カー解〜ボイヤー・リンキスト座標〜

「カー解〜導出〜」の続きです。
ここでも面倒な計算をするだけなので、最後の結果に飛んでいいです。

　長い計算によってアインシュタイン方程式の解を求めるには

$$\nabla^2\gamma = 0\ ,\quad (\nabla w)^2 = 1 \qquad (w = \frac{1}{\gamma}) \tag{1}$$

を解けばいいことになりました。計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - ml_\mu l_\nu$ の $l_\mu = l_0(1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ での l_0, λ_j は γ によって

$$l_0^2 = \mathrm{Re}(\gamma) = \alpha\ ,\quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\nabla w + \nabla w^* - i(\nabla w \times \nabla w^*)}{1 + \nabla w \cdot \nabla w^*} \tag{2}$$

と与えられます。
　γ はラプラス方程式に従うので、ラプラス方程式の球対称な解である

$$\gamma = \frac{1}{w} = \frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

これを使うことにします。これはアイコナール方程式に対しては

$$(\nabla w)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{w^2} = 1$$

となるので、成立しています。そして、$\gamma = \alpha + i\beta$ において $\beta = 0$ です。これによって l_0^2 とベクトル λ_i は (2) から

$$\begin{aligned}
&l_0^2 = \mathrm{Re}(\gamma) = \frac{1}{r} \\
&\boldsymbol{\lambda} = \frac{\nabla w + \nabla w^* - i(\nabla w \times \nabla w^*)}{1 + \nabla w \cdot \nabla w^*} \\
&\nabla w = (\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w})\ ,\ \nabla w^* = (\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}) \\
&\lambda_1 = \frac{2\frac{x}{w} - i(\frac{yz}{w^2} - \frac{zy}{w^2})}{1 + 1} = \frac{x}{w} = \frac{x}{r} \\
&\lambda_2 = \frac{y}{r} \\
&\lambda_3 = \frac{z}{r}
\end{aligned}$$

よって、l_μ は

$$l_\mu = l_0(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) = \frac{1}{\sqrt{r}}(1, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$$

と求まります。そうすると、計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-2ml_\mu l_\nu=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{2m}{r} & -\dfrac{2mx}{r^2} & -\dfrac{2my}{r^2} & -\dfrac{2mz}{r^2} \\ -\dfrac{2mx}{r^2} & -1-\dfrac{2mx^2}{r^3} & -\dfrac{2mxy}{r^3} & -\dfrac{2mxz}{r^3} \\ -\dfrac{2my}{r^2} & -\dfrac{2mxy}{r^3} & -1-\dfrac{2my^2}{r^3} & -\dfrac{2myz}{r^3} \\ -\dfrac{2mz}{r^2} & -\dfrac{2mxz}{r^3} & -\dfrac{2myz}{r^3} & -1-\dfrac{2mz^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

これはエディントン形式でのシュバルツシルト解

$$ds^2=(d\overline{x}^0)^2-(d\boldsymbol{x})^2-\frac{2m}{r}(d\overline{x}^0+\frac{xdx+ydy+zdz}{r})^2$$

と同じです。任意定数 m をシュバルツシルト解との対応から、重力源の幾何学的質量と見なせます。このようにシュバルツシルト解が出てくるのは、シュバルツシルト解が球対称での解であることに対応します。

この結果を踏まえて γ をもう少し一般化して

$$\gamma=\frac{1}{r}=((x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2)^{-1/2}$$

a_i $(i=1,2,3)$ は定数です。これもラプラス方程式とアイコナール方程式 (1) を満たします。a_i が実数なら、この解は原点を動かした場合でのシュバルツシルト解でしかないので新しいことは出てきません。しかし、a_i を虚数とすれば新しい解を得ることが出来ます。

γ を虚数に動かして

$$\gamma=\frac{1}{r}=(x^2+y^2+(z-ia)^2)^{-1/2}$$

これによって得られる解がカー解です。虚数へ動かせるのも γ を複素関数としているからです。この γ から l_0^2 と λ_i を (2) から求めます。まず、w を実部 ρ と虚部 σ にわけて

$$w=\rho+i\sigma=[x^2+y^2+(z-ia)^2]^{1/2}=(r^2-a^2-2iaz)^{1/2}\quad(r^2=x^2+y^2+z^2)\tag{3}$$

これを 2 乗すれば

$$(\rho+i\sigma)^2=\rho^2-\sigma^2+2i\rho\sigma=r^2-a^2-2iaz$$

から、ρ と σ は

$$\rho^2-\sigma^2=r^2-a^2\ ,\ \sigma=-\frac{az}{\rho}$$

この関係から

$$\rho^4-\rho^2(r^2-a^2)-a^2z^2=0$$

これを ρ^2 について解けば

$$
\begin{aligned}
\rho^2 &= \frac{r^2 - a^2 \pm \sqrt{(r^2-a^2)^2 + 4a^2z^2}}{2} \\
&= \frac{r^2 - a^2}{2} \pm (\frac{(r^2-a^2)^2}{4} + a^2z^2)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$\pm$ の符号は $+$ を選びます。$r \gg a$ としてみると

$$
\rho^2 \simeq \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} = r^2
$$

となるので、ρ は漸近的に r に等しくなります。これは (3) で同じように $\rho \gg a$ としたときに

$$
\rho + i\sigma = (r^2 - a^2 - 2iaz)^{1/2} \ \Rightarrow \ \rho \simeq r
$$

となっているためです。

l_0^2 は γ から簡単に求められて

$$
\gamma = \frac{1}{\rho + i\sigma} = \frac{\rho - i\sigma}{(\rho + i\sigma)(\rho - i\sigma)} = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} - \frac{i\sigma}{\rho^2 + \sigma^2}
$$

から

$$
l_0^2 = \mathrm{Re}(\gamma) = \frac{\rho}{\rho^2 + \sigma^2} = \frac{\rho}{\rho^2 + \frac{a^2z^2}{\rho^2}} = \frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}
$$

となります。$\boldsymbol{\lambda}$ を求めるために、∇w を計算します。∇w は (3) から

$$
\begin{aligned}
\nabla w &= \nabla (r^2 - a^2 - 2iaz)^{1/2} \\
&= \big(x(r^2 - a^2 - 2iaz)^{-1/2},\ y(r^2 - a^2 - 2iaz)^{-1/2},\ (z - ia)(r^2 - a^2 - 2iaz)^{-1/2}\big) \\
&= \frac{\boldsymbol{r} - ia\boldsymbol{k}}{w}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ として z 軸方向の単位ベクトルです。∇w^* は複素共役をとって

$$
\nabla w^* = \frac{\boldsymbol{r} + ia\boldsymbol{k}}{w^*}
$$

これから

$$
\nabla w \cdot \nabla w^* = \frac{r^2 + a^2}{ww^*} = \frac{r^2 + a^2}{|w|^2}\ ,\ \nabla w \times \nabla w^* = (\frac{2iya}{|w|^2}, \frac{-2ixa}{|w|^2}, 0)
$$

なので、$\boldsymbol{\lambda}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda} &= \frac{\nabla w + \nabla w^* - i(\nabla w \times \nabla w^*)}{1 + \nabla w \cdot \nabla w^*} \\
&= \frac{w^*(\boldsymbol{r} - ia\boldsymbol{k}) + w(\boldsymbol{r} + ia\boldsymbol{k}) + 2a(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k})}{|w|^2 + r^2 + a^2} \\
&= \frac{(\rho - i\sigma)(\boldsymbol{r} - ia\boldsymbol{k}) + (\rho + i\sigma)(\boldsymbol{r} + ia\boldsymbol{k}) + 2a(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k})}{|w|^2 + r^2 + a^2} \\
&= \frac{2(\rho\boldsymbol{r} - a\sigma\boldsymbol{k} + a(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}))}{|w|^2 + r^2 + a^2}
\end{aligned}
$$

w の絶対値は

$$
\begin{aligned}
|w|^2 &= (r^2 - a^2 - 2iaz)^{1/2}(r^2 - a^2 + 2iaz)^{1/2} = ((r^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2)^{1/2} \\
&= ((\rho^2 - \sigma^2)^2 + 4\sigma^2\rho^2)^{1/2} \\
&= ((\rho^2 + \sigma^2)^2)^{1/2} \\
&= 2\rho^2 - r^2 - a^2 + 2a^2
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda} &= \frac{2(\rho\boldsymbol{r} - a\sigma\boldsymbol{k} + a(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}))}{|w|^2 + r^2 + a^2} \\
&= \frac{\rho\boldsymbol{r} + a\boldsymbol{k}\frac{az}{\rho} + a(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k})}{(\rho^2 + a^2)} \\
&= \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}(\boldsymbol{r} + \frac{a^2z}{\rho^2}\boldsymbol{k} + \frac{a}{\rho}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}))
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\lambda}$ の成分ごとに書き出すと

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2} \\
\lambda_2 &= \frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2} \\
\lambda_3 &= \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}(z + \frac{a^2z}{\rho^2}) = \frac{z}{\rho}
\end{aligned}
$$

これとシュバルツシルト解とを比べると、$r \gg a$ で同じになります。このため重力源から遠くでは、シュバルツシルト解と同じ振るまいをします。

これで必要なものがそろいました。計量は

$$
g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2ml_\mu l_\nu
$$

$$
l_\mu = l_0(1, \frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2}, \frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2}, \frac{z}{\rho})\ ,\ l_0^2 = \frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}
$$

と求まり、各成分は

$$g_{00} = 1 - 2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2} \ , \ g_{11} = -1 - 2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}(\frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2})^2$$

$$g_{22} = -1 - 2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}(\frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2})^2 \ , \ g_{33} = -1 - 2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}(\frac{z}{\rho})^2$$

$$g_{01} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2} \ , \ g_{02} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2}$$

$$g_{03} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{z}{\rho} \ , \ g_{12} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{(\rho x + ay)(\rho y - ax)}{(\rho^2 + a^2)^2}$$

$$g_{13} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{z(\rho x + ay)}{\rho(\rho^2 + a^2)} \ , \ g_{23} = -2m\frac{\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}\frac{z(\rho y - ax)}{\rho(\rho^2 + a^2)}$$

線素 ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 = (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 - \frac{2m\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2})\Big((dx^0)^2 &+ (\frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2})^2dx^2 + (\frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2})^2dy^2 + (\frac{z}{\rho})^2dz^2 \\ &+ \frac{2(\rho x + ay)}{\rho^2 + a^2}dx^0dx + \frac{2(\rho y - ax)}{\rho^2 + a^2}dx^0dy + \frac{2z}{\rho}dx^0dz \\ &+ \frac{2(\rho x + ay)(\rho y - ax)}{(\rho^2 + a^2)^2}dxdy + \frac{2z(\rho x + ay)}{\rho(\rho^2 + a^2)}dxdz + \frac{2z(\rho y - ax)}{\rho(\rho^2 + a^2)}dydz\Big) \end{aligned}$$

第三項の括弧内は

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2cd + 2bd$$

と同じ形になっているので

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 - \frac{2m\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}(dx^0 + \frac{\rho x + ay}{\rho^2 + a^2}dx + \frac{\rho y - ax}{\rho^2 + a^2}dy + \frac{z}{\rho}dz)^2 \\ &= (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 - \frac{2m\rho^3}{\rho^4 + a^2z^2}(dx^0 + \frac{\rho(xdx + ydy)}{\rho^2 + a^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{\rho^2 + a^2} + \frac{z}{\rho}d) \end{aligned} \quad (4)$$

これがカー (Kerr) 解になります。この解が見つかったのは 1963 年という最近のことです。レンスとティリングによる近似的な解は 1918 年なので、厳密解を見つけるまでにかなりの時間を要したようです。

今求められた形では物理的にどのようになっているのか不鮮明なので、違う座標系に書き換えます。動径座標としては ρ を選び、角度座標 θ を通常の極座標のように定義して

$$\cos\theta = \frac{z}{\rho}$$

とします。もう 1 つの角度座標 φ は複素数での極形式

$$x + iy = (\rho\sin\theta)\cos\varphi + i(\rho\sin\theta)\sin\varphi = \rho\sin\theta(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (\rho\sin\theta)e^{i\varphi}$$

を使って、$\rho - ia$ から

$$(\rho - ia)\sin\theta e^{i\varphi} = x + iy$$

として定義します。そして、時間座標を

$$u = x^0 + \rho$$

と変換します。これらによって、(4) を座標変換します。
必要なものを計算していきます。

- dz^2

$$dz^2 = (\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta)^2$$

- $dx^2 + dy^2$

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 &= |d(x+iy)|^2 \\
&= (\sin\theta e^{i\varphi}d\rho + (\rho - ia)\cos\theta e^{i\varphi}d\theta + i(\rho - ia)\sin\theta e^{i\varphi}d\varphi) \\
&\quad \times (\sin\theta e^{-i\varphi}d\rho + (\rho + ia)\cos\theta e^{-i\varphi}d\theta - i(\rho + ia)\sin\theta e^{-i\varphi}d\varphi) \\
&= \sin^2\theta d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta d\theta^2 + a^2\cos^2\theta d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\varphi^2 + a^2\sin^2\theta d\varphi^2 \\
&\quad + 2\rho\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta + 2a\sin^2\theta d\rho d\varphi \\
&= (\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta + a\sin\theta d\varphi)^2 + (\rho\sin\theta d\varphi - a\cos\theta d\theta)^2
\end{aligned}$$

- $xdx + ydy$

$$\begin{aligned}
xdx + ydy = \frac{1}{2}(2xdx + 2ydy) = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) &= \frac{1}{2}d|x + iy|^2 \\
&= \frac{1}{2}d((\rho^2 + a^2)\sin^2\theta) \\
&= \rho\sin^2\theta d\rho + (\rho^2 + a^2)\sin\theta\cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

- $xdy - ydx$

$$
\begin{aligned}
xdy - ydx = & -\mathrm{Im}[(x+iy)d(x-iy)] \\
= & -\mathrm{Im}[(\rho - ia)e^{i\varphi}\sin\theta d((\rho+ia)e^{-i\varphi}\sin\theta)] \\
= & -\mathrm{Im}[(\rho - ia)e^{i\varphi}\sin\theta(\sin\theta e^{-i\varphi}d\rho + (\rho+ia)e^{-i\varphi}\cos\theta d\theta - i(\rho+ia)e^{-i\varphi}\sin\theta d\varphi)] \\
= & -\mathrm{Im}[(\rho - ia)\sin^2\theta d\rho - i(\rho^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi + (\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta d\theta] \\
= & (\rho^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi + a\sin^2\theta d\rho
\end{aligned}
$$

- zdz

$$
zdz = \rho\cos\theta(\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta) = \rho\cos^2\theta d\rho - \rho^2\cos\theta\sin\theta d\theta
$$

そして、

$$
\begin{aligned}
&\frac{2m\rho^3}{\rho^4+a^2z^2} = \frac{2m\rho^3}{\rho^4+a^2\rho^2\cos^2\theta} = \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta} \\
&dx^0 = du - d\rho
\end{aligned}
$$

これらを使うと (x の符号を反転させた形で行います)

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^0)^2 - d\boldsymbol{x}^2 - \frac{2m\rho^3}{\rho^4+a^2z^2}\big(dx^0 + \frac{\rho(xdx+ydy)}{\rho^2+a^2} + \frac{a(xdy-ydx)}{\rho^2+a^2} + \frac{z}{\rho}dz\big)^2 \\
&= (du^2 + d\rho^2 - 2dud\rho) \\
&\quad - ((\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta + a\sin\theta d\varphi)^2 + (\rho\sin\theta d\varphi - a\cos\theta d\theta)^2 + (\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta)^2) \\
&\quad - \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\big(du - d\rho + \frac{\rho(\rho\sin^2\theta d\rho + (\rho^2+a^2)\sin\theta\cos\theta d\theta)}{\rho^2+a^2} \\
&\quad + \frac{a((\rho^2+a^2)\sin^2\theta d\varphi + a\sin^2\theta d\rho)}{\rho^2+a^2} + \frac{\rho\cos^2\theta d\rho - \rho^2\cos\theta\sin\theta d\theta}{\rho}\big)^2 \\
&= (du^2 + d\rho^2 - 2dud\rho) - (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + (a^2+\rho^2)\sin^2\theta d\varphi^2 + 2a\sin^2\theta d\rho d\varphi + a^2\cos^2\theta d\theta^2) \\
&\quad - \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(du - d\rho + d\rho + a\sin^2\theta d\varphi)^2 \\
&= (du^2 - 2dud\rho) - (\rho^2 d\theta^2 + (a^2+\rho^2)\sin^2\theta d\varphi^2 + 2a\sin^2\theta d\rho d\varphi + a^2\cos^2\theta d\theta^2) \\
&\quad - \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}(du^2 + a^2\sin^4\theta d\varphi^2 + 2a\sin^2\theta d\varphi du) \\
&= (1 - \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta})du^2 - (\rho^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 - \big((a^2+\rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\big)d\varphi^2 \\
&\quad - 2dud\rho - \frac{4m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}d\varphi du - 2a\sin^2\theta d\rho d\varphi
\end{aligned}
\tag{5}
$$

このときの計量には角度座標 φ の依存性がないので、(5) は軸対称です。

　ここからさらに変換していきます。平坦な空間において角速度 ω で回転する座標系と対応させます。平坦な空間での軸対称に回転している座標系での線素は、「運動方程式と測地線方程式」で示したように

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2\omega r^2 d\varphi dt + dz^2)$$

この計量の対角成分でない項は $d\varphi dt$ のみです。なので、(5) での $d\rho d\varphi, dud\rho$ の項を除去するような座標変換を導入してやります。

　そのために、線素の形

$$ds^2 = g_{00}du^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2 + 2g_{03}dud\varphi + 2g_{01}dud\rho + 2g_{13}d\rho d\varphi \tag{6}$$

に対して、座標変換を

$$c\hat{t} = u - A(\rho)\ ,\ du = cd\hat{t} + A'd\rho$$

$$\hat{\varphi} = \varphi - B(\rho)\ ,\ d\varphi = d\hat{\varphi} + B'd\rho$$

として行います。A と B は ρ のみの関数、「$'$」は ρ 微分を表しています。これによって (6) は

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{00}du^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\varphi^2 + 2g_{03}dud\varphi + 2g_{01}dud\rho + 2g_{13}d\rho d\varphi \\
&= g_{00}(cd\hat{t} + A'd\rho)^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}(d\hat{\varphi} + B'd\rho)^2 + 2g_{03}(cd\hat{t} + A'd\rho)(d\hat{\varphi} + B'd\rho) \\
&\quad + 2g_{01}(cd\hat{t} + A'd\rho)d\rho + 2g_{13}(d\hat{\varphi} + B'd\rho)d\rho \\
&= g_{00}((cd\hat{t})^2 + A'^2 d\rho^2 + 2A'cd\hat{t}d\rho) + g_{22}d\theta^2 + g_{33}(d\hat{\varphi}^2 + B'^2 d\rho^2 + 2B'd\hat{\varphi}d\rho) \\
&\quad + 2g_{03}(cd\hat{t}d\hat{\varphi} + A'd\rho d\hat{\varphi} + A'B'd\rho^2 + B'cd\hat{t}d\rho) + 2g_{01}(cd\hat{t} + A'd\rho)d\rho + 2g_{13}(d\hat{\varphi} + B'd\rho)d\rho \\
&= g_{00}(cd\hat{t})^2 + (g_{00}A'^2 + g_{33}B'^2 + 2g_{03}A'B' + 2g_{01}A' + 2g_{13}B')d\rho^2 \\
&\quad + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\hat{\varphi}^2 + 2g_{03}cd\hat{t}d\hat{\varphi} + 2(g_{33}B' + g_{03}A' + g_{13})d\hat{\varphi}d\rho \\
&\quad + 2(g_{00}A' + g_{03}B' + g_{01})cd\hat{t}d\rho
\end{aligned} \tag{7}$$

今は $d\hat{\varphi}d\rho, cd\hat{t}d\rho$ の係数が 0 になるように決めるので、A' と B' は

$$g_{33}B' + g_{03}A' + g_{13} = 0$$

$$g_{00}A' + g_{03}B' + g_{01} = 0$$

これらから

$$A' = -\frac{g_{03}B' + g_{01}}{g_{00}}\ ,\ B' = -\frac{g_{03}A' + g_{13}}{g_{33}}$$

なので、A', B' は

$$A' = \frac{g_{01}g_{33} - g_{03}g_{13}}{g_{03}^2 - g_{33}g_{00}}\ ,\ B' = \frac{g_{13}g_{00} - g_{03}g_{01}}{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}$$

となります。これらに $g_{\mu\nu}$ を入れます。
　A' の分母の $g_{00}g_{33}$ は

$$\begin{aligned}
g_{00}g_{33} =& -(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta})((a^2 + \rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}) \\
=& -(a^2 + \rho^2)\sin^2\theta - \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} + (a^2 + \rho^2)\sin^2\theta\frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{(2m\rho)^2a^2\sin^4\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2}
\end{aligned}$$

g_{03}^2 は

$$g_{03}^2 = \frac{(2m\rho a\sin^2\theta)^2}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2}$$

なので、A' の分母は

$$\begin{aligned}
g_{03}^2 - g_{00}g_{33} =& (a^2 + \rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} - (a^2 + \rho^2)\sin^2\theta\frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \\
& - \frac{(2m\rho)^2a^2\sin^4\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{(2m\rho a\sin^2\theta)^2}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \\
=& \frac{(a^2 + \rho^2)(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + 2m\rho a^2\sin^4\theta - 2m\rho(a^2 + \rho^2)\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

A' の分子は

$$\begin{aligned}
g_{33}g_{01} &= (a^2 + \rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \\
g_{03}g_{13} &= a\sin^2\theta\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
g_{33}g_{01} - g_{03}g_{13} &= \frac{(a^2 + \rho^2)(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + 2m\rho a^2\sin^4\theta - 2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{(a^2 + \rho^2)(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

よって、A' は

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta+2m\rho a^2\sin^4\theta-2m\rho(a^2+\rho^2)\sin^2\theta} \\
&= \frac{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)}{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)+2m\rho a^2(1-\cos^2\theta)-2m\rho(a^2+\rho^2)} \\
&= \frac{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)}{(\rho^2+a^2\cos^2\theta)((a^2+\rho^2)-2m\rho(\rho^2+a^2\cos^2\theta)/(\rho^2+a^2\cos^2\theta))} \\
&= \frac{a^2+\rho^2}{a^2+\rho^2-2m\rho}
\end{aligned}
$$

B' の分母は A' と同じなので、分子だけ求めればいいです。

B' の分子は

$$
\begin{aligned}
g_{00}g_{13} &= -a\sin^2\theta(1-\frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}) \\
g_{03}g_{01} &= \frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

から

$$
g_{00}g_{13}-g_{03}g_{01} = \frac{-a(\rho^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}
$$

なので、B' は

$$
\begin{aligned}
B' &= \frac{-a(\rho^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta}{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta+2m\rho a^2\sin^4\theta-2m\rho(a^2+\rho^2)\sin^2\theta} \\
&= \frac{-a(\rho^2+a^2\cos^2\theta)}{(a^2+\rho^2)(\rho^2+a^2\cos^2\theta)+2m\rho a^2(1-\cos^2\theta)-2m\rho(a^2+\rho^2)} \\
&= \frac{-a}{a^2+\rho^2-2m\rho}
\end{aligned}
$$

となります。

(7) の $d\rho^2$ の係数は少し変形して

$$
\begin{aligned}
&g_{00}A'^2+g_{33}B'^2+2g_{03}A'B'+2g_{01}A'+2g_{13}B' \\
&\quad = A'(g_{00}A'+g_{03}B'+g_{01})+B'(g_{03}A'+g_{33}B'+g_{13})+g_{01}A'+g_{13}B'
\end{aligned}
$$

これと $d\hat{\varphi}d\rho, cd\hat{t}d\rho$ の係数を比べると ( ) の中は 0 と分かるので、$d\rho^2$ の部分は

$$
g_{01}A'+g_{13}B'
$$

そして、求められた A', B' と (5) の計量を (7) に入れて

$$g_{01}A' = -\frac{a^2+\rho^2}{a^2+\rho^2-2m\rho}\ ,\ g_{13}B' = \frac{a^2\sin^2\theta}{a^2+\rho^2-2m\rho} = \frac{a^2-a^2\cos^2\theta}{a^2+\rho^2-2m\rho}$$

よって

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{00}(cd\hat{t})^2 + (g_{01}A' + g_{13}B')d\rho^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\hat{\varphi}^2 + 2g_{03}cd\hat{t}d\hat{\varphi} \\
&= (1 - \frac{2m\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta})(cd\hat{t})^2 - \frac{\rho^2+a^2\cos^2\theta}{a^2+\rho^2-2m\rho}d\rho^2 - (\rho^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\
&\quad\quad - \big((a^2+\rho^2)\sin^2\theta + \frac{2m\rho a^2\sin^4\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}\big)d\hat{\varphi}^2 - 2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}cd\hat{t}d\hat{\varphi}
\end{aligned}$$

この座標系をボイヤー・リンキスト (Boyer-Lindquist) 座標と呼び、カー解と言ったときは大体この形を指します。

線素の形はシュバルツシルト解と似ているのが分かります。$a = 0$ とすれば、シュバルツシルト解と一致します。このことは、ライスナー・ノルトシュトレーム解での電荷 $e = 0$ でシュバルツシルト解と一致するのと同じです。

今の線素には $\hat{t}d\hat{\varphi}$ がいるために時間の符号だけを反転させたのでは不変になりません。$d\hat{t}, d\hat{\varphi}$ 両方の符号を変える必要があります。このことは、時間が逆向きに進めば回転は逆回転するということです。なので、カー解は静的でなく定常的です。このため、定常的で軸対称な空間の解がカー解です。

また、よくされる表記として (ハットは省きます)

$$\begin{aligned}
ds^2 = &\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}(cdt)^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}d\rho^2 \\
&\quad - \frac{(\rho^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \Sigma d\theta^2 - 2\frac{2m\rho a\sin^2\theta}{\Sigma}cdtd\varphi
\end{aligned}$$

$\Sigma,\ \Delta$ は

$$\Sigma = \rho^2 + a^2\cos^2\theta\ ,\ \Delta = \rho^2 + a^2 - 2m\rho$$

この形のほうが見やすい上に計算もしやすいです。