超曲面

相対論で時々出てくる超曲面についてざっと見ていきます。超曲面は単純に 1 つ次元を下げた空間とでも思えばいいです。
相対論を初めてやるような人は後半で何をしているのか分からなくなりそうなので、分類ぐらいまで見たら飛ばした方がいいかもしれません。
ここでは元の空間の添え字をギリシャ文字、超曲面の添え字をローマ文字で書きます。

曲線のパラメータを s として、曲線を

$$x^\mu = x^\mu(s)$$

とします。$n-1$ 次元と書きやすくするために、今は $\mu = 1, 2, \cdots n$ とします。このときに、1 つ次元の少ない $n-1$ 次元とすれば、n 次元よりも自由度が落ちて $n-1$ に依存するはずです。だからといって、座標の数を落としては何もならないので、パラメータの数を $n-1$ 個に制限して

$$x^\mu = x^\mu(s^1, s^2, \cdots s^{n-1}) \tag{1}$$

このようにすることで 1 つ次元が落ちた空間を表現します。さらに座標系に対して何かしらの制限を与えれば、座標を決定することができます。つまり、この (5) からの n 個の方程式と、制限による方程式によって $n-1$ 個のパラメータは決定されます。その制限として代表的なものが

$$\phi(x^1, x^2, \cdots x^n) = 0$$

というもので、この制限の式の簡単な例が三次元での 2 次元球面 (2-sphere) の式で

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

r は球の半径です。これは単純に三次元球の表面、つまり 2 次元面に対応します。このようにして、次元が 1 つ落ちた空間である超曲面 (hypersurface) を扱います。この式が球の表面に対応していることから予想できるように、$\phi(x^\mu)$ の微分は球の表面の法線方向になります。つまり、超曲面に対して垂直です。これは三次元球に限ったことでなく一般的な性質です。

法線が出てきたところで、超曲面の分類をしておきます。ここから添え字は $0, 1, 2, \ldots, n-1$ とします。話は簡単で、法線の内積が時間的、空間的なのかによって分類されます。単位法線ベクトルを n^α とすれば ($\phi(x^\mu)$ が増加する方向をむいている)

- $n^\alpha n_\alpha = +1$: 超曲面は空間的
- $n^\alpha n_\alpha = -1$: 超曲面は時間的

$(-, +, +, +)$ の表記に慣れている人は定義が逆になっているので注意してください。超曲面がヌルの場合もありますが、そのときは単位法線ベクトルを定義できません (ヌルの場合は無視します)。単位法線ベクトルは

$$n_\alpha = \frac{\pm\phi_{|\alpha}}{|g^{\mu\nu}\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}|^{1/2}}$$

このように定義されます。$\pm$ は符号をあわせるためにつけています。これは $n^\alpha \phi_{|\alpha} > 0$ であるとしているので (ϕ の増加する方向をむかせているため)、

$$n^\alpha n_\alpha = \frac{\pm n^\alpha \phi_{|\alpha}}{|g^{\mu\nu}\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}|^{1/2}}$$

から、法線が時間的ならプラス、空間的ならマイナスがつきます。

次に超曲面での計量を作ります。超曲面上での座標を y^a と書くことにします (元の次元を 4 次元とします。$a = 1, 2, 3$)。これによってパラメータによる (5) は

$$x^\mu = x^\mu(y^a)$$

と書くことができます。これは超曲面が (5) で表現されるとき、そのパラメータは超曲面上での座標に対応するという一般的な性質によるものです。そのため

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} = e^\mu_a$$

というベクトルが作れます。このベクトルは微分の形から分かるように、超曲面上での曲線に対する接ベクトルです。そのため、e^μ_a は超曲面の法線と直交します ($e^\mu_a n_\mu = 0$)。また、e^μ_a は超曲面での基底ベクトルとすることもできます。このベクトルを座標変換と見ることで、超曲面 Σ での線素 ds^2_Σ は

$$\begin{aligned}
ds^2_\Sigma &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
&= g_{\mu\nu}(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} dy^a)(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} dy^b) \\
&= g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b dy^a dy^b \\
&= h_{ab} dy^a dy^b \quad\quad (h_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b)
\end{aligned}$$

このようになり、h_{ab} を誘導計量 (induced metric)、もしくは第一基本形式 (first fundamental form) と呼びます。h_{ab} はそのまま超曲面 Σ 上での計量として書かれているのが分かると思います。例えば平坦な三次元としてみると、極座標で

$$x^\alpha = x^\alpha(\theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

このように書けるので

$$\begin{aligned}
e^\alpha_\theta &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta) \\
e^\alpha_\varphi &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

それぞれの内積は

$$g_{\mu\nu}e^\mu_\theta e^\nu_\theta = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\theta} = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$g_{\mu\nu}e^\mu_\varphi e^\nu_\varphi = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\varphi}\frac{\partial x^\nu}{\partial\varphi} = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\theta$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}e^\mu_\theta e^\nu_\varphi &= g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\theta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\varphi} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0) \\ &= -r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

となって、2 次元の計量になります。4 次元ミンコフスキー空間の場合を下の補足で扱っています。

$g^{\mu\nu}$ と h^{ab} の関係は

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab}e^\mu_a e^\nu_b$$

となっています。h^{ab} は h_{ab} の逆行列、ϵ は単位法線ベクトルの時間的、空間的に対応する符号で、時間的なら $\epsilon = +1$、空間的なら $\epsilon = -1$ です。この関係は、例えば $g_{\mu\nu}$ を両辺にかければ

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} &= \epsilon g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu + g_{\mu\nu}h^{ab}e^\mu_a e^\nu_b \\ \mathrm{tr}I_4 &= \epsilon n^\mu n_\mu + \mathrm{tr}I_3 \quad\ (h^{ab}h_{ab} = g_{\mu\nu}h^{ab}e^\mu_a e^\nu_b = I_3) \\ &= 1 + \mathrm{tr}I_3 \end{aligned}$$

$I_{3,4}$ は 3、4 次元での単位行列なので、両辺は等しいです。また、n^μ と e^μ_a が直交することから

$$\begin{aligned} n_\mu g^{\mu\nu} &= \epsilon n_\mu n^\mu n^\nu + h^{ab}n_\mu e^\mu_a e^\nu_b \\ n^\nu &= n^\nu \end{aligned}$$

となって、両辺が一致します。

誘導計量の元の空間の添え字を使った表現にも触れておきます。まず、空間を x^0 一定面で切ると、そこを超曲面とすることができます。このとき曲線がこの超曲面に直交しているとします。そうすると

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0}$$

これは x^0 方向への曲線の接ベクトルになり、曲線は超曲面に直交するために法線と同じように $u_\alpha e^\alpha_a = 0$ となります。また、u_α は時間的であるとします。このとき、誘導計量 h_{ab} は接ベクトルを使って

$$h_{ab} = h_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b$$

と書けます。ここでの $h_{\alpha\beta}$ は

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta \tag{2}$$

で定義されます。これによって $h_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b$ は

$$h_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b - u_\alpha u_\beta e^\alpha_a e^\beta_b = g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b = h_{ab}$$

となり、誘導計量になります。また、$h_{\alpha\beta}$ の逆行列は

$$h^{\alpha\beta} = h^{ab} e^\alpha_a e^\beta_b$$

逆行列であることは

$$\begin{aligned}
h_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} &= h^{ab} h_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \\
&= h^{ab} (g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) e^\alpha_a e^\beta_b \\
&= h^{ab} g_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \\
&= h^{ab} h_{ab}
\end{aligned}$$

誘導計量は 3 次元しか持たないので両辺とも 3 次元の単位行列のトレースになります。

　$h_{\alpha\beta}$ の性質も 1 つ見ておきます。u^α を時間的な単位接ベクトルとします ($u^\alpha u_\alpha = 1$)。そうすると、$h_{\alpha\beta}$ はこれと直交し

$$h_{\alpha\beta} u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha - u^\alpha u_\alpha u_\beta = u_\beta - u_\beta = 0$$

このように時間的な u^α に直交することから $h_{\alpha\beta}$ は空間的で、$g_{\alpha\beta}$ の横成分の計量と呼ばれたりもします。これに対して $u_\alpha u_\beta$ が縦成分になります。分かりやすい例として、ミンコフスキー空間で、$u_\alpha = (1, 0, 0, 0)$ としたときに

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となって空間成分しか持たなくなります。

　次に超曲面での微分を作ります。まず、超曲面 Σ に対して接テンソルとなる Σ 上でのテンソル $A^{\mu\nu}$ を用意します (2 階テンソルとしていますが何階のテンソルでも同じです)。これは Σ 上での基底 e^μ_a を使って

$$A^{\mu\nu} = A^{ab} e^\mu_a e^\nu_b$$

このように展開することができます。逆に

$$A_{ab} = A_{\mu\nu} e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b}$$

と書くこともできます。添え字 a, b の上げ下げは h_{ab} によって行われます。これらはテンソル $A^{\mu\nu}$ を超曲面での A^{ab} にする手続きに相当します。

そうすると、これをそのまま共変微分 $A_{\mu||\nu}$ に当てはめれば、超曲面上で表現される共変微分になります (添え字 μ, ν の共変微分は $g_{\mu\nu}$ による接続係数を持つ)。

実際に共変微分に対して置き換えを行うと

$$\begin{aligned}
A_{\mu||\nu} e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} &= (A_{\mu} e^{\mu}_{a})_{||\nu} e^{\nu}_{b} - A_{\mu} e^{\mu}_{a||\nu} e^{\nu}_{b} \\
&= A_{a||\nu} e^{\nu}_{b} - A_{c} e^{c}_{\mu} e^{\mu}_{a||\nu} e^{\nu}_{b} \\
&= A_{a||\nu} e^{\nu}_{b} - A^{c} e^{\mu}_{c} e_{a\mu||\nu} e^{\nu}_{b}
\end{aligned}$$

右辺第一項は

$$\begin{aligned}
(A_{\alpha} e^{\alpha}_{a})_{||\beta} &= A_{\alpha||\beta} e^{\alpha}_{a} + A_{\alpha} e^{\alpha}_{a||\beta} \\
&= A_{\alpha|\beta} e^{\alpha}_{a} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A_{\mu} e^{\alpha}_{a} + A_{\alpha} e^{\alpha}_{a|\beta} + A_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} e^{\nu}_{a} \\
&= A_{\alpha|\beta} e^{\alpha}_{a} + A_{\alpha} e^{\alpha}_{a|\beta} - A_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} + A_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{a} \\
&= A_{\alpha|\beta} e^{\alpha}_{a} + (A_{\alpha} e^{\alpha}_{a})_{|\beta} - A_{\alpha|\beta} e^{\alpha}_{a} \\
&= A_{a|\beta}
\end{aligned}$$

から、ただの微分に変えられるので

$$\begin{aligned}
A_{\mu||\nu} e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} &= A_{a|\nu} e^{\nu}_{b} - e^{\mu}_{c} e_{a\mu||\nu} e^{\nu}_{b} A^{c} \\
&= \frac{\partial A_{a}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y_{b}} - e^{\mu}_{c} e_{a\mu||\nu} e^{\nu}_{b} A^{c} \\
&= \frac{\partial A_{a}}{\partial y_{b}} - e^{\mu}_{c} e_{a\mu||\nu} e^{\nu}_{b} A^{c} \\
&= A_{a|b} - \Gamma_{cab} A^{c} \quad (\Gamma_{cab} = e^{\mu}_{c} e_{a\mu||\nu} e^{\nu}_{b}) \\
&= A_{a|b} - \Gamma^{c}_{ab} A_{c}
\end{aligned}$$

となって、通常の共変微分と同じ形で、超曲面上での計量 h_{ab} で表現されたものになります。区別するために超曲面上での共変微分を「:」と書くことにして

$$A_{a:b} = A_{a|b} - \Gamma^{c}_{ab} A_{c}$$

と定義します。使う時が特殊なので使う時にいちいち定義します。
　この共変微分を誘導計量に作用させると、(2) を使うことで

$$
\begin{aligned}
h_{ab:c} &= h_{\mu\nu||\lambda} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda \\
&= (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu)_{||\lambda} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda \\
&= (-u_{\mu||\lambda} u_\nu - u_\mu u_{\nu||\lambda}) e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda \\
&= 0
\end{aligned}
$$

計量に対する共変微分は $g_{\mu\nu||\lambda} = 0$ から消え、接ベクトル u_μ は法線と同じ方向を向いていることから $u_\alpha e_a^\alpha = 0$ なので、$h_{ab:c} = 0$ となります。つまり、共変微分の作用の仕方が同じであるために、超曲面でのクリストッフェル記号も同じ構造をしているはずなので

$$
\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} h^{ic} (h_{ib|a} + h_{ai|b} - h_{ab|i})
$$

となります。
　ここで重要な量を定義します。$A^\mu_{||\nu} e_b^\nu$ というのを変形させて

$$
\begin{aligned}
A^\mu_{||\nu} e_b^\nu &= g^\mu{}_\lambda A^\lambda_{||\nu} e_b^\nu \\
&= (\epsilon n^\mu n_\lambda + h^{ac} e_a^\mu e_{c\lambda}) A^\lambda_{||\nu} e_b^\nu \quad (g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab} e_a^\mu e_b^\nu) \\
&= (\epsilon n_\lambda A^\lambda_{||\nu} e_b^\nu) n^\mu + h^{ac} (e_{c\lambda} e_b^\nu A^\lambda_{||\nu}) e_a^\mu \\
&= \epsilon\big((n_\lambda A^\lambda)_{||\nu} - (n_{\lambda||\nu} A^\lambda)\big) e_b^\nu n^\mu + h^{ac} A_{c:b} e_a^\mu \\
&= \ -\epsilon (n_{\lambda||\nu} A^\lambda e_b^\nu) n^\mu + A^a_{:b} e_a^\mu \\
&= A^a_{:b} e_a^\mu - \epsilon A^a (n_{\lambda||\nu} e_a^\lambda e_b^\nu) n^\mu
\end{aligned}
$$

法線 n^μ と e_a^μ は直交することを使っています。三行目の式で法線成分と接成分に分けられています。この第二項の括弧部分

$$
K_{ab} = n_{\lambda||\nu} e_a^\lambda e_b^\nu
$$

を外部曲率 (extrinsic curvature) と言います。これから、外部曲率が 0 のとき、$A^a_{:b}$ は元のベクトル $A^\mu_{||\nu}$ の接成分にそのまま対応することが分かります。外部曲率は $K_{ab} = K_{ba}$ のように対称になっていて、対称であることは

$$
\begin{aligned}
n_{\lambda||\nu}e^\lambda_a e^\nu_b &= (n_\lambda e^\lambda_a)_{||\nu}e^\nu_b - n_\lambda e^\lambda_{a||\nu}e^\nu_b \\
&= -n_\lambda e^\lambda_{a||\nu}e^\nu_b \\
&= -n_\lambda e^\lambda_{b||\nu}e^\nu_a \quad (e^\lambda_{a||\nu}e^\nu_b = e^\lambda_{b||\nu}e^\nu_a) \\
&= -(n_\lambda e^\lambda_b)_{||\nu}e^\nu_a + n_{\lambda||\nu}e^\lambda_b e^\nu_a \\
&= n_{\lambda||\nu}e^\lambda_b e^\nu_a
\end{aligned}
$$

から分かります。

　最後にリーマンテンソルを求めます。通常のリーマンテンソルと対応させるように超曲面でのリーマンテンソルを

$$A^c_{:a:b} - A^c_{:b:a} = -R^c_{dab}A^d$$

と作ります。「:」は超曲面上での共変微分です。超曲面での共変微分の作用は通常の共変微分と同じなので、R^c_{dab} は

$$R^c_{dab} = \Gamma^c_{bc|a} - \Gamma^c_{da|b} - \Gamma^c_{bj}\Gamma^j_{ad} + \Gamma^c_{aj}\Gamma^j_{bd}$$

次に 3 次元リーマンテンソルと 4 次元リーマンテンソルの関係を導きます。まず、外部曲率が導入された式

$$e^\alpha_{a||\beta}e^\beta_b = \Gamma^d_{ab}e^\alpha_d - \epsilon K_{ab}n^\alpha$$

に対して、共変微分を作用させ e^μ_c をかけます。そうすると左辺は

$$
\begin{aligned}
(e^\alpha_{a||\beta}e^\beta_b)_{||\mu}e^\mu_c &= e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c + e^\alpha_{a||\beta}e^\beta_{b||\mu}e^\mu_c \\
&= e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c + e^\alpha_{a||\beta}(\Gamma^d_{bc}e^\beta_d - \epsilon K_{bc}n^\beta) \\
&= e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c + \Gamma^d_{bc}e^\alpha_{a||\beta}e^\beta_d - \epsilon K_{bc}e^\alpha_{a||\beta}n^\beta \\
&= e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c + \Gamma^d_{bc}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha) - \epsilon K_{bc}e^\alpha_{a||\beta}n^\beta
\end{aligned}
$$

右辺は

$$
\begin{aligned}
(\Gamma^d_{ab}e^\alpha_d - \epsilon K_{ab}n^\alpha)_{||\mu}e^\mu_c &= \Gamma^d_{ab||\mu}e^\mu_c e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}e^\alpha_{c||\mu}e^\mu_d - \epsilon K_{ab||\mu}e^\mu_c n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c \\
&= \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}e^\alpha_{d||\mu}e^\mu_c - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c \\
&= \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}(\Gamma^e_{dc}e^\alpha_e - \epsilon K_{dc}n^\alpha) - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c = \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}(\Gamma^e_{dc}e^\alpha_e - \epsilon K_{dc}n^\alpha) - \Gamma^d_{bc}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha) \\
- \epsilon K_{ab|c}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{bc}e^\alpha_{a||\beta}n^\beta
\end{aligned} \tag{3}
$$

これは $e^\alpha_{a||\beta||\mu}$ の式として書けているので、同様のことを $e^\alpha_{a||\mu||\beta}$ で行えばリーマンテンソルが作れます。というわけで、同じことをします。そうすると

$$
(e^\alpha_{a||\mu}e^\mu_c)_{||\beta}e^\beta_b = (\Gamma^d_{ac}e^\alpha_d - \epsilon K_{ac}n^\alpha)_{||\beta}e^\beta_b
$$

見て分かるように、c と b がひっくり返っただけなので、(3) の c, b をひっくり返せばいいだけです。一応右辺を同じように計算しておくと

$$
\begin{aligned}
(\Gamma^d_{ac}e^\alpha_d - \epsilon K_{ac}n^\alpha)_{||\beta}e^\beta_b &= \Gamma^d_{ac||\beta}e^\alpha_d e^\beta_b + \Gamma^d_{ac}e^\alpha_{d||\beta}e^\beta_b - \epsilon K_{ac||\beta}n^\alpha e^\beta_b - \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b \\
&= \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ac}e^\alpha_{d||\beta}e^\beta_b - \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b \\
&= \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ac}(\Gamma^e_{db}e^\alpha_e - \epsilon K_{db}n^\alpha) - \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b
\end{aligned}
$$

実際に c, b が反転しているだけです。なので、左辺は

$$
(e^\alpha_{a||\mu}e^\mu_c)_{||\beta}e^\beta_b = e^\alpha_{a||\mu||\beta}e^\mu_c e^\beta_b + \Gamma^d_{cb}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha) - \epsilon K_{cb}e^\alpha_{a||\mu}n^\mu
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e^\alpha_{a||\mu||\beta}e^\mu_c e^\beta_b = \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ac}(\Gamma^e_{db}e^\alpha_e - \epsilon K_{db}n^\alpha) - \Gamma^d_{cb}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha) \\
- \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b + \epsilon K_{cb}e^\alpha_{a||\mu}n^\mu
\end{aligned} \tag{4}
$$

(3) と (4) の差をとれば

$$\begin{aligned}
e^\alpha_{a||\beta||\mu}e^\beta_b e^\mu_c - e^\alpha_{a||\mu||\beta}e^\mu_c e^\beta_b &= \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d - \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}(\Gamma^e_{dc}e^\alpha_e - \epsilon K_{dc}n^\alpha) - \Gamma^d_{ac}(\Gamma^e_{db}e^\alpha_e - \epsilon K_{db}n^\alpha)\\
&\quad - \Gamma^d_{bc}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha) + \Gamma^d_{cb}(\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e - \epsilon K_{ad}n^\alpha)\\
&\quad - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{bc}e^\alpha_{a||\beta}n^\beta + \epsilon K_{ac|b}n^\alpha + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b - \epsilon K_{cb}e^\alpha_{a||\mu}n^\mu\\
-R^\alpha_{\nu\beta\mu}e^\nu_a e^\beta_b e^\mu_c &= \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d - \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}\Gamma^e_{dc}e^\alpha_e - \Gamma^d_{ac}\Gamma^e_{db}e^\alpha_e - \epsilon\Gamma^d_{ab}K_{dc}n^\alpha + \epsilon\Gamma^d_{ac}K_{db}n^\alpha\\
&\quad - \Gamma^d_{bc}\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e + \Gamma^d_{cb}\Gamma^e_{ad}e^\alpha_e + \epsilon\Gamma^d_{bc}K_{ad}n^\alpha - \epsilon\Gamma^d_{cb}K_{ad}n^\alpha\\
&\quad - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha + \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b + \epsilon K_{bc}e^\alpha_{a||\beta}n^\beta - \epsilon K_{cb}e^\alpha_{a||\mu}n^\mu\\
&= \Gamma^d_{ab|c}e^\alpha_d - \Gamma^d_{ac|b}e^\alpha_d + \Gamma^d_{ab}\Gamma^e_{dc}e^\alpha_e - \Gamma^d_{ac}\Gamma^e_{db}e^\alpha_e - \epsilon\Gamma^d_{ab}K_{dc}n^\alpha + \epsilon\Gamma^d_{ac}K_{db}n^\alpha\\
&\quad - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha + \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b\\
&= (\Gamma^d_{ab|c} - \Gamma^d_{ac|b} + \Gamma^d_{ab}\Gamma^e_{dc} - \Gamma^d_{ac}\Gamma^e_{db})e^\alpha_e - \epsilon\Gamma^d_{ab}K_{dc}n^\alpha + \epsilon\Gamma^d_{ac}K_{db}n^\alpha\\
&\quad - \epsilon K_{ab|c}n^\alpha + \epsilon K_{ac|b}n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b
\end{aligned}$$

右辺第一項はリーマンテンソルに書き換えられるので

$$\begin{aligned}
-R^\alpha_{\nu\beta\mu}e^\nu_a e^\beta_b e^\mu_c &= -R^e_{abc}e^\alpha_e - \epsilon\Gamma^d_{ab}K_{dc}n^\alpha + \epsilon\Gamma^d_{ac}K_{db}n^\alpha - \epsilon(K_{ab|c} - K_{ac|b})n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b\\
&= -R^e_{abc}e^\alpha_e - \epsilon(K_{ab|c} - \Gamma^d_{ac}K_{db} - K_{ac|b} + \Gamma^d_{ab}K_{dc})n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b\\
&= -R^e_{abc}e^\alpha_e - \epsilon(K_{ab|c} - \Gamma^d_{ac}K_{db} - \Gamma^d_{bc}K_{ad} + \Gamma^d_{bc}K_{ad} - K_{ac|b} + \Gamma^d_{ab}K_{dc})n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b\\
&= -R^e_{abc}e^\alpha_e - \epsilon(K_{ab|c} - \Gamma^d_{ac}K_{db} - \Gamma^d_{bc}K_{ad} - K_{ac|b} + \Gamma^d_{ab}K_{dc} + \Gamma^d_{bc}K_{ad})n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b\\
&= -R^e_{abc}e^\alpha_e - \epsilon(K_{ab:c} - K_{ac:b})n^\alpha - \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c + \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b \qquad (5)
\end{aligned}$$

ここでのテンソルに対する共変微分は

$$K_{ab:c} = K_{ab|c} - \Gamma^d_{bc}K_{ad} - \Gamma^d_{ac}K_{bd}$$

となっています。

(5) の両辺に $e_{d\alpha}$ をかければ、法線ベクトルとは直交することから

$$\begin{aligned}
R^\alpha_{\nu\beta\mu}e^\nu_a e^\beta_b e^\mu_c e_{d\alpha} &= R^e_{abc}e^\alpha_e e_{d\alpha} + \epsilon K_{ab}n^\alpha_{||\mu}e^\mu_c e_{d\alpha} - \epsilon K_{ac}n^\alpha_{||\beta}e^\beta_b e_{d\alpha}\\
&= R^e_{abc}e^\alpha_e e_{d\alpha} + \epsilon(K_{ab}K_{cd} - K_{ac}K_{bd})\\
R_{\alpha\nu\beta\mu}e^\nu_a e^\beta_b e^\mu_c e^\alpha_d &= R_{dabc} + \epsilon(K_{ab}K_{cd} - K_{ac}K_{bd})
\end{aligned}$$

添え字の並びを見やすくするために添え字をつけなおして

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}e^\alpha_a e^\beta_b e^\mu_c e^\nu_d = R_{abcd} + \epsilon(K_{bc}K_{da} - K_{bd}K_{ca}) \qquad (6)$$

この式は 4 次元リーマンテンソルと超曲面での 3 次元リーマンテンソルとを結ぶ式になっています。
これとは別に (5) の両辺に n_α をかけると

$$R^\alpha_{\nu\beta\mu}e^\nu_a e^\beta_b e^\mu_c n_\alpha = K_{ab:c} - K_{ac:b} \tag{7}$$

この時、$n_\alpha n^\alpha = \epsilon$ と

$$n^\alpha_{||\mu}n_\alpha = (n^\alpha n_\alpha)_{||\mu} - n^\alpha n_{\alpha||\mu} = -n^\alpha n_{\alpha||\mu}$$

この式から分かるように、$n^\alpha_{||\mu}n_\alpha$ は 0 でなくてはならないことを使っています。(6)、(7) の二つを Gauss-Codazzi 方程式と呼んでいます。

次に超曲面上でのリッチスカラーを作ります。スカラーの前段階でのリッチテンソルは

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta}$$

として作られています。ここで計量テンソルに対して

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab}e^\mu_a e^\nu_b$$

を使えば

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} &= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab}e^\mu_a e^\nu_b)R_{\mu\alpha\nu\beta} \\
&= \epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta}n^\mu n^\nu + h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\nu_b
\end{aligned}$$

リッチスカラーにするにはもう一度計量テンソルを作用させればいいので

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\
&= (\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{cd}e^\alpha_c e^\beta_d)(\epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta}n^\mu n^\nu + h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\nu_b) \\
&= R_{\mu\alpha\nu\beta}n^\mu n^\nu n^\alpha n^\beta + \epsilon h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\nu_b n^\alpha n^\beta + \epsilon h^{cd}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\alpha_c e^\beta_d n^\mu n^\nu + h^{cd}e^\alpha_c e^\beta_d h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\nu_b \\
&= R_{\mu\alpha\nu\beta}n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta + 2\epsilon h^{cd}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\alpha_c e^\beta_d n^\mu n^\nu + h^{cd}e^\alpha_c e^\beta_d h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\nu_b
\end{aligned}$$

第一項はリーマンテンソルの反対称性から消えるので

$$R = 2\epsilon h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\alpha_a e^\beta_b n^\mu n^\nu + h^{ab}h^{cd}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^\mu_a e^\alpha_c e^\nu_b e^\beta_d \tag{8}$$

第二項は (6) から

$$
\begin{aligned}
h^{ab}h^{cd}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^{\mu}_{a}e^{\alpha}_{c}e^{\nu}_{b}e^{\beta}_{d} &= h^{ab}h^{cd}(R_{acbd}+\epsilon(K_{cb}K_{da}-K_{cd}K_{ba})) \\
&= {}^{(3)}R+\epsilon(h^{ab}h^{cd}K_{cb}K_{da}-h^{ab}h^{cd}K_{cd}K_{ba}) \\
&= {}^{(3)}R+\epsilon(K^{ad}K_{ad}-K^{2})
\end{aligned}
$$

${}^{(3)}R$ は超曲面上での三次元リッチスカラーであることを表わしています。

(8) の第一項の方では面倒な変形をしていきます。まず、計量の関係式

$$
h^{ab}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}=g^{\mu\nu}-\epsilon n^{\mu}n^{\nu}
$$

より

$$
2\epsilon h^{ab}R_{\mu\alpha\nu\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}n^{\mu}n^{\nu}=2\epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta}n^{\mu}n^{\nu}(g^{\alpha\beta}-\epsilon n^{\alpha}n^{\beta})=2\epsilon R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}
$$

このように変形させられるので、$R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}$ を求めます。リーマンテンソルは単位法線ベクトル n^{α} を使って定義そのもので書くと

$$
-R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}n^{\mu}=n^{\alpha}_{||\beta||\nu}-n^{\alpha}_{||\nu||\beta}
$$

これをリッチテンソルにすれば

$$
-R_{\mu\nu}n^{\mu}=n^{\alpha}_{||\alpha||\nu}-n^{\alpha}_{||\nu||\alpha}
$$

n^{ν} をかけることで

$$
R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu}=-n^{\alpha}_{||\alpha||\beta}n^{\beta}+n^{\alpha}_{||\beta||\alpha}n^{\beta}=-(n^{\alpha}_{||\alpha}n^{\beta})_{||\beta}+n^{\alpha}_{||\alpha}n^{\beta}_{||\beta}+(n^{\alpha}_{||\beta}n^{\beta})_{||\alpha}-n^{\alpha}_{||\beta}n^{\beta}_{||\alpha}
$$

外部曲率のスカラー量 $K=K^{a}_{\ a}$ は

$$
\begin{aligned}
K=h^{ab}K_{ab}= \ h^{ab}n_{\alpha||\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} &= n_{\alpha||\beta}(g^{\alpha\beta}-\epsilon n^{\alpha}n^{\beta}) \\
&= n^{\alpha}_{||\alpha}-\epsilon n_{\alpha||\beta}n^{\alpha}n^{\beta} \\
&= n^{\alpha}_{||\alpha} \quad (n_{\alpha||\beta}n^{\alpha}=0)
\end{aligned}
$$

このように書けることから、第二項は K で置き換えられます。第四項も外部曲率によって書けて

$$
\begin{aligned}
n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} &= n_{\alpha||\beta} g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} n_{\mu||\nu} \\
&= (h^{\beta\mu} + \epsilon n^{\beta} n^{\mu})(h^{\alpha\nu} + \epsilon n^{\alpha} n^{\nu}) n_{\alpha||\beta} n_{\mu||\nu} \\
&= (h^{\beta\mu} + \epsilon n^{\beta} n^{\mu}) h^{\alpha\nu} n_{\alpha||\beta} n_{\mu||\nu} \qquad (n^{\alpha} n_{\alpha||\beta} = 0) \\
&= h^{\beta\mu} h^{\alpha\nu} n_{\alpha||\beta} n_{\mu||\nu} \\
&= h^{bc} e^{\beta}_{b} e^{\mu}_{c} h^{ad} e^{\alpha}_{a} e^{\nu}_{d} n_{\alpha||\beta} n_{\mu||\nu} \qquad (h^{\alpha\beta} = h^{ab} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b}) \\
&= h^{bc} h^{ad} n_{\alpha||\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} n_{\mu||\nu} e^{\mu}_{c} e^{\nu}_{d} \\
&= h^{bc} h^{ad} K_{ab} K_{cd} \\
&= K_{ab} K^{ba}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
2R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} =& -(n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} + n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta}_{||\beta} + (n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} \\
=& -(n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} + K^2 + (n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - K_{ab} K^{ba}
\end{aligned}
$$

まとめると、リッチスカラー (8) は

$$
\begin{aligned}
R &= {}^{(3)}R - 2\epsilon(n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} + 2\epsilon K^2 + 2\epsilon(n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - 2\epsilon K_{ab} K^{ab} + {}^{3}R + \epsilon(K^{ad} K_{ad} - K^2) \\
&= {}^{(3)}R - 2\epsilon(n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} + 2\epsilon(n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} + \epsilon(K^2 - K_{ab} K^{ab}) \\
&= {}^{(3)}R + 2\epsilon[(n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - (n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta}] + \epsilon(K^2 - K_{ab} K^{ab})
\end{aligned}
$$

第二項は

$$
\begin{aligned}
& n^{\alpha}_{||\beta||\alpha} n^{\beta} + n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} - n^{\alpha}_{||\alpha||\beta} n^{\beta} - n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta}_{||\beta} \\
&= n^{\alpha}_{||\beta||\alpha} n^{\beta} + n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} - n^{\alpha}_{||\alpha||\beta} n^{\beta} - n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta}_{||\beta} \\
&= (n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} + n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta}_{||\alpha} - (n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} + n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta}_{||\beta} - n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta}_{||\beta} \\
&= (n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - (n^{\alpha}_{||\alpha} n^{\beta})_{||\beta} \\
&= (n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta})_{||\alpha} - (n^{\beta}_{||\beta} n^{\alpha})_{||\alpha}
\end{aligned}
$$

とも書けるので

$$
R = {}^{(3)}R + 2\epsilon(n^{\alpha}_{||\beta} n^{\beta} - n^{\beta}_{||\beta} n^{\alpha})_{||\alpha} + \epsilon(K^2 - K_{ab} K^{ab})
$$

これが超曲面上でのリッチスカラーの表現になります。

・**補足**

超曲面の例として 4 次元ミンコフスキー空間での二葉双曲面を見てみます。超曲面の条件として

$$\phi(x) = t - \sqrt{\rho^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 0 \quad (\rho > 0)$$

とします ($x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$)。$\rho$ は定数です。この条件は

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -\rho^2$$

なので、二葉 3 次元双曲面の上側 ($t > 0$) です。これは双曲線関数を使えば

$$\rho^2 \sinh^2 \alpha - \rho^2 \cosh^2 \alpha = -\rho^2 \quad (\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \sinh^2 \theta - \cosh^2 \theta = -1)$$

と書けるので

$$\rho \sinh \alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ t = \rho \cosh \alpha$$

そして、3 次元極座標は

$$u = a \sin\theta \cos\varphi\ ,\ v = a \sin\theta \sin\varphi\ ,\ w = a \cos\theta \quad (u^2 + v^2 + w^2 = a^2)$$

と書けることから、x, y, z による極座標の角度 θ, φ を使います。そうすると、超曲面上において

$$\begin{aligned} t &= \rho \cosh \alpha \\ x &= \rho \sinh \alpha \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sinh \alpha \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \sinh \alpha \cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

このように超曲面での座標系として $\alpha, \theta\varphi$ が導入できます。

超曲面での線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

これに (9) を入れれば求まります。このとき

$$\rho \sinh \alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

とすれば、x, y, z は 3 次元極座標の形になるので、x, y, z による部分は

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

と書けます。そして、$r = \rho \sinh\alpha$ から

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \rho^2 \cosh^2\alpha d\alpha^2 + \rho^2 \sinh^2\alpha d\theta^2 + \rho^2 \sinh^2\alpha \sin^2\theta d\varphi^2$$

となるので

$$dt^2 = \rho^2 \sinh^2\alpha d\alpha^2$$

と合わせて

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \rho^2 \sinh^2\alpha d\alpha^2 - (\rho^2 \cosh^2\alpha d\alpha^2 + \rho^2 \sinh^2\alpha d\theta^2 + \rho^2 \sinh^2\alpha \sin^2\theta d\varphi^2) \\
&= -\rho^2 d\alpha^2 - \rho^2 \sinh^2\alpha d\theta^2 - \rho^2 \sinh^2\alpha \sin^2\theta d\varphi^2 \\
&= -\rho^2 (d\alpha^2 + \sinh^2\alpha (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \\
&= h_{ab} dx^a dx^b
\end{aligned}$$

3 次元計量にマイナスがつくのが気持ち悪ければ $-ds^2$ として定義すればいいです (計量の符号を $(-, +, +, +)$ にする)。

法線ベクトルは

$$\phi_{|\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(t - \sqrt{\rho^2 + x^2 + y^2 + z^2}) = (1, -\frac{x}{t}, -\frac{y}{t}, -\frac{z}{t}) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 = t^2\ ,\ t > 0)$$

から、超曲面を空間的として

$$n_\alpha = \frac{+\phi_{|\alpha}}{|\eta^{\mu\nu}\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}|^{1/2}} = (1, -\frac{x}{t}, -\frac{y}{t}, -\frac{z}{t})\frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}} = \frac{1}{\rho}(t, -x, -y, -z)$$

これの内積を取れば

$$n_\alpha n^\alpha = \frac{1}{\rho^2}(t, -x, -y, -z)\cdot(t, x, y, z) = \frac{1}{\rho^2}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) = \frac{1}{\rho^2}\rho^2 = +1$$

なので、実際に超曲面は空間的です。