カー解〜導出〜

軸対称に回転している場合の解を求めます。ここは導出の途中までで、まだ計量は出していません。
シュバルツシルト解のときと同じように軸対称であるという条件から求める方法 (S.Chandrasekhar 著「The Mathematical Theory of Black Holes」) もありますが、ここでは別の方法で導出します。
長々と計算をしていくだけなので、途中計算がどうでもいい人は「カー解〜ボイヤー・リンキスト座標〜」を見てください。
途中で 3 次元になり、ローマ文字の添え字を $i = 1, 2, 3$ としています。

シュバルツシルト解は球対称としたものですが、実際の星は自転しています。なので、軸対称に回転している場合の解が必要になり、その解をカー (Kerr) 解と言います。これは、回転する星の重力崩壊を考えるときなどにも重要な解です。

ちなみに、重力源が回転している解は 1918 年にレンスとティリングによって近似的な解が求められました。これはシュバルツシルト半径より大きな星に対しては十分な近似でした。しかし、ブラックホールのように強い重力に対しては適用できません。

ここでのカー解の導出は計算がゴチャゴチャして分かりづらいので、先に何をしてるか示しておくと

1. 使用する計量の決定。
2. 計量を真空のアインシュタイン方程式に入れる。
3. アインシュタイン方程式を簡単化していく。
4. 求められた関係式を複素関数 $\gamma = \alpha + i\beta$ に適用。
5.γ を決定し計量を求める。

このようにして求められたカー解は、定常的で軸対称に回転する物体が作り出す空間を与えます。回転をとめればシュバルツシルト解に一致します。

カー解を求めていきます。最初に計量の形を決定させるために、シュバルツシルト解を座標変換します。座標変換は

$$\bar{x}^0 = x^0 + 2m \log|\frac{r}{2m} - 1| \;\;,\;\; \bar{r} = r \;\;,\;\; \bar{\theta} = \theta \;\;,\;\; \bar{\varphi} = \varphi$$

$$d\bar{x}^0 = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial r} dr = dx^0 + (\frac{r}{2m} - 1)^{-1} dr$$

これをシュバルツシルト解に入れて

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (1 - \frac{2m}{r})(dx^0)^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= (1 - \frac{2m}{r})(d\bar{x}^0)^2 + \frac{(2m)^2}{r(r-2m)} dr^2 - \frac{4m}{r} dr d\bar{x}^0 - \frac{r^2}{r(r-2m)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= (1 - \frac{2m}{r})(d\bar{x}^0)^2 - \frac{r^2 - (2m)^2}{r(r-2m)} dr^2 - \frac{4m}{r} dr d\bar{x}^0 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= (d\bar{x}^0)^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \frac{2m}{r}(d\bar{x}^0 + dr)^2
\end{aligned}$$

この座標変換したものをエディントン形式と呼びます。極座標からデカルト座標に変えて

$$ds^2=(d\overline{x}^0)^2-(d\boldsymbol{x})^2-\frac{2m}{r}(d\overline{x}^0+\frac{xdx+ydy+zdz}{r})^2$$

$$\bigl(r^2=x^2+y^2+z^2\ ,\ dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy+\frac{\partial r}{\partial y}dy=\frac{xdx+ydy+zdz}{r}\bigr)$$

計量は

$$\begin{aligned}ds^2&=(d\overline{x}^0)^2-(d\boldsymbol{x})^2-\frac{2m}{r}((d\overline{x}^0)^2\\&\quad+\frac{x^2dx^2+y^2dy^2+z^2dz^2+2xydxdy+2xzdxdz+2yzdydz}{r^2}+2\frac{xdx+ydy+zdz}{r}d\overline{x}^0)\\&=(1-\frac{2m}{r})(d\overline{x}^0)^2-((dx^2+dy^2+dz^2)+2m\frac{x^2dx^2+y^2dy^2+z^2dz^2}{r^3})\\&\quad-\frac{2m}{r}\Bigl(\frac{2xydxdy+2xzdxdz+2yzdydz}{r^2}+\frac{2xd\overline{x}^0dx+2yd\overline{x}^0dy+2zd\overline{x}^0dz}{r}\Bigr)\end{aligned}$$

これから各成分の係数を抜き出すと

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu}&=\begin{pmatrix}1-\dfrac{2m}{r} & -\dfrac{2mx}{r^2} & -\dfrac{2my}{r^2} & -\dfrac{2mz}{r^2}\\ -\dfrac{2mx}{r^2} & -1-\dfrac{2mx^2}{r^3} & -\dfrac{2mxy}{r^3} & -\dfrac{2mxz}{r^3}\\ -\dfrac{2my}{r^2} & -\dfrac{2mxy}{r^3} & -1-\dfrac{2my^2}{r^3} & -\dfrac{2myz}{r^3}\\ -\dfrac{2mz}{r^2} & -\dfrac{2mxz}{r^3} & -\dfrac{2myz}{r^3} & -1-\dfrac{2mz^2}{r^3}\end{pmatrix}\\&=\eta_{\mu\nu}-2ml_\mu l_\nu\end{aligned}$$

l_μ は

$$l_\mu=\frac{1}{\sqrt{r}}(1,\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r})$$

とし、$\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量で、$l_\mu l_\nu\eta^{\mu\nu}=0$ です。この計量の形

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-2ml_\mu l_\nu$$

を元にして話を進めます。元にするというのは l_μ が未知で、m が任意定数とすることです。l_μ に対しては $l_\mu l_\nu\eta_{\mu\nu}=0$ という制限がかかっています。

この段階でわかる l_μ の性質を求めます。l_μ の添え字の上付きをミンコフスキー計量によって

$$l^\alpha=\eta^{\alpha\gamma}l_\gamma$$

と与えられると定義してみると

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + 2ml^{\mu}l^{\nu}$$

これと $g_{\mu\nu}$ とをかけることで単位行列になるので、$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列です。なので、$g^{\mu\nu}$ は反変計量テンソルになっています。このことから、ベクトル l_μ に対する添え字の上げ下げには

$$l^{\alpha} = g^{\alpha\gamma}l_{\gamma} = \eta^{\alpha\gamma}l_{\gamma}$$

として、本当の計量とミンコフスキー計量のどちらでも行えるのがわかります。これではっきりと l_μ は知りたい空間でヌルベクトル (ベクトルの大きさが 0) と分かります。

他にも l_μ の性質として、$l_\mu l_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$ から

$$l^{\alpha}l_{\alpha|\gamma} = l_{\alpha}l^{\alpha}_{|\gamma} = \frac{1}{2}(l^{\nu}_{|\gamma}l_{\nu} + l^{\nu}l_{\nu|\gamma}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}l_{\mu}l_{\nu})_{|\gamma} = 0$$

となっています。共変微分ではどうなってるのかも知りたいので、まずクリストッフェル記号を使って

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} l^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(\frac{dg_{\mu\gamma}}{dx^{\beta}} + \frac{dg_{\gamma\beta}}{dx^{\mu}} - \frac{dg_{\beta\mu}}{dx^{\gamma}})l^{\mu} \\
&= mg^{\alpha\gamma}(-(l_{\mu}l_{\gamma})_{|\beta} - (l_{\gamma}l_{\beta})_{|\mu} + (l_{\mu}l_{\beta})_{|\gamma})l^{\mu} \\
&= mg^{\alpha\gamma}(-l^{\mu}(l_{\mu}l_{\gamma})_{|\beta} - l^{\mu}(l_{\gamma}l_{\beta})_{|\mu} + l^{\mu}(l_{\mu}l_{\beta})_{|\gamma}) \\
&= mg^{\alpha\gamma}(-l^{\mu}(l_{\gamma}l_{\beta})_{|\mu}) \\
&= -ml^{\nu}(l^{\alpha}l_{\beta})_{|\nu}
\end{aligned}$$

ミンコフスキー計量の微分は 0 です。共変微分では l_τ をかけたものを使うので

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \nu\ \lambda \end{array} \right\} l_{\tau} = m(-l^{\gamma}(l_{\lambda}l_{\gamma})_{|\nu} - l^{\gamma}(l_{\gamma}l_{\nu})_{|\lambda} + l^{\gamma}(l_{\nu}l_{\lambda})_{|\gamma}) = ml^{\gamma}(l_{\nu}l_{\lambda})_{|\gamma}$$

これから共変微分は

$$l_{\nu}l^{\nu}_{||\gamma} = l^{\nu}l_{\nu||\gamma} = l^{\nu}(l_{\nu|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \nu\ \gamma \end{array} \right\} l_{\tau}) = 0 = l^{\nu}l_{\nu|\gamma}$$

となるために、偏微分と共変微分は同じ結果になるので、どちらでも使用できます。

今求められた l_μ の性質

$$l^{\alpha} = g^{\alpha\gamma}l_{\gamma} = \eta^{\alpha\gamma}l_{\gamma}$$

$$l^{\alpha}l_{\alpha|\gamma} = l_{\alpha}l^{\alpha}_{|\gamma} = 0$$

を使ってさらに計算を進めていきます。

計量の形が決まったので、計量を真空でのアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu}=\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}_{|\beta}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \mu\ \beta\end{array}\right\}_{|\nu}-\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \tau\ \mu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\tau\\ \beta\ \nu\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\tau\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \tau\ \beta\end{array}\right\}=0$$

に使っていきます。$\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \rho\ \alpha\end{array}\right\}$は

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \rho\ \alpha\end{array}\right\}=\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\log\sqrt{-g}$$

で求められます。行列式 g は空間回転に対して不変という性質を利用して、g を求めるために三次元空間での回転を行います。計算を楽にするために、x 軸に合わせた $l_\mu=(a,a,0,0)$ という座標をとることで

$$\begin{aligned}
g&=\begin{vmatrix}1-2ma^2 & -2ma^2 & 0 & 0\\ -2ma^2 & -1-2ma^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\\
&=(1-2ma^2)(-1-2ma^2)-(2ma^2)^2\\
&=\ -1+(2ma^2)^2-(2ma^2)^2\\
&=\ -1
\end{aligned}$$

よって、$g=-1$ なので

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \rho\ \alpha\end{array}\right\}=0$$

これによってアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu}=\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}_{|\alpha}-\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\ \mu\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\beta\\ \alpha\ \nu\end{array}\right\}=0$$

右辺のクリストッフェル記号を第一種に書き換えると

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}&=(g^{\alpha\rho}[\mu\nu,\rho])_{|\alpha}-g^{\alpha\sigma}[\beta\mu,\sigma]g^{\beta\lambda}[\alpha\nu,\lambda]\\
&=(\eta^{\alpha\rho}+2ml^{\alpha}l^{\rho})[\mu\nu,\rho]_{|\alpha}+(\eta^{\alpha\rho}+2ml^{\alpha}l^{\rho})_{|\alpha}[\mu\nu,\rho]\\
&\quad-(\eta^{\alpha\sigma}+2ml^{\alpha}l^{\sigma})[\beta\mu,\sigma](\eta^{\beta\lambda}+2ml^{\beta}l^{\lambda})[\alpha\nu,\lambda]\\
&=(\eta^{\alpha\rho}+2ml^{\alpha}l^{\rho})[\mu\nu,\rho]_{|\alpha}+2m(l^{\alpha}l^{\rho})_{|\alpha}[\mu\nu,\rho]\\
&\quad-(\eta^{\alpha\sigma}+2ml^{\alpha}l^{\sigma})[\beta\mu,\sigma](\eta^{\beta\lambda}+2ml^{\beta}l^{\lambda})[\alpha\nu,\lambda]
\end{aligned}\tag{1}$$

第一種クリストッフェル記号は

$$[\beta\mu,\sigma]=m(-(l_\mu l_\sigma)_{|\beta}-(l_\sigma l_\beta)_{|\mu}+(l_\beta l_\mu)_{|\sigma})$$

このため、m のオーダによって区別でき、m,m^2,m^3,m^4 による 4 つの項が現れます。そして、m は任意なので、m の各係数は 0 になるべきです。

(1) を m のオーダで分けると

- 1 次：m

$$\eta^{\alpha\rho}[\mu\nu,\rho]_{|\alpha}=0$$

- 2 次：m^2

$$2m(l^\alpha l^\rho[\mu\nu,\rho])_{|\alpha}-\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\lambda}[\beta\mu,\sigma][\alpha\nu,\lambda]=0$$

- 3 次：m^3

$$l^\beta l^\lambda\eta^{\alpha\sigma}[\beta\mu,\sigma][\alpha\nu,\lambda]+l^\alpha l^\sigma\eta^{\beta\lambda}[\beta\mu,\sigma][\alpha\nu,\lambda]=0$$

- 4 次：m^4

$$l^\alpha l^\sigma l^\beta l^\lambda[\beta\mu,\sigma][\alpha\nu,\lambda]=0$$

この 4 つを見ていくことで解くべき方程式が何かわかります。ここからの計算には l_μ の性質を使っていきます。

m^4 では第一種クリストッフェル記号からわかるように左辺は普通に 0 になるので、目新しいことは起きません。

m^3 では途中式を書くと分かりづらくなるので、ここでは結果だけ示して (導出は「途中式」を見てください)

$$-l_\mu l_\nu(v^\alpha v_\alpha)=0\quad (v^\alpha=l^\beta l^\alpha_{||\beta}=l^\beta l^\alpha_{|\beta})$$

よって、0 になるためには

$$v^\alpha v_\alpha=0$$

となり、v^α はヌルベクトルです。そして、v^α は l_ν との内積をとると

$$v^\nu l_\nu=(l^\alpha l^\nu_{|\alpha})l_\nu=l^\alpha(l^\nu_{|\alpha}l_\nu)=0$$

このことから、v^ν と l_ν は直交しています。さらに、v と l はヌルベクトルなので

$$l^\nu=(|\boldsymbol{l}|,\boldsymbol{l})\ \ ,\ \ v^\nu=(|\boldsymbol{v}|,\boldsymbol{v})$$

このように書けます。$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}$ は 3 次元ベクトル、$|\boldsymbol{l}|, |\boldsymbol{v}|$ はベクトルの大きさです。v^ν の添え字の上げ下げもミンコフスキー計量によってできます。このように書けるのも

$$l_\mu l_\nu \eta^{\mu\nu} = 0 \ \ , \ \ v_\mu v_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$$

であるためです。このことから

$$l^\nu v_\nu = |\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}| - (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}|(1-\cos\theta) = 0 \quad (\cos\theta = \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{v}|})$$

つまり、$\cos\theta = 1$ になるので、$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{v}$ は平行です。そして、l_0, v_0 はそれの絶対値でしかないので、v^ν は l^ν に適当な係数をつけて

$$v^\nu = -A(x) l^\nu$$

$A(x)$ はスカラーです。この関係が m^3 の式から導かれる結果で、これ以降の計算で使っていきます。
　次に m の式を見ます。これは

$$\eta^{\alpha\rho}[\mu\nu,\rho]_{|\alpha} = \eta^{\alpha\rho}((l_\nu l_\rho)_{|\mu|\alpha} + (l_\rho l_\mu)_{|\nu|\alpha} - (l_\mu l_\nu)_{|\rho|\alpha}) = 0$$

ここでスカラー L を

$$L = -l^\alpha_{||\alpha} = -(l^\alpha_{|\alpha} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha\ \tau \end{array} \right\} l^\tau) = -l^\alpha_{|\alpha}$$

と定義します。これとダランベルシャン $\Box = (\partial/\partial x^0)^2 - \nabla^2$ と、m^3 の式から求められた v_μ での

$$v_\nu = l^\alpha l_{\nu|\alpha}$$

$$v_{\nu|\mu} = l^\alpha_{|\mu} l_{\nu|\alpha} + l^\alpha l_{\nu|\alpha|\mu} = -A_{|\mu} l_\nu - A l_{\nu|\mu}$$

を使うことで、m の式は

$$(l_\nu l^\alpha)_{|\mu|\alpha} + (l^\alpha l_\mu)_{|\nu|\alpha} - (l_\mu l_\nu)^{|\alpha}_{|\alpha} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Box(l_\mu l_\nu) &= (l_{\nu|\mu|\alpha} l^\alpha + l_\nu l^\alpha_{|\alpha|\mu} + l_{\nu|\mu} l^\alpha_{|\alpha} + l_{\nu|\alpha} l^\alpha_{|\mu}) + (l^\alpha_{|\alpha|\nu} l_\mu + l^\alpha l_{\mu|\nu|\alpha} + l_{\mu|\nu} l^\alpha_{|\alpha} + l_{\mu|\alpha} l^\alpha_{|\nu}) \\
&= (v_{\nu|\mu} - l^\alpha_{|\mu} l_{\nu|\alpha} - l_\nu L_{|\mu} + l_{\nu|\mu} l^\alpha_{|\alpha} + l_{\nu|\alpha} l^\alpha_{|\mu}) \\
&\quad + (-L_{|\nu} l_\mu + v_{\mu|\nu} - l^\alpha_{|\nu} l_{\mu|\alpha} + l_{\mu|\nu} l^\alpha_{|\alpha} + l_{\mu|\alpha} l^\alpha_{|\nu}) \\
&= (v_{\nu|\mu} + l_{\nu|\mu} l^\alpha_{|\alpha} - l_\nu L_{|\mu}) + (-L_{|\nu} l_\mu + v_{\mu|\nu} + l_{\mu|\nu} l^\alpha_{|\alpha}) \\
&= (v_{\nu|\mu} - l_{\nu|\mu} L - l_\nu L_{|\mu}) + (-L_{|\nu} l_\mu + v_{\mu|\nu} - l_{\mu|\nu} L) \\
&= (-A_{|\mu} l_\nu - A l_{\nu|\mu} - l_{\nu|\mu} L - l_\nu L_{|\mu}) + (-L_{|\nu} l_\mu - l_{\mu|\nu} L - A_{|\nu} l_\mu - A l_{\mu|\nu}) \\
&= -((A+L) l_\nu)_{|\mu} - ((A+L) l_\mu)_{|\nu}
\end{aligned}$$

として、簡単な形になります。

m^2 の前に m を見てきたのには理由があり、もし l_μ がこの m の式を満たすなら、m^2 の式も同時に満たすことが分かるからです。このことを見るために、m^2 の式を今までと同じように展開します。展開した結果だけを示すと m^2 の式は (「途中式」参照)

$$2(l^\alpha A)_{|\alpha} - A^2 + l^\alpha_{|\beta} l^\beta_{|\alpha} - l^\alpha_{|\beta} l^{|\beta}_\alpha = 0 \tag{2}$$

となります。この式をさらに変形させていきます。第三項は

$$l^\alpha_{|\beta} l^\beta_{|\alpha} = (l^\alpha_{|\beta} l^\beta)_{|\alpha} - l^\alpha_{|\beta|\alpha} l^\beta = v^\alpha_{|\alpha} + L_{|\beta} l^\beta = -(A l^\alpha)_{|\alpha} + L_{|\beta} l^\beta = [L l^\alpha - A l^\alpha]_{|\alpha} - L l^\alpha_{|\alpha} = [(L-A) l^\alpha]_{|\alpha} + L^2$$

また、第四項は

$$l^\alpha_{|\beta} l^{|\beta}_\alpha = (l^\alpha l^{|\beta}_\alpha)_{|\beta} - l^\alpha l^{|\beta}_{\alpha|\beta} = -l^\alpha l^{|\beta}_{\alpha|\beta} \tag{3}$$

これに対して m の式を利用します。つまり、m の式が成り立っているという前提で話を進めます。まず m の式は

$$\begin{aligned}
-(l^{|\alpha}_{\mu|\alpha} l_\nu + l_\mu l^{|\alpha}_{\nu|\alpha} + 2 l_{\mu|\alpha} l^{|\alpha}_\nu) &= \big((A+L) l_\nu)_{|\mu} + ((A+L) l_\mu\big)_{|\nu} \\
&= \big((A+L)_{|\mu} l_\nu + (A+L) l_{\nu|\mu}\big) + \big((A+L)_{|\nu} l_\mu + (A+L) l_{\mu|\nu}\big) \\
&= (A+L)_{|\mu} l_\nu + (A+L)_{|\nu} l_\mu + (A+L)(l_{\nu|\mu} + l_{\mu|\nu})
\end{aligned}$$

これに l^μ をかけて

$$\begin{aligned}
-l^{|\alpha}_{\mu|\alpha} l_\nu l^\mu &= (A+L)_{|\mu} l_\nu l^\mu + (A+L) l^\mu l_{\nu|\mu} \\
&= (A+L)_{|\mu} l_\nu l^\mu - (A+L) A l_\nu
\end{aligned}$$

内積の外にいる l^ν を消して

$$
\begin{aligned}
-l_{\mu|\alpha}^{|\alpha} l^\mu &= (A+L)_{|\mu} l^\mu - (A+L)A \\
&= ((L+A)l^\mu)_{|\mu} - l^\mu_{|\mu}(L+A) - A(L+A) \\
&= ((L+A)l^\mu)_{|\mu} + L^2 - A^2
\end{aligned}
$$

この結果を利用することで、(3) は

$$
l^\alpha l_{\alpha|\beta}^{|\beta} = L^2 - A^2 + ((L+A)l^\mu)_{|\mu}
$$

そうすると、(2) は

$$
\begin{aligned}
&2(l^\alpha A)_{|\alpha} - A^2 + [(L-A)l^\mu]_{|\mu} + L^2 - L^2 + A^2 - [(L+A)l^\mu]_{|\mu} \\
&= 2(l^\alpha A)_{|\alpha} + (L-A)_{|\mu} l^\mu + (L-A) l^\mu_{|\mu} - (L+A)_{|\mu} l^\mu - (L+A) l^\mu_{|\mu} \\
&= 2(l^\alpha A)_{|\alpha} - 2A l^\mu_{|\mu} - 2A_{|\mu} l^\mu \\
&= 2(l^\alpha A)_{|\alpha} - 2(l^\mu A)_{|\mu} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となり左辺が 0 になります。このように m の式が満たされているなら、m^2 の式も満たされています。なので、結局考えるべきアインシュタイン方程式は m の式だけです。

　よって、解くべき方程式は l_μ に対する

$$
\Box(l_\mu l_\nu) = -((A+L)l_\nu)_{|\mu} - ((A+L)l_\mu)_{|\nu} \tag{4}
$$

ここで計量は時間独立という条件を加えます。そして、l_μ は

$$
l_\mu = l_0(1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)
$$

と書くことにします。λ_j は $\lambda^2 = 1$ です。

　μ, ν で場合わけします。時間独立という条件から、時間微分は 0 になり

- $\mu = \nu = 0$

$$
\nabla^2(l_0^2) = 0 \qquad (l_\mu l_\mu = l_0^2) \tag{5a}
$$

- $\mu = 0,\ \nu = j \neq 0$

$$
\nabla^2(l_0^2 \lambda_j) = ((L+A)l_0)_{|j} \qquad (l_\mu l_j = l_0^2 \lambda_j) \tag{5b}
$$

- $\mu = i \neq 0,\ \nu = j \neq 0$

$$\nabla^2(l_0^2\lambda_i\lambda_j) = ((L+A)l_0\lambda_i)_{|j} + ((L+A)l_0\lambda_j)_{|i} \qquad (l_il_j = l_0^2\lambda_i\lambda_j) \tag{5c}$$

ここから、ローマ文字の添え字は $1,2,3$ とし、添え字が上下でなくても同じローマ文字の添え字に対しては和をとるとします。

(5c) は (5a),(5b) を使うことで変形させられます。両辺の微分をばらせば

$$\begin{aligned} &l^2_{0|k|k}\lambda_i\lambda_j + l_0^2(\lambda_i\lambda_j)_{|k|k} + 2l^2_{0|k}(\lambda_i\lambda_j)_{|k} \\ &\quad = ((L+A)l_0)_{|j}\lambda_i + (L+A)l_0\lambda_{i|j} + ((L+A)l_0)_{|i}\lambda_j + (L+A)l_0\lambda_{j|i} \end{aligned}$$

これを変形して

$$l_0^2\nabla^2(\lambda_i\lambda_j) + 2l^2_{0|k}(\lambda_i\lambda_j)_{|k} = \lambda_i(l_0^2\lambda_{j|k|k} + 2l^2_{0|k}\lambda_{j|k}) + \lambda_j(l_0^2\lambda_{i|k|k} + 2l^2_{0|k}\lambda_{i|k}) + (L+A)l_0(\lambda_{i|j} + \lambda_{j|i})$$

左辺は

$$l_0^2\nabla^2(\lambda_i\lambda_j) + 2l^2_{0|k}(\lambda_i\lambda_j)_{|k} = l_0^2(\lambda_{i|k|k}\lambda_j + \lambda_i\lambda_{j|k|k} + 2\lambda_{i|k}\lambda_{j|k}) + 2l^2_{0|k}(\lambda_{i|k}\lambda_j + \lambda_i\lambda_{j|k})$$

なので、整理していくと

$$\begin{aligned} 2l_0^2\lambda_{i|k}\lambda_{j|k} &= (L+A)l_0(\lambda_{i|j} + \lambda_{j|i}) \\ \lambda_{i|j} + \lambda_{j|i} &= \frac{2l_0}{L+A}\lambda_{i|k}\lambda_{j|k} \\ &= \frac{1}{p}\lambda_{i|k}\lambda_{j|k} \qquad (\frac{1}{p} = \frac{2l_0}{L+A}) \end{aligned} \tag{5d}$$

となります。

というわけで、空間構造は (5a),(5b),(5d) に従っています。(5d) をさらに見ていくと、かなり簡単な形に出来ます。

添え字 i,j による 3×3 行列 M を

$$\lambda_{i|j} = M\ ,\ \lambda_{j|i} = M^T$$

と定義して、(5d) を

$$M + M^T = \frac{1}{p}MM^T$$

T は行列の転置を表します。λ_j の 2 乗が $\lambda^2 = 1$ なので

$$\frac{1}{2}(\lambda_i\lambda_i)_{|k} = \frac{1}{2}(\lambda_{i|k}\lambda_i + \lambda_i\lambda_{i|k}) = \lambda_{i|k}\lambda_i = 0$$

この式は M^T によって

$$M^T \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$\boldsymbol{\lambda}$ は $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とします。このことから $\boldsymbol{\lambda}$ は M^T のヌル空間 (カーネル) にいます。また、v の関係より

$$\begin{aligned}
v_0 =& l^\alpha l_{0|\alpha} = l^0 l_{0|0} + l^i l_{0|i} = -l_i l_{0|i} = -l_0 \lambda_i l_{0|i} = -A l_0 \\
&\Rightarrow \ \lambda_i l_{0|i} = A
\end{aligned}$$

添え字が $\nu = k \neq 0$ として

$$\begin{aligned}
v_k &= l^\alpha l_{k|\alpha} \\
&= l^0 l_{k|0} + l^j l_{k|j} \\
&= -(l_0 \lambda_j)(l_{0|j} \lambda_k + l_0 \lambda_{k|j}) \\
&= -(l_0 \lambda_j l_{0|j} \lambda_k + l_0^2 \lambda_j \lambda_{k|j}) = -A l_0 \lambda_k \\
&\Rightarrow \lambda_j l_{0|j} \lambda_k + l_0 \lambda_j \lambda_{k|j} = A \lambda_k
\end{aligned}$$

この二つを合わせて

$$\begin{aligned}
\lambda_j l_{0|j} \lambda_k + l_0 \lambda_j \lambda_{k|j} &= \lambda_j l_{0|j} \lambda_k \\
\lambda_{k|j} \lambda_j &= 0 \\
M \boldsymbol{\lambda} &= 0
\end{aligned}$$

よって、$\boldsymbol{\lambda}$ は M のヌル空間にいます。

M が何かを求めます。$\boldsymbol{\lambda}$ を空間回転させて x 軸に合わせたとして

$$R \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' \ , \ \boldsymbol{\lambda}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

R は直交回転行列です。これによって M は

$$M' = R M R^T \ , \ M'^T = R M^T R^T$$

という変換を受けます。$\boldsymbol{\lambda}'$ は M' と M'^T のヌル空間にいるので $(M' \boldsymbol{\lambda}' = 0, M'^T \boldsymbol{\lambda}' = 0)$、$M'$ は

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{N'} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

である必要があります。0 でないのは 2×2 行列 N' の部分なので N' を使うことにして、M を N に変えて

$$N' + N'^T = \frac{1}{p} N' N'^T$$

行列の関係は直交回転行列の変換で変わらないので、「$'$」がついたものがそのまま使えます。

ここで新しく行列 U を

$$U = I - \frac{1}{p} N'$$

とします。U に転置した U^T をかけると

$$UU^T = (I - \frac{1}{p} N')(I - \frac{1}{p} N'^T) = I + \frac{1}{p^2} N' N'^T - \frac{N' + N'^T}{p}$$

これに N' の式を使うと

$$UU^T = 1 \ , \ U^T = U^{-1}$$

よって、U はユニタリー行列です。そうすると U の行列として、2 次元での回転行列

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を選ぶことができます。よって、N', M' は

$$N' = p \begin{pmatrix} 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \ , \ M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}$$

M' をもとに戻すには、$M = R^T M' R$ から

$$M = R^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix} R$$

これは

$$
\begin{aligned}
M_{ik} &= R_{li}M'_{lj}R_{jk} \quad (R^T_{il} = R_{li}) \\
&= R_{2i}M'_{22}R_{2k} + R_{3i}M'_{33}R_{3k} + R_{3i}M'_{32}R_{2k} + R_{2i}M'_{23}R_{3k} \\
&= p(1-\cos\theta)(R_{2i}R_{2k} + R_{3i}R_{3k}) + p\sin\theta(R_{2i}R_{3k} - R_{3i}R_{2k})
\end{aligned}
$$

R は直交行列なので

$$
R_{1i}R_{1k} + R_{2i}R_{2k} + R_{3i}R_{3k} = \delta_{ik}
$$

$$
R_{2i}R_{3k} - R_{3i}R_{2k} = \epsilon_{ikl}R_{1l}
$$

ϵ_{ikl} はレヴィ・チビタ記号です。つまり、M_{ik} は R_{ij} の 1 行目 $(R_{1i} = R_i)$ だけで展開できて

$$
M_{ik} = p(1-\cos\theta)(\delta_{ik} - R_iR_k) + p\sin\theta\epsilon_{ikl}R_l
$$

さらに、$R\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' = (1,0,0)$ から、R の一行目に対しての内積は

$$
R_i\lambda_i = 1
$$

となるので、この二つによる角度 α は

$$
R\cdot\boldsymbol{\lambda} = \cos\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 0
$$

よって、$R = \boldsymbol{\lambda},\ R_i = \lambda_i$ と分かるので

$$
\begin{aligned}
M_{ik} = \lambda_{i|k} &= p(1-\cos\theta)(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + p\sin\theta\epsilon_{ikl}\lambda_l \\
&= \alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \beta\epsilon_{ikl}\lambda_l \quad (\alpha = p(1-\cos\theta)\ ,\ \beta = p\sin\theta)
\end{aligned} \tag{6}
$$

(5d) から $\lambda_{i|k}$ を λ の式として表現できましたが、この $\lambda_{i|k}$ の式をさらに簡単にします。α, β は重要になってきます。

添え字が $i = k$ ではレヴィ・チビタ記号が消えるので (同じ項に添え字が二つあるものは足す)

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{\lambda} = \alpha(1+1+1-\boldsymbol{\lambda}^2) = 2\alpha
$$

これが $\boldsymbol{\lambda}$ の発散になります。

今度は回転を求めます。そのために、ϵ_{jki} を (6) にかけて

$$
\epsilon_{jki}\lambda_{i|k} = \alpha\epsilon_{jki}(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \beta\epsilon_{jki}\epsilon_{ikl}\lambda_l
$$

この場合はレヴィ・チビタ記号があるので $i \neq k$ です。これの左辺は

$$\epsilon_{j12}\lambda_{2|1} + \epsilon_{j21}\lambda_{1|2} + \epsilon_{j13}\lambda_{3|1} + \epsilon_{j31}\lambda_{1|3} + \epsilon_{j23}\lambda_{3|2} + \epsilon_{j32}\lambda_{2|3} = (\nabla \times \lambda)_j$$

右辺は

$$\begin{aligned}
&-\alpha\epsilon_{jki}\lambda_i\lambda_k + \beta\epsilon_{jki}\epsilon_{ikl}\lambda_l \\
&\qquad = -\alpha(\epsilon_{j12}\lambda_2\lambda_1 + \epsilon_{j21}\lambda_1\lambda_2 + \cdots) + \beta(\epsilon_{j21}\epsilon_{123}\lambda_3 + \epsilon_{j12}\epsilon_{213}\lambda_3 + \cdots) \\
&\qquad = -\alpha(\epsilon_{12j}\lambda_2\lambda_1 - \epsilon_{12j}\lambda_1\lambda_2 + \cdots) + \beta(-\epsilon_{12j}\epsilon_{123}\lambda_3 - \epsilon_{12j}\epsilon_{123}\lambda_3 + \cdots) \\
&\qquad = -\beta(2\epsilon_{12j}\epsilon_{123}\lambda_3 + 2\epsilon_{1j3}\epsilon_{123}\lambda_2 + 2\epsilon_{j23}\epsilon_{123}\lambda_1) \\
&\qquad = -2\beta\lambda_j
\end{aligned}$$

よって、回転は

$$\nabla \times \boldsymbol{\lambda} = -2\beta\boldsymbol{\lambda}$$

となります。

今度は (6) を x^k で微分して、ラプラシアンを求めます。微分すれば

$$\begin{aligned}
\lambda_{i|k|k} &= \alpha_{|k}(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k)_{|k} + \beta_{|k}\epsilon_{ikl}\lambda_l + \beta\epsilon_{ikl}\lambda_{l|k} \\
\nabla^2\lambda_i &= \delta_{ik}\alpha_{|k} - \lambda_i\alpha_{|k}\lambda_k - \alpha(\lambda_{i|k}\lambda_k + \lambda_i\lambda_{k|k}) + \beta_{|k}\epsilon_{ikl}\lambda_l + \beta\epsilon_{ikl}\lambda_{l|k} \\
&= \nabla\alpha - \lambda_i(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} - \alpha[\lambda_k(\alpha(\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k) + \beta\epsilon_{ikl}\lambda_l) + \lambda_i\alpha(\delta_{kk} - \lambda_k\lambda_k)] \\
&\quad + \beta_{|k}\epsilon_{ikl}\lambda_l + \beta\epsilon_{ikl}(\alpha(\delta_{lk} - \lambda_l\lambda_k) + \beta\epsilon_{lkm}\lambda_m) \\
&= \nabla\alpha - \lambda_i(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} + (-\alpha^2(\lambda_k\delta_{ik} - \lambda_i\lambda_k\lambda_k) - \alpha\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k - \lambda_i\alpha^2(\delta_{kk} - \lambda_k\lambda_k)) \\
&\quad + \epsilon_{ikl}\beta_{|k}\lambda_l + (\alpha\beta\epsilon_{ikl}(\delta_{lk} - \lambda_l\lambda_k) + \beta^2\epsilon_{ikl}\epsilon_{lkm}\lambda_m) \\
&= \nabla\alpha - \lambda_i(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} + (-\alpha^2(\lambda_i - \lambda_i) - \alpha\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k - 2\lambda_i\alpha^2) \\
&\quad + ((\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda})_i + (-\alpha\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k + \beta^2\epsilon_{ikl}\epsilon_{lkm}\lambda_m) \\
&= \nabla\alpha - \lambda_i(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} + (-\alpha\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k - 2\lambda_i\alpha^2) + ((\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda})_i + (-\alpha\beta\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k - 2\beta^2\lambda_i) \\
&= \nabla\alpha - \lambda_i(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} - 2\lambda_i(\alpha^2 + \beta^2) + ((\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda})_i \qquad (\epsilon_{ikl}\lambda_l\lambda_k = 0)
\end{aligned}$$

これでラプラシアンが求められましたが、別の方法で $\nabla^2\lambda_i$ を作ります。$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\lambda})$ は

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\lambda}) = -2(\nabla\times\beta\boldsymbol{\lambda}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\lambda}) - \nabla^2\boldsymbol{\lambda}$$

なので

$$\nabla^2\lambda = \nabla(\nabla\cdot\lambda) + 2(\nabla\times\beta\boldsymbol{\lambda}) = 2\nabla\alpha + 2((\nabla\beta)\times\lambda) + 2\beta(\nabla\times\boldsymbol{\lambda})$$
$$= 2\nabla\alpha + 2((\nabla\beta)\times\lambda) - 4\beta^2\boldsymbol{\lambda}$$

ラプラシアンに対する二つの式から

$$\nabla\alpha - \boldsymbol{\lambda}(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda}(\alpha^2+\beta^2) + (\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} = 2\nabla\alpha + 2(\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} - 4\beta^2\boldsymbol{\lambda}$$
$$\nabla\alpha = -\boldsymbol{\lambda}(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} - (\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} - 2(\alpha^2-\beta^2)\boldsymbol{\lambda}$$

として、α の微分の式が求まります。これに $\boldsymbol{\lambda}$ の内積を作用させて

$$(\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda} = -\alpha^2 + \beta^2 \tag{7a}$$

さらに $\boldsymbol{\lambda}$ をかけることで

$$\boldsymbol{\lambda}((\nabla\alpha)\cdot\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}(\alpha^2-\beta^2)$$
$$\nabla\alpha + (\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} + 2(\alpha^2-\beta^2)\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\alpha^2-\beta^2)$$
$$\nabla\alpha = (-\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{\lambda} - (\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda} \tag{7b}$$

そして、$\beta\boldsymbol{\lambda}$ の発散は 0 になるので

$$\nabla\cdot(\beta\boldsymbol{\lambda}) = \beta(\nabla\cdot\boldsymbol{\lambda}) + (\nabla\beta)\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$$

よって

$$(\nabla\beta)\cdot\boldsymbol{\lambda} = -2\alpha\beta \tag{7c}$$

(7b) に $\boldsymbol{\lambda}$ の外積をかけると

$$(\nabla\alpha)\times\boldsymbol{\lambda} = (-\alpha^2+\beta^2)(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}) - ((\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda}$$
$$= -((\nabla\beta)\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda}$$
$$= -(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\beta) - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}\nabla\beta)$$
$$= -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\beta) + \nabla\beta$$
$$\nabla\beta = (\nabla\alpha)\times\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\beta)$$
$$= (\nabla\alpha)\times\boldsymbol{\lambda} - 2\alpha\beta\boldsymbol{\lambda} \tag{7d}$$

(7a),(7b),(7c),(7d) を使っていきます。

　ここで重要な複素関数 $\gamma = \alpha + i\beta$ を導入します。表記の注意ですが、$\nabla\alpha \times \boldsymbol{\lambda}$ のように書いているときは、微分は α のみにかかっているとします。γ は

$$
\begin{aligned}
&\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \\
&\nabla\gamma = \nabla\alpha + i\nabla\beta \\
&\nabla\gamma \times \boldsymbol{\lambda} = (\nabla\alpha \times \boldsymbol{\lambda}) + i(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda})
\end{aligned}
$$

(7a),(7b),(7c),(7d) を適用させると、$\nabla\gamma \cdot \boldsymbol{\lambda}$ は

$$
\nabla\gamma \cdot \boldsymbol{\lambda} = \nabla\alpha \cdot \boldsymbol{\lambda} + i\nabla\beta \cdot \boldsymbol{\lambda} = -\alpha^2 + \beta^2 - i2\alpha\beta = -\gamma^2 \tag{8a}
$$

$\nabla\gamma$ は

$$
\begin{aligned}
\nabla\gamma =&\nabla\alpha + i\nabla\beta \\
=&(-\alpha^2 + \beta^2)\boldsymbol{\lambda} - (\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) + i(\nabla a \times \boldsymbol{\lambda} - 2\alpha\beta\lambda) \\
=&(-\gamma^2 + i2\alpha\beta)\boldsymbol{\lambda} - (\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) + i(\nabla a \times \boldsymbol{\lambda} - 2\alpha\beta\boldsymbol{\lambda}) \\
=&-\gamma^2\boldsymbol{\lambda} - i\{-i(\nabla\beta \times \boldsymbol{\lambda}) - (\nabla a \times \boldsymbol{\lambda})\} \\
=&-\gamma^2\boldsymbol{\lambda} + i(\nabla\gamma \times \boldsymbol{\lambda})
\end{aligned} \tag{8b}
$$

欲しいのは $\nabla^2\gamma$ で、(8b) から作ります。求められた

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{\lambda} = 2\alpha\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{\lambda} = -2\beta\boldsymbol{\lambda}
$$

を使うことで $\nabla^2\gamma$ は

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\gamma =&\ -\nabla \cdot (\gamma^2\boldsymbol{\lambda}) + i\nabla \cdot (\nabla\gamma \times \boldsymbol{\lambda}) \\
=&\ -\gamma^2\nabla \cdot \boldsymbol{\lambda} - \nabla\gamma^2 \cdot \lambda + i\{\boldsymbol{\lambda} \cdot (\nabla \times \nabla\gamma) - \nabla\gamma \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\lambda})\} \\
=&\ -\gamma^2\nabla \cdot \boldsymbol{\lambda} - 2\gamma\nabla\gamma \cdot \boldsymbol{\lambda} - i\nabla\gamma \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\lambda}) \\
=&\ -2\alpha\gamma^2 + 2\gamma^3 + 2i\beta(\nabla\gamma \cdot \boldsymbol{\lambda}) \\
=&\ -2\alpha\gamma^2 + 2\gamma^3 - 2i\beta\gamma^2 \\
=&\ -2\gamma^2(\alpha - \gamma + i\beta) \\
=&\ 0
\end{aligned}
$$

これから γ は複素調和関数と分かり、これが最終的な方程式の 1 つです。もう 1 つの微分方程式は (8b) の 2 乗と (8a) を使うことで

$$
\begin{aligned}
(\nabla\gamma)^2 &= (\gamma^2\boldsymbol{\lambda})^2 - (\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})^2 - 2\gamma^2\lambda\cdot(\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&= \gamma^4 - (\nabla\gamma\times\boldsymbol{\lambda})^2 \\
&= \gamma^4 - ((\nabla\gamma)^2 - 2(\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda})^2 + (\nabla\gamma\cdot\boldsymbol{\lambda})^2) \\
&= \gamma^4 - ((\nabla\gamma)^2 - 2\gamma^4 + \gamma^4)) \\
&= 2\gamma^4 - (\nabla\gamma)^2 \\
(\nabla\gamma)^2 &= \gamma^4
\end{aligned}
$$

見やすくするために $w = 1/\gamma$ で書き直すと、$\nabla w = (-1/\gamma^2)\nabla\gamma$ なので

$$(\nabla w)^2 = 1$$

これが 2 つ目の方程式になります。よって最終的な解くべき方程式は

$$\nabla^2\gamma = 0 \tag{9a}$$

$$(\nabla w)^2 = 1 \tag{9b}$$

1 つ目はラプラス方程式、2 つ目は光学でのアイコナール方程式と同じ形です。

この 2 つと境界条件によって γ を決定できます。そして、これから示すように計量の関数である l_0 と $\boldsymbol{\lambda}$ は γ によって決定されるので、実際に (9a),(9b) を解けばアインシュタイン方程式の解が求まります。最初の複雑な方程式がここまで簡単な形になり、これらで計量が決定されます。

まず、$\boldsymbol{\lambda}$ が γ によってどのように決定されるのか見ます。(8a),(8b) を w に書き換えてや

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla w = \boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla w^* = 1\ ,\ \nabla w = \boldsymbol{\lambda} + i(\nabla w\times\boldsymbol{\lambda})$$

w^* は w の複素共役です。よって

$$
\begin{aligned}
\nabla w\times\nabla w^* &= [\boldsymbol{\lambda} + i(\nabla w\times\boldsymbol{\lambda})]\times[\boldsymbol{\lambda} - i(\nabla w^*\times\boldsymbol{\lambda})] \\
&= (\nabla w\times\boldsymbol{\lambda})\times(\nabla w^*\times\boldsymbol{\lambda}) + i(\nabla w\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda} - i\boldsymbol{\lambda}\times(\nabla w^*\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&= i(\nabla w\times\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\lambda} - i\boldsymbol{\lambda}\times(\nabla w^*\times\boldsymbol{\lambda}) \\
&= i[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla w)\boldsymbol{\lambda} - \nabla w] - i[\nabla w^* - (\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla w^*)\boldsymbol{\lambda}] \\
&= \ -i(\nabla w + \nabla w^*) + B\boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}
$$

B としてまとめています。∇w の内積を作用させて

$$
\begin{aligned}
\nabla w\times\nabla w^*\cdot\nabla w &= -i(\nabla w+\nabla w^*)\cdot\nabla w+B\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla w\\
&= -i(\nabla w\cdot\nabla w+\nabla w^*\cdot\nabla w)+B\\
B &= \nabla w\times\nabla w^*\cdot\nabla w+i(\nabla w\cdot\nabla w+\nabla w^*\cdot\nabla w)\\
&= i(1+\nabla w^*\cdot\nabla w)
\end{aligned}
$$

そうすると、$\boldsymbol{\lambda}$ を w の式で書けて

$$
\begin{aligned}
\nabla w\times\nabla w^* &= -i(\nabla w+\nabla w^*)+i\boldsymbol{\lambda}(1+\nabla w^*\cdot\nabla w)\\
\boldsymbol{\lambda} &= \frac{-i(\nabla w\times\nabla w^*)+(\nabla w+\nabla w^*)}{1+\nabla w^*\cdot\nabla w} \qquad (10a)
\end{aligned}
$$

これによって、γ と $\boldsymbol{\lambda}$ の関係は与えられます。

後は l_0 を γ によってどのように決定されるのかを見ればいいです。l_0 は (5a),(5b) を満たすので、成り立つものとして

$$
l_0^2=\mathrm{Re}(\gamma)=\alpha \qquad (10b)
$$

このようにできます。もしくは、$C\mathrm{Re}(\gamma)$ のように任意定数をかけたものになります。この関係は、(9a) で γ が調和関数と分かっているために、α は調和関数になるので (5a) を満たします。

実際に、$l_0^2=\alpha$ が (5b) の解にもなっているのか確かめるために、$l_0^2=\alpha$ を (5b) の左辺に入れてみると

$$
\begin{aligned}
\nabla^2(\alpha\lambda_j) &= \alpha\nabla^2\lambda_j+\lambda_j\nabla^2\alpha+2\alpha_{|k}\lambda_{j|k}\\
&= \alpha\nabla^2\lambda_j+2\alpha_{|k}\lambda_{j|k}
\end{aligned}
$$

(6) と $\boldsymbol{\lambda}$ のラプラシアン

$$
\nabla^2\boldsymbol{\lambda}=2\nabla\alpha+2(\nabla\beta\times\boldsymbol{\lambda})-4\beta^2\boldsymbol{\lambda}\ \Rightarrow\ \nabla^2\lambda_j=2(\nabla\alpha)_j+2(\nabla\beta\times\lambda)_j-4\beta^2\lambda_j
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
\nabla^2(\alpha\lambda_j) &= \alpha[2(\nabla\alpha)_j+2(\nabla\beta\times\lambda)_j-4\beta^2\lambda_j]+2(\nabla\alpha)_k(\alpha(\delta_{jk}-\lambda_j\lambda_k)+\beta\epsilon_{jkl}\lambda_l)\\
&= 2\alpha(\nabla\alpha)_j+2\alpha(\nabla\beta\times\lambda)_j-4\alpha\beta^2\lambda_j+2\alpha\delta_{jk}(\nabla\alpha)_k-2\alpha(\nabla\alpha)_k\lambda_j\lambda_k+2\beta\epsilon_{jkl}(\nabla\alpha)_k\lambda_l\\
&= 4\alpha(\nabla\alpha)_j+2\alpha(\nabla\beta\times\lambda)_j+2\beta\epsilon_{jkl}(\nabla\alpha)_k\lambda_l-4\alpha\beta^2\lambda_j-2\alpha(\nabla\alpha)_k\lambda_j\lambda_k\\
&= 4\alpha(\nabla\alpha)_j+2\alpha(\nabla\beta\times\lambda)_j+2\beta[\nabla\alpha\times\lambda]_j-4\alpha\beta^2\lambda_j-2\alpha(\nabla\alpha\cdot\lambda)\lambda_j\\
&= 4\alpha(\nabla\alpha)_j+2\alpha(\nabla\beta\times\lambda)_j+2\beta[\nabla\alpha\times\lambda]_j-4\alpha\beta^2\lambda_j-2\alpha(\beta^2-\alpha^2)\lambda_j\\
&= 4\alpha(\nabla\alpha)_j+2\alpha(\nabla\beta\times\lambda)_j+2\beta[\nabla\alpha\times\lambda]_j-2\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\lambda_j
\end{aligned}
$$

(7b),(7d) を使い

$$
\begin{aligned}
\nabla^2(\alpha\lambda_j) &= 4\alpha(\nabla\alpha)_j - 2\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\lambda_j + 2\alpha[(\nabla\alpha\cdot\lambda)\lambda_j - \nabla\alpha] + 2\beta[-(\nabla\beta\cdot\lambda)\lambda_j + \nabla\beta] \\
&= 4\alpha(\nabla\alpha)_j - 2\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\lambda_j + 2\alpha[(\beta^2-\alpha^2)\lambda_j - \nabla\alpha] + 2\beta[-(-2\alpha\beta)\lambda_j + \nabla\beta] \\
&= 2\alpha(\nabla\alpha)_j + 2\beta(\nabla\beta)_j - 2\alpha(3\beta^2-\alpha^2)\lambda_j + 2\alpha(\beta^2-\alpha^2)\lambda_j + 4\alpha\beta^2\lambda_j \\
&= 2\alpha(\nabla\alpha)_j + 2\beta(\nabla\beta)_j \\
&= \nabla(\alpha^2+\beta^2)
\end{aligned}
$$

(5b) の右辺を求めます。α と β の定義から

$$
\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2 &= p^2(1-\cos\theta)^2 + p^2\sin^2\theta \\
&= 2p^2(1-\cos\theta) = 2p\alpha
\end{aligned}
$$

p の定義から

$$
p = \frac{L+A}{2l_0}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2 &= \frac{L+A}{l_0}\alpha \\
A+L &= \frac{l_0}{\alpha}(\alpha^2+\beta^2)
\end{aligned}
$$

これより、$l_0^2=\alpha$ なら、(5b) の右辺は

$$
((L+A)l_0)_{|j} = (\frac{l_0^2}{\alpha}(\alpha^2+\beta^2))_{|j} = (\alpha^2+\beta^2)_{|j}
$$

よって、右辺と左辺が同じになるので、$l_0^2=\alpha$ は実際に解です。$l_0^2=C\alpha$ として行っても同様に解になっているのが分かります。

　ここまで見てきたように、計量の関数 $\boldsymbol{\lambda}, l_0$ は (10a),(10b) で与えることができ、そこに必要な γ は (9a),(9b) で与えられます。よって、真空でのアインシュタイン方程式は (9a),(9b) の 2 つの方程式にまで還元されたことになり、γ さえ決めてしまえば計量は決定されます。

　また、複素関数 γ は一般化されたポテンシャルと考えることができます。弱い場とすると計量 g_{00} は

$$
g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}
$$

なので、これとここで使っている計量の 00 成分

$$g_{00} = \eta_{00} + l_0^2$$

を比べると

$$l_0^2 = \frac{2\phi}{c^2} = \alpha = \mathrm{Re}(\gamma)$$

これから、力学的なポテンシャルの一般化と考えられます。また、ポテンシャルはラプラス方程式に従うということからも予想できる結果です。