カルツァ・クライン理論

カルツァが指摘し、クラインによって整理されたカルツァ・クライン理論について見ていきます。これは 5 次元時空において重力と電磁場を統一させる理論です。
ギリシャ文字の添え字は $0,1,2,3$、大文字のローマ文字の添え字は $0,1,2,3,5$ とします。
計量、リッチテンソル、リッチスカラーでのハット付きは 5 次元、ハットなしは 4 次元としています。

先に言っておくと、カルツァ・クライン理論は現在でも不完全な理論です。理由は簡単で実験値を再現できないからです (再現できない例として電子の質量がありますが、対処法はあり、例えば自発的対称性の破れを利用します)。しかし、カルツァ・クライン理論の発想は弦理論に引き継がれています。
最初に記号の定義を書いておきます。
第一種クリストッフェル記号

$$[ab,c]=\frac{1}{2}(\partial_a g_{bc}+\partial_b g_{ac}-\partial_c g_{ab})$$

第二種クリストッフェル記号

$$\Gamma^c_{ab}=g^{cd}[ab,d]=\frac{1}{2}g^{cd}\big(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\big)$$

リッチテンソル

$$R_{ab}=\partial_c\Gamma^c_{ab}-\partial_b\Gamma^c_{ac}-\Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{bc}+\Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd}$$

リッチスカラー

$$R=g^{ab}R_{ab}$$

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ はベクトルポテンシャル A_μ によって

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=A_{\nu|\mu}-A_{\mu|\nu}=A_{\nu||\mu}-A_{\mu||\nu}$$

と与えます。回転なので偏微分、共変微分のどちらでも書けます (「共変微分」参照)。
1921 年にカルツァ(Kalzua) が示した話から見ていきます。目的はベクトルポテンシャルをどうにかして重力 (幾何学) の記述の中に含めることです。つまり、計量の中に入れたいです。しかし、計量は重力を記述するものとして与えられています。なので、次元を 1 つ上げて 5 次元にし、そこにベクトルポテンシャルが入るようにします。この新しく加えられた次元は余剰次元 (extra dimension) と呼ばれます (より一般的には 5 次元以上の次元を指す)。ここからギリシャ文字の添え字は $0\sim 3$、大文字のローマ文字の添え字は $0\sim 3,5$ だとします。4 を飛ばすのは、5 次元目だとはっきりさせたかったのと、個人的に 4 はユークリッド化したときの時間成分だと思ってしまうからです。
カルツァは 5 次元空間に持っていくときに 2 つの仮定をしました。まず、5 次元時空においてアインシュタイン方程式

$$\hat{R}_{AB} - \frac{1}{2}\hat{g}_{AB}\hat{R} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}\hat{T}^{AB} = \kappa'\hat{T}^{AB} \tag{1}$$

が成立しているとします。ハット付は 5 次元空間でのものです (κ は重力定数)。リッチテンソル $\hat{R}_{AB}$ とリッチスカラー $\hat{R}$、クリストッフェル記号 $\hat{\Gamma}^C_{AB}$ も

$$\begin{aligned}
&\hat{R}_{AB} = \partial_C\hat{\Gamma}^C_{AB} - \partial_B\hat{\Gamma}^C_{AC} - \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC} + \hat{\Gamma}^C_{AB}\hat{\Gamma}^D_{CD} \\
&\hat{R} = \hat{g}^{AB}\hat{R}_{AB} \\
&\hat{\Gamma}^C_{AB} = \frac{1}{2}\hat{g}^{CD}\big(\partial_B\hat{g}_{DA} + \partial_A\hat{g}_{DB} - \partial_D\hat{g}_{AB}\big)
\end{aligned}$$

として、添え字が 5 次元になっているだけの同じ形にします。このように、5 次元空間において通常の相対論と同じ構造をしていると仮定します (添え字の範囲を $0 \sim 3, 5$ にしただけ)。

もう 1 つの仮定は、5 次元目の変化は物理に影響を与えないというものです。これは ∂_5 の微分は消えるということで (x^5 の変化を受けない)、計量に対して

$$\partial_5\hat{g}_{AB} = 0$$

とします。この条件は cylinder condition と呼ばれます。

cylinder condition のもとでクリストッフェル記号がどうなるかを計算します。微分部分を見るために第一種クリストッフェル記号

$$[AB, C] = \frac{1}{2}(\partial_A\hat{g}_{BC} + \partial_B\hat{g}_{AC} - \partial_C\hat{g}_{AB})$$

を使うことにします。そうすると、成分は

$$\begin{aligned}
&[\mu\nu, \alpha] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu\alpha} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu\alpha} - \partial_\alpha\hat{g}_{\mu\nu}) \\
&[5\nu, \alpha] = \frac{1}{2}(\partial_5\hat{g}_{\nu\alpha} + \partial_\nu\hat{g}_{5\alpha} - \partial_\alpha\hat{g}_{5\nu}) = \frac{1}{2}(\partial_\nu\hat{g}_{5\alpha} - \partial_\alpha\hat{g}_{5\nu}) \\
&[\mu\nu, 5] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu 5} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu 5} - \partial_5\hat{g}_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\hat{g}_{\nu 5} + \partial_\nu\hat{g}_{\mu 5}) \\
&[55, \alpha] = \frac{1}{2}(\partial_5\hat{g}_{5\alpha} + \partial_5\hat{g}_{5\alpha} - \partial_\alpha\hat{g}_{55}) = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\hat{g}_{55} \\
&[5\nu, 5] = \frac{1}{2}(\partial_5\hat{g}_{\nu 5} + \partial_\nu\hat{g}_{55} - \partial_5\hat{g}_{5\nu}) = \frac{1}{2}\partial_\nu\hat{g}_{55} \\
&[55, 5] = \frac{1}{2}(\partial_5\hat{g}_{55} + \partial_5\hat{g}_{55} - \partial_5\hat{g}_{55}) = 0
\end{aligned}$$

となります (cylinder condition から ∂_5 の項は 0)。そうすると $[5\nu, \alpha]$ は電磁場テンソルと同じ形になっているのが分かります。なので、計量の 5 次元部分を

$$\hat{g}_{5\alpha} = 2\lambda A_\alpha \ , \ \hat{g}_{55} = 2\phi$$

とすれば (ϕ はスカラー関数、λ は定数)、5 次元で新しく出てきた成分は

$$[5\nu, \alpha] = \lambda(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) = \lambda F_{\nu\alpha}$$

$$[\mu\nu, 5] = \lambda(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu) = \lambda \Sigma_{\mu\nu}$$

$$[55, \alpha] = -\partial_\alpha \phi$$

$$[5\nu, 5] = \partial_\nu \phi$$

という電磁場らしきものとスカラー場の式を含みます。さらに第一種クリストッフェル記号には

$$\begin{aligned}
&\partial_D[AB, C] + \partial_D[CA, B] + \partial_D[BC, A] \\
&= \frac{1}{2}\partial_D(\partial_A \hat{g}_{BC} + \partial_B \hat{g}_{AC} - \partial_C \hat{g}_{AB}) + \frac{1}{2}\partial_D(\partial_C \hat{g}_{AB} + \partial_A \hat{g}_{CB} - \partial_B \hat{g}_{CA}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_D(\partial_B \hat{g}_{CA} + \partial_C \hat{g}_{BA} - \partial_A \hat{g}_{BC}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_A\partial_D \hat{g}_{BC} + \frac{1}{2}\partial_C\partial_D \hat{g}_{AB} + \frac{1}{2}\partial_B\partial_D \hat{g}_{CA} \\
&= \frac{1}{2}\partial_A(\partial_D \hat{g}_{BC} + \partial_B \hat{g}_{DC} - \partial_B \hat{g}_{DC} - \partial_C \hat{g}_{DB} + \partial_C \hat{g}_{DB}) + \frac{1}{2}\partial_C\partial_D \hat{g}_{AB} + \frac{1}{2}\partial_B\partial_D \hat{g}_{CA} \\
&= \frac{1}{2}\partial_A(\partial_D \hat{g}_{BC} + \partial_B \hat{g}_{DC} - \partial_C \hat{g}_{DB}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_C(\partial_D \hat{g}_{AB} + \partial_A \hat{g}_{DB}) + \frac{1}{2}\partial_B(\partial_D \hat{g}_{CA} - \partial_A \hat{g}_{DC}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_A(\partial_D \hat{g}_{BC} + \partial_B \hat{g}_{DC} - \partial_C \hat{g}_{DB}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_C(\partial_D \hat{g}_{AB} + \partial_A \hat{g}_{DB} - \partial_B \hat{g}_{DA}) + \frac{1}{2}\partial_C\partial_B \hat{g}_{DA} + \frac{1}{2}\partial_B(\partial_D \hat{g}_{CA} - \partial_A \hat{g}_{DC}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_A(\partial_D \hat{g}_{BC} + \partial_B \hat{g}_{DC} - \partial_C \hat{g}_{DB}) + \frac{1}{2}\partial_C(\partial_D \hat{g}_{AB} + \partial_A \hat{g}_{DB} - \partial_B \hat{g}_{DA}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_B(\partial_D \hat{g}_{CA} + \partial_C \hat{g}_{DA} - \partial_A \hat{g}_{DC}) \\
&= \partial_A[DB, C] + \partial_B[DC, A] + \partial_C[DA, B]
\end{aligned}$$

という関係があることから、$D = 5$ とすると

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_5[\alpha\beta, \nu] + \partial_5[\nu\alpha, \beta] + \partial_5[\beta\nu, \alpha] \\
&= \partial_\alpha[5\beta, \nu] + \partial_\beta[5\nu, \alpha] + \partial_\nu[5\alpha, \beta] \\
&= \lambda\partial_\alpha F_{\beta\nu} + \lambda\partial_\beta F_{\nu\alpha} + \lambda\partial_\nu F_{\alpha\beta} \\
&= \partial_\alpha F_{\beta\nu} + \partial_\beta F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

このように電磁場テンソルの関係と同じものが出てきます。

これで計量に電磁場らしきものが組み込まれました。しかし、まだ $F_{\mu\nu}$ がマクスウェル方程式に従うのか分からないので、それを確かめます。今は重力の記述の中に取り込むことを考えているので、使える方程式はアインシュタイン方程式 (1) のみです。なので、リッチテンソルを求めます。そのためには計量の形が必要になりますが、具体的な空間で行っていないので、計量の形は分かりません (アインシュタイン方程式が解けない)。なので、「アインシュタイン方程式の線形化」のようにミンコフスキー計量 $\hat{\eta}_{AB}$ に微小な寄与 $\hat{h}_{AB}$ をつけた

$$\hat{g}_{AB} = \hat{\eta}_{AB} + \hat{h}_{AB} \tag{2}$$

という形を考え、計量の行列式 $\hat{g}$ は $|\hat{g}| = 1$ と近似します。このとき第一種と第二種のクリストッフェル記号は

$$\hat{\Gamma}^C_{AB} = \frac{1}{2}\hat{g}^{CD}\big(\partial_A\hat{g}_{BD} + \partial_B\hat{g}_{AD} - \partial_D\hat{g}_{AB}\big) = \hat{g}^{CD}[AB, D] \simeq \hat{\eta}^{CD}[AB, D]$$

と近似されます。なので、$\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu}$ は

$$\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} \simeq \hat{\eta}^{\nu D}[5\mu, D] = \hat{\eta}^{\nu\alpha}[5\mu, \alpha] + \hat{\eta}^{\nu 5}[5\mu, 5] = \lambda\hat{\eta}^{\nu\alpha}F_{\mu\alpha}$$

$\hat{\Gamma}^\alpha_{55}$ は $[55, 5]$ は 0 なので

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{55} \simeq \hat{\eta}^{\alpha D}[55, D] = \hat{\eta}^{\alpha\beta}[55, \beta] = -\hat{\eta}^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi$$

リーマンテンソルの構造は 4 次元と同じなので、「アインシュタイン方程式の線形化〜重力波〜」で出したように、$\hat{h}_{AB}$ の 1 次までで

$$\hat{R}^A{}_{BCD} \simeq \partial_C\hat{\Gamma}^A_{BD} - \partial_D\hat{\Gamma}^A_{BC}$$

となっています。

よって、リッチテンソルは

$$\hat{R}_{BD} = \hat{R}^A{}_{BAD} \simeq \partial_A\hat{\Gamma}^A_{BD} - \partial_D\hat{\Gamma}^A_{BA}$$

今は $|\hat{g}| = 1$ とするので、クリストッフェル記号の関係

$$\partial_C\hat{\Gamma}^A_{BA} = \frac{1}{2}\partial_B\partial_C \log|\hat{g}| = 0$$

から、4 次元成分は

$$\hat{R}_{\alpha\beta} \simeq \partial_C\hat{\Gamma}^C_{\alpha\beta} - \partial_\beta\hat{\Gamma}^C_{\alpha C} = \partial_C\hat{\Gamma}^C_{\alpha\beta} = \partial_\mu\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} + \partial_5\hat{\Gamma}^5_{\alpha\beta} = \partial_\mu\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \tag{3a}$$

という 10 個の式になります。これは (2) の近似を 4 次元で行ったものと同じです。$\hat{R}_{5\mu}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{5\mu} &\simeq \partial_C \hat{\Gamma}^C_{5\mu} - \partial_\mu \hat{\Gamma}^C_{5C} \\
&= \partial_\nu \hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} + \partial_5 \hat{\Gamma}^5_{5\mu} - \partial_\mu \hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} - \partial_\mu \hat{\Gamma}^5_{55} \\
&= \partial_\nu \hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} - \partial_\mu \hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} \\
&= \lambda \hat{\eta}^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\mu\alpha} - \lambda \hat{\eta}^{\nu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} \\
&= \lambda \hat{\eta}^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\mu\alpha} \qquad (3b)
\end{aligned}$$

という 4 個の式です。下から 2 行目の第二項は、$\hat{\eta}^{\nu\alpha}$ は対角成分しかなく、$F_{\nu\alpha}$ は反対称テンソルなので消えます。$\hat{R}_{55}$ は

$$\hat{R}_{55} \simeq \partial_C \hat{\Gamma}^C_{55} = \partial_\alpha \hat{\Gamma}^\alpha_{55} = -\hat{\eta}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \phi \qquad (3c)$$

このようにリッチテンソルの中に $F_{\mu\nu}$ とスカラー ϕ が入ってくるので、5 次元のアインシュタイン方程式に $F_{\mu\nu}$ と ϕ の式がいることになります。

後はエネルギー・運動量テンソルを求めればいいです。エネルギー・運動量テンソルを含めたアインシュタイン方程式 (1) は

$$\hat{R}_{AB} = \kappa' (\hat{T}_{AB} - \frac{1}{2} \hat{g}_{AB} \hat{T})$$

と変形できます。成分を分けて書けば (全部で 10 + 4 + 1 =15 個)

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = \kappa' (\hat{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{T}) \qquad (4a)$$

$$\hat{R}_{5\mu} = \kappa' (\hat{T}_{5\mu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{5\mu} \hat{T}) \qquad (4b)$$

$$\hat{R}_{55} = \kappa' (\hat{T}_{55} - \frac{1}{2} \hat{g}_{55} \hat{T}) \qquad (4c)$$

左辺は (3a)〜(3c) で与えられています。(4a) はそのまま 4 次元の重力を表していると考えられます。

今はほぼ平坦空間としているので、エネルギー・運動量テンソルとして流体を使うことにし、5 次元にした

$$\hat{T}_{AB} = \rho \hat{u}_A \hat{u}_B$$

で近似できるとします。ρ は静止質量、$\hat{u}_A$ は 5 元速度です。このとき、(4b) の右辺において $\hat{g}_{5\mu}$ をミンコフスキー計量に近似してしまえば

$$\begin{aligned}
\lambda \hat{\eta}^{\nu\alpha} \partial_\nu \hat{F}_{\mu\alpha} &= \hat{R}_{5\mu} \\
&= \kappa' \hat{T}_{5\mu} \\
&= \kappa' \rho \hat{u}_5 \hat{u}_\mu \\
\hat{\eta}^{\nu\alpha} \partial_\nu \hat{F}_{\mu\alpha} &= \kappa' \frac{\rho}{\lambda} \hat{u}_5 \hat{u}_\mu
\end{aligned}$$

左辺の添え字の上げ下げが $\hat{\eta}^{\nu\alpha}$ で出来るとして

$$\partial^\alpha F_{\mu\alpha} = \kappa' \frac{\rho}{\lambda}\hat{u}_5\hat{u}_\mu$$

これとマクスウェル方程式

$$\partial^\alpha F_{\mu\alpha} = \sigma v_\mu$$

を比べれば (σ は電荷密度、v_μ は 4 元速度)

$$\sigma v_\mu = \kappa' \frac{\rho}{\lambda}\hat{u}_\mu\hat{u}_5$$

5 次元での $\hat{u}_5$ を電荷に対応させることで (4b) はマクスウェル方程式となります。$\hat{u}_A\hat{u}_B$ から、エネルギー・運動量テンソルの 5 次元成分はこの電荷を含むことになります。

さらに 5 元速度を $\hat{u}_0 \simeq 1, \hat{u}_i, \hat{u}_5 \ll 1$ と近似します (5 元速度は無次元に定義している)。そうするとエネルギー・運動量テンソルは

$$\hat{T}_{00} \simeq \rho\ ,\ \hat{T}_{11}, \hat{T}_{22}, \hat{T}_{33}, \hat{T}_{55} \simeq 0$$

と近似されるので

$$\hat{T} = \hat{g}^{AB}\hat{T}_{AB} \simeq \hat{g}^{00}\hat{T}_{00} \simeq \hat{\eta}^{00}\rho = \rho$$

よって、$\hat{g}_{55} \simeq \hat{\eta}_{55}$ として

$$\hat{R}_{55} = \kappa'(\hat{T}_{55} - \frac{1}{2}\hat{g}_{55}\hat{T}) \simeq \kappa'\frac{1}{2}\rho$$

なので、スカラー場 ϕ に対しては

$$\hat{\eta}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\phi = -\kappa'\frac{1}{2}\rho$$

というポアソン方程式の形になります。

また、同様の近似において $\hat{R}_{00}$ は

$$\hat{R}_{00} = \kappa'(\hat{T}_{00} - \frac{1}{2}\hat{g}_{00}\hat{T}) \simeq \kappa'\frac{1}{2}\rho$$

となりますが、これは「アインシュタイン方程式」において係数を決めるために今の近似を行ったときと同じ形です。なので $\hat{R}_{00}$ は重力部分を再現出来ています。

これがカルツァが示した方法で、重力、電磁場、スカラー場が 5 次元の幾何学の中で統一されています。しかし、今見てきて分かるように、この話は見通しよく作られていませんし、余剰次元が 4 次元に影響しない (実験結果に寄与しない) 理由が不明です。これを 1926 年にクライン (Klein) が改善し、4 次元に寄与しないように余剰次元の構造を与えました。現在、カルツァ・クライン理論と言ったときはこちらを指します。

というわけで、クラインによる再定式化を見ます。今の話を変換性の視点から見直します。まず、5 次元線素は

$$ds^2 = \hat{g}_{AB}dx^A dx^B$$

とします。ここでも cylinder condition は仮定し、計量の x^5 微分は消えるとします。この仮定のため、5 次元部分は分離させて座標変換する必要が出てきます。これは座標変換後も計量が x^5 に独立であるためには

$$\hat{g}'_{AB} = \frac{\partial x^C}{\partial x'^A}\frac{\partial x^D}{\partial x'^B}\hat{g}_{CD}$$

において、右辺に x^5 が出てこないようにする必要があるからです。そのためには、4 次元成分の座標変換では

$$x^\mu = f^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

という通常通りの変換をさせ、5 次元部分は

$$x^5 = ax'^5 + f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

という変換にする必要があります (f^μ, f は変換に対応する任意の関数)。a は任意定数ですが、害がないので $a = 1$ にします。この変換では

$$\hat{g}'_{AB} = \frac{\partial x^C}{\partial x'^A}\frac{\partial x^D}{\partial x'^B}\hat{g}_{CD} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^A}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^B}\hat{g}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^A}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^B}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^A}\frac{\partial x^5}{\partial x'^B}\hat{g}_{\alpha 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^A}\frac{\partial x^5}{\partial x'^B}\hat{g}_{55}$$

から、$A, B = 5$ のとき

$$\hat{g}'_{55} = \hat{g}_{55}$$

となるので不変です。なので $\hat{g}_{55}$ は定数 ψ とします。

線素は

$$d\theta^2 = \frac{1}{\hat{g}_{55}}(\hat{g}_{\alpha 5}dx^\alpha + \hat{g}_{55}dx^5)^2 = \frac{1}{\hat{g}_{55}}(\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{\beta 5}dx^\alpha dx^\beta + \hat{g}_{55}^2(dx^5)^2 + 2\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{55}dx^\alpha dx^5)$$

と

$$d\sigma^2 = (\hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{\beta 5}}{\hat{g}_{55}})dx^\alpha dx^\beta$$

の 2 つに分離できます。実際に足せば

$$
\begin{aligned}
d\theta^2 + d\sigma^2 &= \frac{1}{\hat{g}_{55}}(\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{\beta 5}dx^\alpha dx^\beta + \hat{g}_{55}^2(dx^5)^2 + 2\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{55}dx^\alpha dx^5) + (\hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{\hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}_{\beta 5}}{\hat{g}_{55}})dx^\alpha dx^\beta \\
&= \hat{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2\hat{g}_{\alpha 5}dx^\alpha dx^5 + \hat{g}_{55}(dx^5)^2 \\
&= \hat{g}_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \hat{g}_{\alpha 5}dx^\alpha dx^5 + \hat{g}_{5\alpha}dx^5 dx^\alpha + \hat{g}_{55}(dx^5)^2 \\
&= \hat{g}_{AB}dx^A dx^B
\end{aligned}
$$

となります。

変換性を見ます。$\hat{g}_{5\alpha}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{g}'_{5\alpha} &= \frac{\partial x^C}{\partial x'^5}\frac{\partial x^D}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{CD} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^5}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^5}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^5}\frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{\mu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^5}\frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{55} \\
&= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{55}
\end{aligned}
$$

これと、dx'^α は x'^α は x^5 に依存しないために

$$
dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^B}dx^B = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta
$$

となることを合わせれば

$$
\begin{aligned}
\hat{g}'_{5\alpha}dx'^\alpha &= (\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{55})\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta \\
&= (\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\hat{g}_{55})dx^\beta \\
&= (\delta^\nu_\beta\hat{g}_{5\nu} + \delta^5_\beta\hat{g}_{55})dx^\beta \\
&= \hat{g}_{5\beta}dx^\beta
\end{aligned}
$$

となって、不変なのが分かります。このため、$d\sigma^2$ は座標変換に対して不変です。また、5 次元空間において $\hat{g}_{5\alpha}$ は 4 元ベクトルと同じ性質を持っていることも分かるので、$\hat{g}_{5\alpha}$ には 4 次元のベクトルを対応させられます。

$\hat{g}_{5A}dx^A$ も見ておくと

$$
\hat{g}'_{5A}dx'^A = \frac{\partial x^C}{\partial x'^5}\frac{\partial x^D}{\partial x'^A}\frac{\partial x'^A}{\partial x^E}\hat{g}_{CD}dx^E = \hat{g}_{5A}dx^A
$$

そして、$\hat{g}_{55}$ は不変なので、$d\theta^2$ も不変になっています。

$\hat{g}_{5\alpha}$ の変換

$$
\hat{g}'_{5\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{55}
$$

に対して、具体的な座標変換として (ϵ はスカラー関数)

$$x^\mu = x'^\mu \ , \ x^5 = x'^5 + \epsilon(x'^\mu) \tag{5}$$

という 5 次元成分のみの座標変換を与えてみると

$$\hat{g}'_{5\alpha} = \hat{g}_{5\alpha} + \hat{g}_{55}\frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\alpha} \tag{6a}$$

となります。これはベクトルポテンシャルのゲージ変換

$$A_\mu \ \Rightarrow \ A_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Lambda(x^\alpha) \tag{6b}$$

と同じ形になっています。そして、$\hat{g}_{55}$ は定数 ψ で、$\hat{g}_{5\alpha}$ は 4 元ベクトルと同じ変換をするので、$\hat{g}_{5\alpha}$ はベクトルポテンシャルを含んでいると考えて

$$\hat{g}_{5\alpha} = \chi\psi A_\alpha$$

とします (変換の対応からベクトルポテンシャルと呼んだだけで、まだマクスウェル方程式に従っているのかは分からない)。χ は後で決める定数です。

この座標変換で不変な量を作ることで、計量の 4 次元部分の形を決めます。$d\sigma^2$ の不変性から分かることですが、具体的に見ておきます。$\hat{g}_{\alpha\beta}$ の変換を ϵ の 1 次まで拾うと

$$\begin{aligned}
\hat{g}'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^C}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^D}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{CD} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{5\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^5}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{\mu 5} + \frac{\partial x^5}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^5}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{55} \\
&= \hat{g}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{\alpha 5} + \frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{55} \\
&\simeq \hat{g}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial\epsilon}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{\alpha 5}
\end{aligned}$$

そして、これと

$$\hat{g}'_{5\alpha}\hat{g}'_{5\beta} \simeq \hat{g}_{5\alpha}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{5\alpha}\hat{g}_{55} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\beta}\hat{g}_{55}$$

から

$$\begin{aligned}
&\hat{g}'_{\alpha\beta} - \frac{1}{\hat{g}_{55}}\hat{g}'_{5\alpha}\hat{g}'_{5\beta} \\
&= \hat{g}_{\alpha\beta} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{5\alpha} - \frac{1}{\hat{g}_{55}}(\hat{g}_{5\alpha}\hat{g}_{5\beta} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\alpha}\hat{g}_{5\beta}\hat{g}_{55} + \frac{\partial\epsilon(x'^\mu)}{\partial x'^\beta}\hat{g}_{5\alpha}\hat{g}_{55}) \\
&= \hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{\hat{g}_{55}}\hat{g}_{5\alpha}\hat{g}_{5\beta}
\end{aligned} \tag{7}$$

というように変換に対して不変なものを作れます ($d\sigma^2$ の不変性からも分かる)。$\hat{g}_{AB}$ の 4 次元部分を

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{1}{g_{55}} g_{5\alpha} g_{5\beta} = g_{\alpha\beta} + \chi^2 \psi A_\alpha A_\beta$$

とすれば、(7) の左辺は

$$\hat{g}'_{\alpha\beta} - \frac{1}{g_{55}} g'_{5\alpha} g'_{5\beta} = g'_{\alpha\beta} + \frac{1}{g'_{55}} g'_{5\alpha} g'_{5\beta} - \frac{1}{g_{55}} g'_{5\alpha} g'_{5\beta} = g'_{\alpha\beta}$$

右辺は

$$\hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{g_{55}} g_{5\alpha} g_{5\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{1}{g_{55}} g_{5\alpha} g_{5\beta} - \frac{1}{g_{55}} g_{5\alpha} g_{5\beta} = g_{\alpha\beta}$$

となるので、A_μ のゲージ変換を作る座標変換に対して不変な 4 次元の量 $g_{\alpha\beta}$ が作れたことになります。ここで、4 次元時空の計量は A_μ のゲージ変換で不変と考えて、$g_{\alpha\beta}$ を 4 次元空間の計量とします。$\hat{g}_{5\alpha}$ は 4 元ベクトルと見なせるので、A_α の添え字は $g_{\alpha\beta}$ で上げ下げ出来るとします。

　というわけで、5 次元の計量 $\hat{g}_{AB}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{AB} &= \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \chi^2 \psi A_\alpha A_\beta & \chi\psi A_\alpha \\ \chi\psi A_\beta & \psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
g_{00} + \chi^2\psi A_0 A_0 & g_{01} + \chi^2\psi A_0 A_1 & g_{02} + \chi^2\psi A_0 A_2 & g_{03} + \chi^2\psi A_0 A_3 & \chi\psi A_0 \\
g_{10} + \chi^2\psi A_1 A_0 & g_{11} + \chi^2\psi A_1 A_1 & g_{12} + \chi^2\psi A_1 A_2 & g_{13} + \chi^2\psi A_1 A_3 & \chi\psi A_1 \\
g_{20} + \chi^2\psi A_2 A_0 & g_{21} + \chi^2\psi A_2 A_1 & g_{22} + \chi^2\psi A_2 A_2 & g_{23} + \chi^2\psi A_2 A_3 & \chi\psi A_2 \\
g_{30} + \chi^2\psi A_3 A_0 & g_{31} + \chi^2\psi A_3 A_1 & g_{32} + \chi^2\psi A_3 A_2 & g_{33} + \chi^2\psi A_3 A_3 & \chi\psi A_3 \\
\chi\psi A_0 & \chi\psi A_1 & \chi\psi A_2 & \chi\psi A_2 & \psi
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

となります。5 次元目はカルツァが示したものと同じです。逆は $\hat{g}_{AB}\hat{g}^{BC} = \delta^A_C$ になるようにすればいいので

$$\hat{g}^{AB} = \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -\chi A^\beta \\ -\chi A^\alpha & \psi^{-1}(1 + \chi^2\psi A_\mu A^\mu) \end{pmatrix}$$

となります。実際に、$\hat{g}_{\alpha A}\hat{g}^{A\beta}$ は

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\alpha A}\hat{g}^{A\beta} = \hat{g}_{\alpha\mu}\hat{g}^{\mu\beta} + \hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}^{5\beta} &= (g_{\alpha\mu} + \chi^2\psi A_\alpha A_\mu) g^{\mu\beta} + \hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}^{5\beta} \\
&= (\delta^\beta_\alpha + \chi^2\psi A_\alpha A^\beta) - \chi^2\psi A_\alpha A^\beta \\
&= \delta^\beta_\alpha
\end{aligned}$$

$\hat{g}_{5A}\hat{g}^{A5}$ は

$$\hat{g}_{5A}\hat{g}^{A5} = \hat{g}_{5\mu}\hat{g}^{\mu 5} + \hat{g}_{55}\hat{g}^{55} = \chi\psi A_\mu \hat{g}^{\mu 5} + \psi \hat{g}^{55} = -\chi^2\psi A_\mu A^\mu + 1 + \chi^2\psi A_\alpha A^\alpha = 1$$

$\hat{g}_{\alpha A}\hat{g}^{A5}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{g}_{\alpha A}\hat{g}^{A5} &= \hat{g}_{\alpha\mu}\hat{g}^{\mu 5} + \hat{g}_{\alpha 5}\hat{g}^{55} \\
&= (g_{\alpha\mu} + \chi^2\psi A_\alpha A_\mu)\hat{g}^{\mu 5} + \chi\psi A_\alpha \hat{g}^{55} \\
&= -\chi(g_{\alpha\mu} + \chi^2\psi A_\alpha A_\mu)A^\mu + \chi\psi A_\alpha \hat{g}^{55} \\
&= -\chi A_\alpha(1 + \chi^2\psi A_\mu A^\mu) + \chi\psi A_\alpha \hat{g}^{55} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となっています。

問題はこの計量から 4 次元での重力と電磁場が出てくるかです。というわけで、リッチテンソル $\hat{R}_{AB}$ を計算します。単純で面倒な計算を行っていくだけなので (9) に飛んでいいです。cylinder condition から ∂_5 の項は落ちるので、$\hat{R}_{AB}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{AB} &= \partial_C\hat{\Gamma}^C_{AB} - \partial_B\hat{\Gamma}^C_{AC} - \hat{\Gamma}^C_{AD}\hat{\Gamma}^D_{BC} + \hat{\Gamma}^C_{AB}\hat{\Gamma}^D_{CD} \\
&= \partial_\mu\hat{\Gamma}^\mu_{AB} - \partial_B\hat{\Gamma}^\mu_{A\mu} - \partial_B\hat{\Gamma}^5_{A5} \\
&\quad - \hat{\Gamma}^\mu_{A\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{B\mu} - \hat{\Gamma}^\mu_{A5}\hat{\Gamma}^5_{B\mu} - \hat{\Gamma}^5_{A\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{B5} - \hat{\Gamma}^5_{A5}\hat{\Gamma}^5_{B5} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^\mu_{AB}\hat{\Gamma}^\nu_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\mu_{AB}\hat{\Gamma}^5_{\mu 5} + \hat{\Gamma}^5_{AB}\hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} + \hat{\Gamma}^5_{AB}\hat{\Gamma}^5_{55}
\end{aligned}
$$

これから必要となるクリストッフェル記号は

$$
\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\ ,\ \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\mu}\ ,\ \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\ ,\ \hat{\Gamma}^\mu_{55}\ ,\ \hat{\Gamma}^\nu_{5\nu}\ ,\ \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5}\ ,\ \hat{\Gamma}^5_{\alpha\nu}\ ,\ \hat{\Gamma}^5_{55}
$$

これらを求めます。計量 $g_{\alpha\beta}$ によるクリストッフェル記号は $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ と書くことにします。

- $\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu A}\big(\partial_\beta \hat{g}_{A\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta A} - \partial_A \hat{g}_{\alpha\beta}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\big(\partial_\beta \hat{g}_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta\nu} - \partial_\nu \hat{g}_{\alpha\beta}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu 5}\big(\partial_\beta \hat{g}_{5\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta 5} - \partial_5 \hat{g}_{\alpha\beta}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\big(\partial_\beta \hat{g}_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta\nu} - \partial_\nu \hat{g}_{\alpha\beta}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu 5}\big(\partial_\beta \hat{g}_{5\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta 5}\big) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\beta(g_{\nu\alpha} + \chi^2\psi A_\nu A_\alpha) + \partial_\alpha(g_{\beta\nu} + \chi^2\psi A_\beta A_\nu) - \partial_\nu(g_{\alpha\beta} + \chi^2\psi A_\alpha A_\beta)) \\
&\quad - \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta} \\
&\quad + \chi^2\psi(\partial_\beta A_\nu)A_\alpha + \chi^2\psi A_\nu(\partial_\beta A_\alpha) + \chi^2\psi(\partial_\alpha A_\beta)A_\nu + \chi^2\psi A_\beta(\partial_\alpha A_\nu) \\
&\quad - \chi^2\psi(\partial_\nu A_\alpha)A_\beta - \chi^2\psi A_\alpha(\partial_\nu A_\beta)\big) - \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu \Sigma_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(\chi^2\psi A_\alpha(\partial_\beta A_\nu - \partial_\nu A_\beta) + \chi^2\psi A_\beta(\partial_\alpha A_\nu - \partial_\nu A_\alpha) + \chi^2\psi A_\nu(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta)\big) \\
&\quad - \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu \Sigma_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\chi^2\psi A_\alpha F_{\beta\nu} + \chi^2\psi A_\beta F_{\alpha\nu} + \chi^2\psi A_\nu \Sigma_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu \Sigma_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\chi^2\psi g^{\mu\nu}(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu})
\end{aligned}
$$

- $\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\mu}$

$$
\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\mu} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi g^{\mu\nu}(A_\alpha F_{\mu\nu} + A_\mu F_{\alpha\nu}) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\nu F_{\alpha\nu}
$$

- $\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha 5}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha 5} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu A}\big(\partial_5 \hat{g}_{A\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{5A} - \partial_A \hat{g}_{\alpha 5}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\big(\partial_\alpha \hat{g}_{5\nu} - \partial_\nu \hat{g}_{\alpha 5}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu 5}\big(\partial_\alpha \hat{g}_{55} - \partial_5 \hat{g}_{\alpha 5}\big) \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi g^{\mu\nu}\big(\partial_\alpha A_\nu - \partial_\nu A_\alpha\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu 5}\partial_\alpha \psi \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi g^{\mu\nu} F_{\alpha\nu}
\end{aligned}
$$

- $\hat{\Gamma}^{\mu}_{55}$

$$
\hat{\Gamma}^{\mu}_{55} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu A}\big(\partial_5 \hat{g}_{A5} + \partial_5 \hat{g}_{5A} - \partial_A \hat{g}_{55}\big) = 0
$$

- $\hat{\Gamma}^{\nu}_{5\nu}$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\nu}_{5\nu} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\nu A}\big(\partial_\nu \hat{g}_{A5} + \partial_5 \hat{g}_{\nu A} - \partial_A \hat{g}_{5\nu}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{\nu\mu}\big(\partial_\nu \hat{g}_{\mu 5} - \partial_\mu \hat{g}_{5\nu}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{\nu 5}\big(\partial_\nu \hat{g}_{55} - \partial_5 \hat{g}_{5\nu}\big) \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\big(\partial_\nu \hat{g}_{\mu 5} - \partial_\mu \hat{g}_{5\nu}\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- $\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha 5}$

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha 5} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{5A}\big(\partial_5 \hat{g}_{A\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{5A} - \partial_A \hat{g}_{\alpha 5}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{5\mu}\big(\partial_\alpha \hat{g}_{5\mu} - \partial_\mu \hat{g}_{\alpha 5}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{55}\big(\partial_\alpha \hat{g}_{55} - \partial_5 \hat{g}_{\alpha 5}\big) \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi\hat{g}^{5\mu}\big(\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha\big) \\
&= -\frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu F_{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

- $\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^5_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\hat{g}^{5A}\big(\partial_\beta \hat{g}_{A\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta A} - \partial_A \hat{g}_{\alpha\beta}\big) \\
&= \frac{1}{2}\hat{g}^{5\nu}\big(\partial_\beta \hat{g}_{\nu\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta\nu} - \partial_\nu \hat{g}_{\alpha\beta}\big) + \frac{1}{2}\hat{g}^{55}\big(\partial_\beta \hat{g}_{5\alpha} + \partial_\alpha \hat{g}_{\beta 5}\big) \\
&= -\frac{1}{2}\chi A^\nu(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\chi A^\nu(\chi^2\psi A_\alpha F_{\beta\nu} + \chi^2\psi A_\beta F_{\alpha\nu} + \chi^2\psi A_\nu \Sigma_{\alpha\beta}) \\
&\quad +\frac{1}{2}\chi(1+\chi^2\psi A_\nu A^\nu)(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta) \\
&= -\chi A^\nu[\alpha\beta,\nu] - \frac{1}{2}\chi A^\nu(\chi^2\psi A_\alpha F_{\beta\nu} + \chi^2\psi A_\beta F_{\alpha\nu} + \chi^2\psi A_\nu \Sigma_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\chi\Sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\chi^3\psi A_\nu A^\nu \Sigma_{\alpha\beta} \\
&= -\chi A^\nu[\alpha\beta,\nu] - \frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi\Sigma_{\alpha\beta} \\
&= -\chi A^\nu[\alpha\beta,\nu] - \frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi\Sigma_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - 2A^\nu[\alpha\beta,\nu]) \\
&= -\frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - 2A^\nu g_{\nu\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi(\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta - 2A_\mu\Gamma^\mu_{\alpha\beta}) \\
&= -\frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}\chi(A_{\alpha||\beta} + A_{\beta||\alpha})
\end{aligned}
$$

途中でクリストッフェル記号の関係

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= g^{\mu\lambda}[\alpha\beta,\lambda] \\
g_{\nu\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= g_{\nu\mu}g^{\mu\lambda}[\alpha\beta,\lambda] \\
&= [\alpha\beta,\nu]
\end{aligned}
$$

を使っています。

- $\hat{\Gamma}^5_{55}$

$$
\hat{\Gamma}^5_{55} = \frac{1}{2}\hat{g}^{5A}\big(\partial_5 \hat{g}_{A5} + \partial_5 \hat{g}_{5A} - \partial_A \hat{g}_{55}\big) = 0
$$

まとめると

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\chi^2\psi g^{\mu\nu}(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_\alpha F_\beta{}^\mu + A_\beta F_\alpha{}^\mu) = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta}$$

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\mu} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu F_{\alpha\mu}$$

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha 5} = \frac{1}{2}\chi\psi g^{\mu\nu}F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\chi\psi F_\alpha{}^\mu$$

$$\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha 5} = -\frac{1}{2}\chi^2\psi A^\mu F_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2}\chi^2\psi A_\mu F_\alpha{}^\mu$$

$$\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\chi(A_{\alpha||\beta} + A_{\beta||\alpha}) - \frac{1}{2}\chi^3\psi A^\nu(A_\alpha F_{\beta\nu} + A_\beta F_{\alpha\nu}) = \frac{1}{2}\chi(A_{\alpha||\beta} + A_{\beta||\alpha}) - \frac{1}{2}\chi A_\nu L^{\nu}_{\alpha\beta}$$

$$\hat{\Gamma}^{\nu}_{5\nu} = 0\ ,\ \hat{\Gamma}^{\mu}_{55} = 0\ ,\ \hat{\Gamma}^{5}_{55} = 0$$

これらからリッチテンソルの成分を求めます。

リッチテンソルの 4 次元成分 $\hat{R}_{\alpha\beta}$ は

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\alpha\beta} = &\ \partial_\mu\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\mu} - \partial_\beta\hat{\Gamma}^{5}_{\alpha 5}\\ &- \hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^{\nu}_{\beta\mu} - \hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^{5}_{\beta\mu} - \hat{\Gamma}^{5}_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^{\nu}_{\beta 5} - \hat{\Gamma}^{5}_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^{5}_{\beta 5}\\ &+ \hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{5}_{\mu 5} + \hat{\Gamma}^{5}_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{\nu}_{5\nu} + \hat{\Gamma}^{5}_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{5}_{55}\end{aligned}$$

これの各項は

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} &= \Gamma^\mu_{\alpha\beta|\mu} + \frac{1}{2} L^\mu_{\alpha\beta|\mu} \\
\partial_\beta \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\mu} &= \Gamma^\mu_{\alpha\mu|\beta} + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A^\nu F_{\alpha\nu})_{|\beta} \\
\partial_\beta \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5} &= -\frac{1}{2}\chi^2\psi(A^\nu F_{\alpha\nu})_{|\beta} \\
\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{\beta\mu} &= (\Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}L^\mu_{\alpha\nu})(\Gamma^\nu_{\beta\mu} + \frac{1}{2}L^\nu_{\beta\mu}) \\
\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{\beta\mu} &= \frac{1}{2}\chi\psi F_\alpha{}^\mu(\frac{1}{2}\chi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta}) - \frac{1}{2}\chi A_\nu L^\nu_{\beta\mu}) \\
\hat{\Gamma}^5_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{\beta 5} &= \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\nu} + A_{\nu||\alpha} - A_\rho L^\rho_{\alpha\nu})F_\beta{}^\nu \\
\hat{\Gamma}^5_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{\beta 5} &= \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A^\mu A^\nu F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} \\
\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^\nu_{\mu\nu} &= (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}L^\mu_{\alpha\beta})(\Gamma^\nu_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\nu F_{\mu\nu}) \\
\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^5_{\mu 5} &= -\frac{1}{2}\chi^2\psi(\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}L^\mu_{\alpha\beta})A^\rho F_{\mu\rho} \\
\hat{\Gamma}^5_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} &= 0 \\
\hat{\Gamma}^5_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^5_{55} &= 0
\end{aligned}
$$

これらによって

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta} &= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A^{\mu}A^{\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} \\
&\quad - (\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\nu})(\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} + \frac{1}{2}L^{\nu}_{\beta\mu}) \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta} - A_{\nu}L^{\nu}_{\beta\mu})F_{\alpha}{}^{\mu} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu} + A_{\mu||\alpha} - A_{\nu}L^{\nu}_{\alpha\mu})F_{\beta}{}^{\mu} \\
&\quad + (\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta})(\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi A^{\nu}F_{\mu\nu}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\chi^2\psi(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta})A^{\nu}F_{\mu\nu} \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A^{\mu}A^{\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}L^{\nu}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}L^{\mu}_{\alpha\nu} - \frac{1}{4}L^{\mu}_{\alpha\nu}L^{\nu}_{\beta\mu} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta})F_{\alpha}{}^{\mu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A_{\nu}F_{\alpha}{}^{\mu}L^{\nu}_{\beta\mu} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu} + A_{\mu||\alpha})F_{\beta}{}^{\mu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A_{\nu}F_{\beta}{}^{\mu}L^{\nu}_{\alpha\mu} \\
&\quad + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}L^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\chi^2\psi\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}A^{\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A^{\nu}F_{\mu\nu}L^{\mu}_{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{1}{2}\chi^2\psi\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}A^{\rho}F_{\mu\rho} - \frac{1}{4}\chi^2\psi A^{\rho}F_{\mu\rho}L^{\mu}_{\alpha\beta} \\
&= \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu|\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A^{\mu}A^{\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} + \frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}L^{\nu}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}L^{\mu}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}L^{\mu}_{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta})F_{\alpha}{}^{\mu} - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu} + A_{\mu||\alpha})F_{\beta}{}^{\mu} \\
&\quad - \frac{1}{4}L^{\mu}_{\alpha\nu}L^{\nu}_{\beta\mu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A_{\nu}L^{\nu}_{\beta\mu}F_{\alpha}{}^{\mu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A_{\nu}L^{\nu}_{\alpha\mu}F_{\beta}{}^{\mu}
\end{aligned}
$$

一行目は $g_{\alpha\beta}$ によるリッチテンソルの形なので $R_{\alpha\beta}$ として、共変微分

$$
L^{\mu}_{\alpha\beta||\mu} = L^{\mu}_{\alpha\beta|\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}L^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}L^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}L^{\mu}_{\alpha\beta}
$$

を使うことで

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\mu A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu \\
&\quad + \frac{1}{2}L^\mu_{\alpha\beta||\mu} - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta})F_\alpha{}^\mu - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu} + A_{\mu||\alpha})F_\beta{}^\mu \\
&\quad - \frac{1}{4}L^\mu_{\alpha\nu}L^\nu_{\beta\mu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi A_\nu(L^\nu_{\beta\mu}F_\alpha{}^\mu + L^\nu_{\alpha\mu}F_\beta{}^\mu) \\
&= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\mu A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_\alpha F_\beta{}^\mu + A_\beta F_\alpha{}^\mu)_{||\mu} \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu} + A_{\mu||\beta})F_\alpha{}^\mu - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu} + A_{\mu||\alpha})F_\beta{}^\mu \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2(A_\alpha A_\beta F_\nu{}^\mu F_\mu{}^\nu + A_\nu A_\beta F_\alpha{}^\mu F_\mu{}^\nu + A_\alpha A_\mu F_\nu{}^\mu F_\beta{}^\nu + A_\nu A_\mu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu) \\
&\quad + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2(A_\beta A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\mu{}^\nu + A_\mu A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu + A_\alpha A_\nu F_\beta{}^\mu F_\mu{}^\nu + A_\mu A_\nu F_\beta{}^\mu F_\alpha{}^\nu) \\
&= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\mu A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_{\alpha||\mu}F_\beta{}^\mu + A_\alpha F^\mu_{\beta||\mu} + A_{\beta||\mu}F_\alpha{}^\mu + A_\beta F^\mu_{\alpha||\mu}) \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^2\psi(A_{\beta||\mu}F_\alpha{}^\mu + A_{\mu||\beta}F_\alpha{}^\mu + A_{\alpha||\mu}F_\beta{}^\mu + A_{\mu||\alpha}F_\beta{}^\mu) \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2(A_\alpha A_\beta F_\nu{}^\mu F_\mu{}^\nu + A_\alpha A_\mu F_\nu{}^\mu F_\beta{}^\nu) \\
&\quad + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2(A_\alpha A_\nu F_\mu{}^\nu F_\beta{}^\mu + A_\mu A_\nu F_\beta{}^\mu F_\alpha{}^\nu) \\
&= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\mu A_\nu F_\alpha{}^\mu F_\beta{}^\nu \\
&\quad + \frac{1}{4}\chi^2\psi((A_{\alpha||\mu} - A_{\mu||\alpha})F_\beta{}^\mu + (A_{\beta||\mu} - \frac{1}{4}A_{\mu||\beta})F_\alpha{}^\mu) + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_\alpha F^\mu_{\beta||\mu} + A_\beta F^\mu_{\alpha||\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\alpha A_\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\mu A_\nu F_\beta{}^\mu F_\alpha{}^\nu \\
&= R_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\chi^2\psi(F_{\mu\alpha}F_\beta{}^\mu + F_{\mu\beta}F_\alpha{}^\mu) + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_\alpha F^\mu_{\beta||\mu} + A_\beta F^\mu_{\alpha||\mu}) + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\alpha A_\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

$\hat{R}_{\alpha 5}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha 5} &= \partial_\mu \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5} - \partial_5 \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\mu} - \partial_5 \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5} \\
&\quad - \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} - \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{5\mu} - \hat{\Gamma}^5_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{55} - \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{55} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^\nu_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{\mu 5} + \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} + \hat{\Gamma}^5_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{55} \\
&= \partial_\mu \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5} - \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} - \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{5\mu} + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^\nu_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\mu_{\alpha 5}\hat{\Gamma}^5_{\mu 5} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha|\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\chi\psi(\Gamma^\mu_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}L^\mu_{\alpha\nu})F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\psi F_\alpha{}^\mu(\Gamma^\nu_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi^2\psi A^\nu F_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha|\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\chi\psi\Gamma^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu - \frac{1}{4}\chi\psi L^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\psi F_\alpha{}^\mu\Gamma^\nu_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha|\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\chi\psi\Gamma^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu + \frac{1}{2}\chi\psi F_\alpha{}^\mu\Gamma^\nu_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\chi\psi L^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha|\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{2}\chi\psi\Gamma^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu + \frac{1}{2}\chi\psi\Gamma^\nu_{\mu\nu}F_\alpha{}^\mu \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^3\psi^2(A_\alpha F_\nu{}^\mu + A_\nu F_\alpha{}^\mu)F_\mu{}^\nu + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A^\nu F_\alpha{}^\mu F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha||\mu}{}^{\mu} - \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A_\alpha F_{\nu\mu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\chi\psi F_{\alpha||\mu}{}^{\mu} + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

共変微分

$$
F_{\alpha||\mu}{}^{\mu} = F_{\alpha|\mu}{}^{\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu}F_\mu{}^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\nu}F_\alpha{}^\mu
$$

を使っています。

$\hat{R}_{55}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{55} &= \partial_\mu \hat{\Gamma}^\mu_{55} - \partial_5 \hat{\Gamma}^\mu_{5\mu} - \partial_5 \hat{\Gamma}^5_{55} \\
&\quad - \hat{\Gamma}^\mu_{5\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} - \hat{\Gamma}^\mu_{55}\hat{\Gamma}^5_{5\mu} - \hat{\Gamma}^5_{5\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{55} - \hat{\Gamma}^5_{55}\hat{\Gamma}^5_{55} \\
&\quad + \hat{\Gamma}^\mu_{55}\hat{\Gamma}^\nu_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\mu_{55}\hat{\Gamma}^5_{\mu 5} + \hat{\Gamma}^5_{55}\hat{\Gamma}^\nu_{5\nu} + \hat{\Gamma}^5_{55}\hat{\Gamma}^5_{55} \\
&= -\hat{\Gamma}^\mu_{5\nu}\hat{\Gamma}^\nu_{5\mu} \\
&= -\frac{1}{4}\chi^2\psi^2 g^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\beta} \\
&= -\frac{1}{4}\chi^2\psi^2 F_\nu{}^\mu F_\mu{}^\nu \\
&= -\frac{1}{4}\chi^2\psi^2 F_{\nu\mu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4}\chi^2\psi^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

よって、リッチテンソルは

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\chi^2\psi(F_{\mu\alpha}F_\beta{}^\mu + F_{\mu\beta}F_\alpha{}^\mu) + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A_\alpha F^{\ \ \mu}_{\beta||\mu} + A_\beta F^{\ \ \mu}_{\alpha||\mu}) + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\alpha A_\beta F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
\hat{R}_{\alpha 5} &= \frac{1}{2}\chi\psi F^{\ \ \mu}_{\alpha||\mu} + \frac{1}{4}\chi^3\psi^2 A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
\hat{R}_{55} &= \frac{1}{4}\chi^2\psi^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

リッチスカラーは

$$
\begin{aligned}
\hat{g}^{AB}\hat{R}_{AB} &= \hat{g}^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\beta} + 2\hat{g}^{\alpha 5}\hat{R}_{\alpha 5} + \hat{g}^{55}\hat{R}_{55} \\
&= g^{\alpha\beta}\hat{R}_{\alpha\beta} - 2\chi A^\alpha \hat{R}_{\alpha 5} + \psi^{-1}(1+\chi^2\psi A_\alpha A^\alpha)\hat{R}_{55} \\
&= R + \frac{1}{4}\chi^2\psi(F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} + F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}) + \frac{1}{2}\chi^2\psi(A^\nu F^{\ \ \mu}_{\nu||\mu} + A^\nu F^{\ \ \mu}_{\nu||\mu}) + \frac{1}{4}\chi^4\psi^2 A_\alpha A^\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&\quad - \chi^2\psi A^\nu F^{\ \ \mu}_{\nu||\mu} - \frac{1}{2}\chi^4\psi^2 A^\alpha A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi(1+\chi^2\psi A_\alpha A^\alpha)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= R - \frac{1}{2}\chi^2\psi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \chi^2\psi A^\nu F^{\ \ \mu}_{\nu||\mu} + \frac{1}{2}\chi^4\psi^2 A_\alpha A^\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&\quad - \chi^2\psi A^\nu F^{\ \ \mu}_{\nu||\mu} - \frac{1}{2}\chi^4\psi^2 A^\alpha A_\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\chi^2\psi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= R - \frac{1}{4}\chi^2\psi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

これで 5 次元でのリッチテンソルとリッチスカラーが求まりました。

次に変分問題を使います。5 次元でのアインシュタイン・ヒルベルト作用を

$$
I = \frac{1}{\hat{\kappa}}\int d^5x\sqrt{|\hat{g}|}\hat{R}
$$

とします。$\hat{\kappa}$ は 5 次元での重力定数とし、重力定数以外の係数は省いています。このとき、x^5 は影響しないという cylinder condition を積分にも適用します。計量の行列式は (8) の形から、5 列目を χ 倍して各列から引いて、5 行目を χA_μ 倍して各行から引けば

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} & 0 \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}$$

と変形できるので

$$\det \hat{g}_{\alpha\beta} = \psi \det g_{\alpha\beta} = \psi g$$

となります。よって、x^5 積分は $\hat{\kappa}$ と合わせることで 4 次元の重力定数 κ になるとすれば

$$I = \int d^4x\sqrt{|\psi g|}\hat{R}\frac{1}{\hat{\kappa}}\int dx^5 = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{|\psi g|}(R - \frac{1}{4}\chi^2\psi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{9}$$

$\psi = -1,\ \chi^2/2 = \kappa$ とすれば、重力と電磁場による作用と同じ形になります。このように計量 (8) による 5 次元でのリッチスカラーから、4 次元において重力と電磁場の式を再現することが出来ました。というわけで、5 次元時空で重力と電磁場を統一した理論が作れたことになります。また、ψ を定数としなければ、スカラー場としてこの作用に出てきます。

次に余剰次元の問題ですが、クラインは 5 次元部分は微小な半径 r の円だとしました。つまり、4 次元空間と小さな円 (プランクスケール程度に小さい) によって構成されるのが 5 次元空間としました (4 次元空間の各点に小さな円がいる)。プランクスケール程度に小さい円としているのは観測に影響しないほど小さいとするためです。空間のイメージとしては、例えば 3 次元の格子点に円が乗っているようなものです。重要なのは、5 次元目が円であるために関数 $F(x,y)$ $(y = x^5)$ が

$$F(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(x)\exp[iny/r] \quad\quad (0 \leq y \leq 2\pi r)$$

とフーリエ展開できることです (周期性 $F(x,y) = F(x, y+2\pi r)$ のため)。計量 $g_{\alpha\beta}(x,y)$、ベクトルポテンシャル $A_\alpha(x,y)$、スカラー場 $\phi(x,y)$ もこのように展開出来るとし、$n=0$ のときだけを考えることにすれば、自然と計量から $y = x^5$ は除外されます。積分も

$$\int_0^{2\pi r} dx^5 = 2\pi r$$

となるので、これによって 5 次元の重力定数 $\hat{\kappa}$ は 4 次元の重力定数から

$$\hat{\kappa} = 2\pi r\kappa$$

と定義されます。このように余計な次元を小さな円 (周期性を持ったもの) にすることをコンパクト化 (compactification) と言います。この余剰次元に対するコンパクト化の発想は弦理論で使われています。

最後に 5 次元でのスカラー場を導入した場合を大雑把に見ておきます (場の理論でのスカラー場の話は知っているとしています)。まずフーリエ展開と変換性から分かることを出します。今は

$$y \;\Rightarrow\; y + \epsilon(x)$$

の座標変換と、それによる $A_\mu(\hat{g}_{\alpha 5})$ の変換

$$A_\mu \;\Rightarrow\; A_\mu - \partial_\mu \epsilon'(x^\alpha) \quad (\epsilon' = -\frac{\epsilon}{\chi})$$

に対する不変性を持つように作っています (4 次元計量 $g_{\alpha\beta}$ は不変)。このときスカラー場 ϕ は

$$\phi(x, y) \;\Rightarrow\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \exp[in(y + \epsilon(x)/r] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi'_n(x) \exp[iny/r]$$

と変換されるので

$$\phi_n(x) \;\Rightarrow\; \phi'_n(x) = e^{in\epsilon/r}\phi_n = e^{-in\chi\epsilon'/r}\phi_n$$

という変換になっています。そうすると、ゲージ変換

$$\phi \;\Rightarrow\; e^{ie\alpha(x)}\phi$$

$$A_\mu \;\Rightarrow\; A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$$

と同じ状況になっているのが分かります (e は電荷)。よって、対応させれば

$$e\alpha = -\frac{n\chi}{r}\epsilon'$$

となるので、今の電荷 q_n として

$$q_n = -\frac{n\chi}{r}$$

というのが出てきます。このため、スカラー場は電子に対応していると考えます。場の理論の言葉で言えば、変換 (5) における不変性によるネーターの定理から電荷が出てくるということです。

次に 5 次元のスカラー場を作用に加えます。これは 4 次元での質量 0 のスカラー場のラグランジアンを 5 次元にして

$$\int d^4x dy \sqrt{|\hat{g}|}\partial^A \phi \partial_A \phi$$

とします。$\partial^A \phi \partial_A \phi$ は

$$\begin{aligned}\hat{g}^{AB}\partial_A\phi\partial_B\phi &= \hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \hat{g}^{\alpha 5}\partial_\alpha\phi\partial_5\phi + \hat{g}^{5\beta}\partial_5\phi\partial_\beta\phi + \hat{g}^{55}\partial_5\phi\partial_5\phi \\ &= \hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \chi A^\alpha\partial_\alpha\phi\partial_5\phi - \chi A^\beta\partial_5\phi\partial_\beta\phi + \psi^{-1}(1+\chi^2\psi A_\alpha A^\alpha)\partial_5\phi\partial_5\phi\end{aligned}$$

これの各項でフーリエ展開すると

$$\hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi = g^{\alpha\beta}\sum_{n,m} e^{i(n+m)y/r}\partial_\alpha\phi_n\partial_\beta\phi_m$$

$$\partial_\alpha\phi\partial_5\phi = \sum_{n,m}\frac{in}{r}e^{i(n+m)y/r}\phi_n\partial_\alpha\phi_m$$

$$\partial_5\phi\partial_5\phi = -\sum_{n,m}\frac{nm}{r^2}e^{i(n+m)y/r}\phi_n\phi_m$$

このとき指数部分は y 積分と合わせることで、クロネッカーデルタの性質によって

$$\int_0^{2\pi r} dy\ e^{i(n+m)y/r} = r\int_0^{2\pi} dy'\ e^{i(n+m)y'} = 2\pi r\delta_{n,-m}$$

となるので、$m=-n$ とします。そして、今は実数スカラー場 $\phi^* = \phi$ $(\phi_n^* = \phi_n)$ なのでフーリエ展開の形から分かるように

$$\phi_n = \phi_{-n}$$

となることを使えば

$$\hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \ \Rightarrow\ g^{\alpha\beta}\sum_n \partial_\alpha\phi_n\partial_\beta\phi_n$$

$$\partial_\alpha\phi\partial_5\phi \ \Rightarrow\ \sum_n \frac{in}{r}(\partial_\alpha\phi_n)\phi_n$$

$$\partial_5\phi\partial_5\phi \ \Rightarrow\ \sum_n \frac{n^2}{r^2}\phi_n\phi_n$$

よって、$\psi = -1$ とすれば

$$\begin{aligned}\partial^A\phi\partial_A\phi &= g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi_n\partial_\beta\phi_n - \frac{in}{r}\chi A^\alpha(\partial_\alpha\phi_n)\phi_n - \frac{in}{r}\chi A^\beta(\partial_\beta\phi_n)\phi_n + (1+\chi^2\psi A_\alpha A^\alpha)\frac{n^2}{\psi r^2}\phi_n^2 \\ &= g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi_n\partial_\beta\phi_n - \frac{in}{r}\chi A^\alpha(\partial_\alpha\phi_n)\phi_n - \frac{in}{r}\chi A^\beta(\partial_\beta\phi_n)\phi_n - \frac{n^2}{r^2}\chi^2 A_\alpha A^\alpha\phi_n^2 - \frac{n^2}{r^2}\phi_n^2 \\ &= (\partial^\alpha - i\frac{n}{r}\chi A^\alpha)\phi_n(\partial_\alpha - i\frac{n}{r}\chi A_\alpha)\phi_n - \frac{n^2}{r^2}\phi_n^2\end{aligned}$$

これは $(\partial_\alpha - (in\chi/r)A_\alpha)$ の部分を電磁場での共変微分 $\partial_\mu + ieA_\mu$、n/r をスカラー場の質量 m とすれば、場の量子論でのスカラー場と電磁場が相互作用しているラグランジアンと同じになります。電荷 e と q_n との対応も変換性から見たものと同じです。このことからスカラー場の質量 m_n は

$$m_n^2 = \frac{n^2}{r^2}$$

そして、r がプランク長 10^{-35}m 程度とすれば、m と eV(エレクトロンボルト) を単位とする質量 (自然単位系) との対応が

$$1\mathrm{m} \sim 5 \times 10^{15}\mathrm{GeV}^{-1}$$

なので、$n = 1$ のとき

$$m_1 \sim 10^{19}\mathrm{GeV}$$

となります (GeV は 10^9eV)。電荷を持っているので電子とすると、電子の質量は大体 0.5MeV (MeV は 10^6eV) なので、大きくズレています。これがカルツァ・クライン理論が不十分だとされる大きな理由です (スカラー場でなくフェルミオン場で行っても大きくズレる)。

(6a),(6b) や今の話から分かるように、カルツァ・クライン理論は一般座標変換とゲージ変換の読み替えを行っています (幾何学的な変換としてゲージ変換を導入してベクトルポテンシャルに対応させている)。このため、カルツァ・クライン理論はゲージ変換と関係しています。そうすると、非可換ゲージに出来ないかという発想が出てくることになり、1960 年代に DeWitt らによって非可換ゲージへ拡張されました。そして、1980 年代には Freund,Rubin,Witten らによって 11 次元超重力理論との対応が調べられました。