' - g_{13}B')d\rho^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\hat{\varphi}^2 + 2g_{03}cd\hat{t}d\hat{\varphi}
$$

となり、結局 $d\rho^2$ の係数は「カー解〜ボイヤー・リンキスト座標〜」と変わらないので

$$
\begin{aligned}
ds^2 = (1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})(cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{a^2 + \rho^2 - 2m\rho}d\rho^2 - (\rho^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\
- \big((a^2 + \rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\big)d\varphi - 2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}cdtd\varphi
\end{aligned} \tag{4}
$$

このようにしてカー解を導出した理由は、回転していないシュバルツシルト解から回転するカー解が導出できたということは、回転していない電荷を持ったライスナー・ノルトシュトレーム解から回転している電荷を持つ解を同じ方法で導出できることになるからです。

というわけで、ライスナー・ノルトシュトレーム計量

$$
ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})(cdt)^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5}
$$

に対して、同様のことを行います。まず、最初の変換 (1) はシュバルツシルト解にいる $1 - 2m/r$ から

$$
\begin{aligned}
&\int dr\frac{1}{1 - 2m/r} = \int dr\frac{r}{r - 2m} = \int(1 + \frac{2m}{r - 2m})dr = r + 2m\log|r - 2m| \\
&dr + \frac{2m}{r - 2m}dr = \frac{r}{r - 2m}dr
\end{aligned}
$$

として出てきているので、今の場合では

$$
r + (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1} = \frac{r^2}{r^2 - 2mr + e^2}
$$

これの積分から

$$
\begin{aligned}
u &= x^0 - \int dr\frac{r^2}{r^2 - 2mr + e^2} \\
du &= dx^0 - \frac{r^2}{r^2 - 2mr + e^2}dr
\end{aligned}
$$

と変換します。そうすると、$2mr - e^2 = s$ として

$$(dx^0)^2 = du^2 + (\frac{r^2}{r^2 - s})^2 dr^2 + 2\frac{r^2}{r^2 - s} dudr = du^2 + \frac{r^4}{(r^2 - s)^2} dr^2 + 2\frac{r^2}{r^2 - s} dudr$$

これを (5) に入れれば

$$\begin{aligned}
(1 - \frac{s}{r^2})(cdt)^2 - (1 - \frac{s}{r^2})^{-1} dr^2 &= \frac{r^2 - s}{r^2}(du^2 + \frac{r^4}{(r^2 - s)^2} dr^2 + 2\frac{r^2}{r^2 - s} dudr) - \frac{r^2}{r^2 - s} dr^2 \\
&= \frac{r^2 - s}{r^2} du^2 + 2dudr \\
&= \frac{r^2 - 2mr + e^2}{r^2} du^2 + 2dudr \\
&= (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}) du^2 + 2dudr
\end{aligned}$$

計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2m}{r} + \dfrac{e^2}{r^2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \ g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(1 - \dfrac{2m}{r} + \dfrac{e^2}{r^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2 \sin^2\theta)^{-1} \end{pmatrix}$$

なので

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \overline{m}^\nu - m^\nu \overline{m}^\mu$$

としたとき

$$\begin{aligned}
&l^\mu = (0, 1, 0, 0) = \delta^\mu_1 \\
&n^\mu = (1, -\frac{1}{2}(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}), 0, 0) = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})\delta^\mu_1 \\
&m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3) \\
&\overline{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, 1, \frac{-i}{\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)
\end{aligned}$$

r を複素数として

$$
\begin{aligned}
&l^\mu = \delta^\mu_1\\
&n^\mu = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}(1 - m(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*}) + \frac{e^2}{rr^*})\delta^\mu_1\\
&m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r^*}(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)\\
&\overline{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3)
\end{aligned}
$$

そして

$$
r' = r - ia\cos\theta\ ,\ u' = u + ia\cos\theta
$$

と変換したとき、カー解のときと異なるのは n^1 だけで

$$
\begin{aligned}
n'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^0}n^0 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}n^1 &= -\frac{1}{2}\big(1 - m(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*}) + \frac{e^2}{rr^*}\big)\\
&= -\frac{1}{2}\big(1 - m(\frac{1}{r' + ia\cos\theta} + \frac{1}{r' - ia\cos\theta}) + \frac{e^2}{r'^2 + a^2\cos^2\theta}\big)\\
&= -\frac{1}{2}\big(1 - \frac{2mr' - e^2}{r'^2 + a^2\cos^2\theta}\big)
\end{aligned}
$$

これから

$$
n'^\mu = \delta^\mu_0 - \frac{1}{2}\big(1 - \frac{2mr' - e^2}{r'^2 + a^2\cos^2\theta}\big)\delta^\mu_1
$$

そうすると、(3) で変更されるのは n'^1 が寄与する g^{11} だけで

$$
g^{11} = 2l'^1n'^1 - 2m'^1\overline{m}'^1 = -\big(1 - \frac{2mr - e^2}{r + a^2\cos^2\theta}\big) - \frac{a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{-(r^2 + a^2) + 2mr - e^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}
$$

r' は r と書いてます。

これは (3) での g^{11} の $2mr$ が $2mr - e^2$ になっているだけです。ここからボイヤー・リンキスト座標への変更はただの置き換えでできるので、(4) での $2m\rho$ を $2m\rho - e^2$ に置き換えて

$$
\begin{aligned}
ds^2 = (1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})(cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2 - 2mr + e^2}d\rho^2 - (\rho^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2\\
- \big((\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{(2m\rho - e^2)a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}\big)d\varphi^2 - 2\frac{(2m\rho - e^2)a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}cdtd\varphi
\end{aligned}
$$

また、$\Sigma = \rho^2 + a^2\cos^2\theta,\ \Delta = \rho^2 + a^2 - (2m\rho - e^2)$ とすれば、$d\varphi^2$ 項は

$$\begin{aligned}((\rho^2+a^2)+\frac{(2m\rho-e^2)a^2\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta})\sin^2\theta &= \frac{1}{\Sigma}(\Sigma(\rho^2+a^2)+(\rho^2+a^2-\Delta)a^2\sin^2\theta))\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{\Sigma}((\rho^2+a^2)(\Sigma+a^2\sin^2\theta)-a^2\Delta\sin^2\theta))\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{\Sigma}((\rho^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta))\sin^2\theta\end{aligned}$$

から

$$ds^2=\frac{\Delta-a^2\sin^2\theta}{\Sigma}(cdt)^2-\frac{\Sigma}{\Delta}d\rho^2-\Sigma d\theta^2-\frac{(\rho^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2-2\frac{(2m\rho-e^2)a\sin^2\theta}{\Sigma}cdtd\varphi$$

と書けます。これがカー・ニューマン (Kerr-Newman) 解です。$e=0$ とすればカー解に、$a=0$ でライスナー・ノルトシュトレーム解に、$e=0, a=0$ でシュバルツシルト解に一致します。