カー解の性質

「カー解～ボイヤー・リンキスト座標～」で解を求めましたが、任意定数 a と m を決めます。
ニュートンの重力理論に対応する結果がないので、レンスとティリングによる近似解を利用します。

レンスとティリングによる近似解の形は

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})c^2dt^2 - (1 + \frac{2m}{r})d\sigma^2 + 4\frac{\kappa J}{c^3 r}\sin^2\theta d\varphi cdt \quad (r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) \tag{1}$$

J は重力源の角運動量、$d\sigma^2$ は 3 次元平面空間の線素、m はシュバルツシルト解と同じものです。この近似解は、m/r と $\kappa J/c^3r^2$ の 1 次のみで有効とされています。つまり、シュバルツシルト半径よりも大きく、ゆっくりと回転する星に対して有効です。これとの対応でカー解の任意定数 a, m を決めます

a を回転速度として、回転が遅いとするために、カー解を a/ρ の 1 次までで展開して

$$1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \simeq 1 - \frac{2m}{\rho}$$

$$\frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho} = \frac{1 + \frac{a^2}{\rho^2}\cos^2\theta}{1 + a^2/\rho^2 - 2m/\rho} \simeq (1 - \frac{2m}{\rho})^{-1}$$

$$\rho^2 + a^2\cos^2\theta = \rho^2(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\cos^2\theta) \simeq \rho^2$$

$$(\rho^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} = \rho^2(1 + \frac{a^2}{\rho^2})\sin^2\theta + \frac{a^2}{\rho^2}\frac{2m\sin^4\theta}{1 + a^2\cos^2\theta/\rho^2} \simeq \rho^2\sin^2\theta$$

$$\frac{4m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{a}{\rho}\frac{4m\sin^2\theta}{1 + a^2\cos^2\theta/\rho^2} \simeq \frac{4ma}{\rho}\sin^2\theta$$

これらから

$$ds^2 \simeq (1 - \frac{2m}{\rho})c^2dt^2 - (1 - \frac{2m}{\rho})^{-1}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \frac{4ma}{\rho}\sin^2\theta d\varphi cdt \tag{2}$$

これはシュバルツシルト解に、a に比例する非対角項があるだけです。(1) と対応させるために、等方な形へ置き換えます。変換は動径座標を $\rho = \hat{\rho}(1 + m/2\hat{\rho})^2$ と変えることで実行できます ($\hat{\rho}$ は等方的な動径)。なので、等方座標でのシュバルツシルト解をそのまま使えて

$$ds^2 = \frac{(1 - m/2\hat{\rho})^2}{(1 + m/2\hat{\rho})^2}c^2dt^2 - (1 + \frac{m}{2\hat{\rho}})^4 d\sigma^2 - \frac{4ma}{\hat{\rho}(1 + m/2\hat{\rho})^2}\sin^2\theta d\varphi cdt$$

となります (「シュバルツシルト解～外部～」参照)。

m をシュバルツシルト半径に対応するとして、$m/\hat{\rho}$ の 1 次までで展開して

$$
\frac{(1-m/2\hat{\rho})^2}{(1+m/2\hat{\rho})^2} \simeq 1-\frac{2m}{\hat{\rho}}
$$

$$
(1+\frac{m}{2\hat{\rho}})^4 \simeq 1+\frac{2m}{\rho}
$$

$$
\frac{4ma}{\hat{\rho}(1+m/2\hat{\rho})^2}\sin^2\theta \simeq \frac{4ma}{\hat{\rho}}\sin^2\theta
$$

よって、線素は

$$
ds^2 \simeq (1-\frac{2m}{\hat{\rho}})c^2dt^2-(1+\frac{2m}{\hat{\rho}})d\sigma^2-\frac{4ma}{\hat{\rho}}\sin^2\theta d\varphi cdt \quad (\hat{\rho}=(x^2+y^2+z^2)^{1/2})
$$

これと (1) を比べると、m はシュバルツシルト解と同じものなので

$$
m=\frac{\kappa M}{c^2}
$$

そして、a は

$$
-\frac{ma}{\hat{\rho}}=-\frac{ma}{r}=\frac{\kappa J}{c^3 r}
$$

なので

$$
ma=-\frac{\kappa J}{c^3} \;\Rightarrow\; a=-\frac{J}{Mc}
$$

この結果から、a は重力源の単位質量あたりの角運動量と考えられ、回転のパラメータとなります。式を見て分かるように正の J のとき負の a を持ちます。そして、m が幾何学的な質量であるように、ma は幾何学的な角運動量になります。また、a の次元は m と同じように長さの次元です。
よって、カー空間は、a と m(もしくは M) という 2 つのパラメータによって特徴付けられ、重力源は回転していると考えられます。その重力源の回転が止まる ($a=0$) ことでシュバルツシルト解と一致します。そして、厳密なカー解では重力源が球状であるとする必要はなく、形状とは無関係に幾何学的角運動量 ma を持っているということが重要になります。

重力源が回転していることで、空間がどうなるのかを見ていきます。そのために、カー空間での粒子の運動を求めます。簡単のため近似形 (2) を使い、a/ρ の 1 次のオーダ (このとき ρ は r と同じものとできます) のみで行うことにします。

変分問題を考えるので

$$
\begin{aligned}
\frac{ds^2}{ds^2}=1&=(1-\frac{2m}{\rho})(c\frac{dt}{ds})^2-(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}(\frac{d\rho}{ds})^2-\rho^2((\frac{d\theta}{ds})^2+\sin^2\theta(\frac{d\varphi}{ds})^2)-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\frac{d\varphi}{ds}\frac{cdt}{ds}\\
&=(1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t}^2-(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}\dot{\rho}^2-\rho^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t}
\end{aligned}
$$

から

$$\delta\int((1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t}^2-(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}\dot{\rho}^2-\rho^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t})ds=0$$

ドットは s 微分です。これをオイラー・ラグランジュ方程式に入れます。
時間成分は

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{c\partial\dot{t}}[(1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t}^2-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t}]=\frac{d}{ds}[(1-\frac{2m}{\rho})2c\dot{t}-\frac{4ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}]$$

なので

$$\frac{d}{ds}((1-\frac{2m}{\rho})(2c\dot{t}-\frac{4ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}))=0$$

θ 成分では、$\dot{\theta}$ の微分は

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}(-\rho^2\dot{\theta}^2)=\frac{d}{ds}(-2\rho^2\dot{\theta})$$

加えて、θ の微分は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t})\\ &=-2\rho^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-8\frac{ma}{\rho}\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}c\dot{t}\end{aligned}$$

なので、θ 成分では

$$\frac{d}{ds}(-2\rho^2\dot{\theta})=-2\rho^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2-8\frac{ma}{\rho}\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}c\dot{t}$$

φ 成分では

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}(-\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t})=\frac{d}{ds}(-2\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta c\dot{t})$$

なので

$$\frac{d}{ds}(-2\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta c\dot{t})=0$$

というわけで、まとめると

$$\frac{d}{ds}((1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t}-\frac{2ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi})=0$$

$$\frac{d}{ds}(\rho^2\dot{\theta})=\rho^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2+\frac{4ma}{\rho}\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}c\dot{t}$$

$$\frac{d}{ds}(\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}+\frac{2ma}{\rho}\sin^2\theta c\dot{t})=0$$

$$1=(1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t}^2-(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}\dot{\rho}^2-\rho^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)-4\frac{ma}{\rho}\sin^2\theta\dot{\varphi}c\dot{t}$$

となります。

簡単にするために赤道軌道のみを考えます ($\theta=\pi/2$)。ただし、カー空間の一般的な軌道はシュバルツシルト空間と違い平面にのっていません。赤道軌道では

$$\frac{d}{ds}((1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t}-\frac{2ma}{\rho}\dot{\varphi})=0 \tag{3a}$$

$$\frac{d}{ds}(\rho^2\dot{\varphi}+\frac{2ma}{\rho}c\dot{t})=0 \tag{3b}$$

$$1=(1-\frac{2m}{\rho})c^2\dot{t}^2-(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}\dot{\rho}^2-\rho^2\dot{\varphi}^2)-\frac{4ma}{\rho}\dot{\varphi}c\dot{t} \tag{3c}$$

二番目が角運動量保存ですが、厳密な場合では a に比例します。

さらに、瞬間的な動径方向の運動のみを考えます ($\varphi=0$)。そうすると、(3b) は

$$\frac{d}{ds}(\rho^2\dot{\varphi}+\frac{2ma}{\rho}c\dot{t})=\rho^2\ddot{\varphi}-\frac{2ma}{\rho^2}\dot{\rho}c\dot{t}+\frac{2ma}{\rho}c\ddot{t}=0 \tag{4}$$

(3a) より

$$\frac{d}{ds}((1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t}-\frac{2ma}{\rho}\dot{\varphi})=0$$

これを積分してしまい

$$(1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t}=l$$

$$c\dot{t}=l(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}$$

また、微分を実行した場合は

$$\frac{d}{ds}((1-\frac{2m}{\rho})c\dot{t}-\frac{2ma}{\rho}\dot{\varphi})=(1-\frac{2m}{\rho})c\ddot{t}+\frac{2m}{\rho^2}\dot{\rho}l(1-\frac{2m}{\rho})^{-1}-\frac{2ma}{\rho}\ddot{\varphi}$$

$$c\ddot{t}=\frac{2ma}{\rho(1-2m/\rho)}\ddot{\varphi}-\frac{2m\dot{\rho}l}{\rho^2(1-2m/\rho)^2}$$

これを (4) に入れて

$$\rho^2\ddot{\varphi} - \frac{2ma}{\rho^2}\dot{\rho}c\dot{t} + \frac{2ma}{\rho}c\ddot{t} = \rho^2\ddot{\varphi} + \frac{(2ma)^2}{\rho^2(1-2m/\rho)}\ddot{\varphi} - \frac{(2m)^2 al\dot{\rho}}{\rho^3(1-2m/\rho)^2} - \frac{2mal}{\rho^2(1-2m/\rho)}\dot{\rho}$$
$$= \rho^2\ddot{\varphi} + \frac{(2ma)^2}{\rho^2(1-2m/\rho)}\ddot{\varphi} - \frac{2mal}{\rho^2(1-2m/\rho)}(\frac{2m}{\rho(1-2m/\rho)} + 1)\dot{\rho}$$

a/ρ の 1 次で展開すれば

$$\rho\ddot{\varphi} - \frac{2mal}{\rho^3(1-2m/\rho)}(1 + \frac{2m}{\rho(1-2m/\rho)})\dot{\rho} = 0$$

さらに m/ρ の 1 次で展開すれば

$$\rho\ddot{\varphi} - \frac{2mal}{\rho^3}\dot{\rho} = 0$$

$\dot{\rho}$ の係数を角速度 ω に置き換えれば、回転している場合のニュートンの運動方程式

$$r\ddot{\varphi} + 2\omega\dot{\rho} = 0$$

と同じ形になります。

よって、コリオリ力のようなものが粒子に作用すると考えられ、空間が重力源の回転によって引きずられ、回転していると考えられます。コリオリ力のようなと言っているように、係数から分かるように明らかにコリオリ力とは違う力です。そして、この式の a は重力源の回転と逆符号になっているので、空間の回転方向は重力源の回転方向に一致しています。この重力源の回転に伴って空間が回転している現象は、非相対論的な考えでは導かれていないものです。この効果を検証しようといろいろとやっているようです。