正準方程式

ハミルトニアン密度が求まったので正準方程式を作ります。
ここでは幾何学単位系を使い、計量は「ハミルトニアン密度」と同じように $(-,+,+,+)$ にとっています。記号の定義は「ハミルトニアン密度」と同じです。
記号の注意として、添え字なしの誘導計量 h のみが行列式 $h = \det h_{ab}$ で、他の場合は $\pi = \pi^a{}_a$ のようにトレースになっています。

　ADM 形式でのハミルトニアンは変数として、h_{ab}, π^{ab}, N, N_a の 4 つを持っています。そのため、正準方程式も 4 つ出てきそうですが、N, N_a の共役量がいないために、作用の変分を取ったときに通常の正準方程式の形として出てきません。このことは、作用の変分が

$$\delta I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y[(\dot{h}_{ab} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ab}})\delta\pi^{ab} - (\dot{\pi}^{ab} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_{ab}})\delta h_{ab} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N}\delta N - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_a}\delta N_a]$$

このようになっていることからも分かると思います (通常の解析力学の結果を今の場合に合わせただけ)。というわけで、誘導計量とその共役量を使って正準方程式を作ります。
　正準方程式は

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \ , \ \dot{\pi}^{ab} = \frac{\delta H}{\delta h_{ab}}$$

こんな形で求まります。このような汎関数微分の形が場の理論でのラグランジアン密度やハミルトニアン密度を使うときの正確な形です。汎関数になる理由は、変数が時空に依存する関数であるためです。ただ、正準方程式を求めるには汎関数微分であるということを気にしなくても表面上なんの問題もないです。気になる人は場の量子論の「古典場」を見てください。
　直接微分してしまってもいいですが、せっかくなので変分を求めるようにします。正準共役量 π^{ab} に対する変分を δ_π、誘導計量 h_{ab} に対する変分を δ と書くことにします。変分の計算をハミルトニアン密度に対して行いますが、三次元積分が外にいることに注意してください。例えば

$$\delta H = \delta \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}$$

となっています。
　まず、$\delta_\pi \mathcal{H}$ を求めます。これは

$$\delta_\pi \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{ab}} \delta\pi^{ab}$$

なので

$$
\begin{aligned}
\delta_\pi \mathcal{H} &= \sqrt{h}\frac{\partial}{\partial \pi^{ab}}\big[\frac{N}{h}(\pi_{mn}\pi^{mn}-\frac{\pi^2}{2})-2N_i(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij})_{:j}\big]\delta\pi^{ab} \\
&= \sqrt{h}\frac{\partial}{\partial \pi^{ab}}\big[\frac{N}{h}(h_{cm}h_{dn}\pi^{cd}\pi^{mn}-\frac{1}{2}h_{cm}h_{dn}\pi^{cm}\pi^{dn})-2N_i(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ij})_{:j}\big]\delta\pi^{ab} \\
&= \sqrt{h}\big[\frac{N}{h}(h_{am}h_{bn}\pi^{mn}+h_{ca}h_{db}\pi^{cd}-\frac{1}{2}h_{ab}h_{dn}\pi^{dn}-\frac{1}{2}h_{cm}h_{ab}\pi^{cm})-2\frac{\partial}{\partial \pi^{ab}}N_c(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{cd})_{:d}\big]\delta\pi^{ab} \\
&= \sqrt{h}\big[\frac{N}{h}(2\pi_{ab}-h_{ab}\pi)-2\frac{\partial}{\partial \pi^{ab}}N_c(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{cd})_{:d}\big]\delta\pi^{ab} \\
&= \sqrt{h}\big[\frac{N}{h}(2\pi_{ab}-h_{ab}\pi)-2\frac{\partial}{\partial \pi^{ab}}(N_c\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{cd})_{:d}+\frac{1}{\sqrt{h}}(N_{a:b}+N_{b:a})\big]\delta\pi^{ab} \\
&= \sqrt{h}[\frac{N}{h}(2\pi_{ab}-h_{ab}\pi)+2\frac{1}{\sqrt{h}}N_{(a:b)}]\delta\pi^{ab}
\end{aligned}
$$

最後から一行前の第二項は表面項として落としています。最後に使っている $N_{(a:b)}$ という表記は

$$
N_{(a:b)}=\frac{1}{2}(N_{a:b}+N_{b:a})
$$

のように添え字の入れ替えに対して対称化されているものを表わしています (「:」は超曲面での共変微分)。というわけで、$\partial\mathcal{H}/\partial\pi^{ab}$ 部分を取り出すことで

$$
\dot{h}_{ab}=\sqrt{h}[\frac{N}{h}(2\pi_{ab}-h_{ab}\pi)+2\frac{1}{\sqrt{h}}N_{(a:b)}]
$$

という正準方程式が出てきます。次にもう片方の正準方程式を求めるんですが、こっちは今のように簡単には求められなく、面倒な計算を行います。

最初に使うものの準備をします。誘導計量の行列式は「ラグランジアン密度」でやった方法と同じようにすることで

$$
\delta\sqrt{h}=\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial h_{ab}}\delta h_{ab}=\frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab}
$$

誘導計量の変分に対しては (通常の計量でも成り立ちます)

$$
h_{ab}\delta h^{ab}=-h^{ab}\delta h_{ab}\ ,\ \delta h^{bm}=-h^{am}h^{bn}\delta h_{an}
$$

二番目の方は

$$
\begin{aligned}
h^{ia}h_{aj} &= \delta^i_j \\
h_{aj}\delta h^{ia} + h^{ia}\delta h_{aj} &= 0 \\
h_{aj}\delta_h h^{ia} &= -h^{ia}\delta_h h_{aj} \\
h^{bj}h_{aj}\delta h^{ia} &= -h^{bj}h^{ia}\delta h_{aj} \\
\delta^b_a\delta h^{ia} &= -h^{bj}h^{ia}\delta h_{aj} \\
\delta h^{ib} &= -h^{ia}h^{jb}\delta h_{aj}
\end{aligned}
$$

と求められます。誘導計量の $h^{-1/2}$ の変分も出てきますが

$$
\begin{aligned}
\delta h^{-1/2} &= \frac{\partial}{\partial h_{ab}}h^{-1/2}\delta h_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}h^{-3/2}\frac{\partial h}{\partial h_{ab}}\delta h_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}h^{-3/2}hh^{ab}\delta h_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}h^{-1/2}h^{ab}\delta h_{ab} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{h}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab} \\
&= -\frac{1}{h}\delta\sqrt{h}
\end{aligned}
$$

このように $h^{-1}\delta\sqrt{h}$ に変形することができます。

接続係数の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^c_{ab} &= \delta(h^{dc}\Gamma_{dab}) \\
&= \Gamma_{dab}\delta h^{dc} + h^{dc}\delta\Gamma_{dab} \\
&= \Gamma_{dab}\delta h^{dc} + \frac{1}{2}h^{dc}\delta(h_{db|a} + h_{da|b} - h_{ab|d}) \\
&= \Gamma_{dab}\delta h^{dc} + \frac{1}{2}h^{dc}\big(\delta h_{db|a} - \Gamma^i_{da}\delta h_{bi} - \Gamma^i_{ba}\delta h_{di} \\
&\quad + \delta h_{da|b} - \Gamma^i_{db}\delta h_{ai} - \Gamma^i_{ab}\delta h_{di} - \delta h_{ab|d} + \Gamma^i_{ad}\delta h_{bi} + \Gamma^i_{bd}\delta h_{ai}\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}h^{dc}\big(\Gamma^i_{da}\delta h_{bi} + \Gamma^i_{ba}\delta h_{di} + \Gamma^i_{db}\delta h_{ai} + \Gamma^i_{ab}\delta h_{di} - \Gamma^i_{ad}\delta h_{bi} - \Gamma^i_{bd}\delta h_{ai}\big) \\
&= \Gamma_{dab}\delta h^{dc} + \frac{1}{2}h^{dc}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) + h^{dc}\Gamma^i_{ab}\delta h_{di} \\
&= \frac{1}{2}h^{dc}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) - \Gamma_{dab}h^{di}h^{cj}\delta h_{ij} + \Gamma^i_{ab}h^{dc}\delta h_{di} \\
&= \frac{1}{2}h^{dc}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) - \Gamma^i_{ab}h^{dc}\delta h_{di} + \Gamma^i_{ab}h^{dc}\delta h_{di} \\
&= \frac{1}{2}h^{dc}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big)
\end{aligned}
$$

このようになっています (「:」は超曲面での共変微分)。接続係数のこの関係は通常の計量でも成り立ちます。

出てきたものをまとめると

$$
\begin{aligned}
&\delta\sqrt{h} = \frac{\partial\sqrt{h}}{\partial h_{ab}}\delta h_{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab} \\
&h_{ab}\delta h^{ab} = -h^{ab}\delta h_{ab}\ ,\ \delta h^{bm} = -h^{am}h^{bn}\delta h_{an} \\
&\delta h^{-1/2} = -\frac{1}{h}\delta\sqrt{h} \\
&\delta\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}h^{dc}[(\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}]
\end{aligned}
$$

また、π^{ab}, N, N_a は独立変数なので、h_{ab} の変分を取れば 0 になります。

ハミルトニアンに対して h_{ab} の変分を取った形 $\delta\mathcal{H}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \sqrt{h}[-^{(3)}RN + \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) - 2N_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b}] \\
&= \sqrt{h}[-^{(3)}RN + \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) - 2(N_a\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b} + 2\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N_{a:b}] \\
\delta\mathcal{H} &= [-N\delta(\sqrt{h}^{(3)}R) + \frac{N}{\sqrt{h}}\delta(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) + N(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})\delta h^{-1/2} + \delta(2\pi^{ab}N_{a:b})]
\end{aligned}
$$

第三項は $\delta h^{-1/2} = -h^{-1}\delta\sqrt{h}$ を使うことで

$$
\delta\mathcal{H} = [-N\delta(\sqrt{h}^{(3)}R) + \frac{N}{\sqrt{h}}\delta(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) - \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})\delta\sqrt{h} + 2\delta(\pi^{ab}N_{a:b})] \tag{1}
$$

この第一項 $\delta(\sqrt{h}^{(3)}R)$ は「ラグランジアン密度」の結果を 3 次元に合わせればいいだけで

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{h}^{(3)}R) =& -\Big[\sqrt{h}\big((h^{ab}\delta\Gamma^c_{ac})_{:b} - (h^{ab}\delta\Gamma^c_{ab})_{:c}\big) + \sqrt{h}G^{ab}\delta h_{ab}\Big]\\ =& -\Big[\sqrt{h}\big((h^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}) - (h^{ab}\delta\Gamma^c_{ab})\big)_{:c} + \sqrt{h}G^{ab}\delta h_{ab}\Big]\\ =& -[\sqrt{h}u^c_{:c} + \sqrt{h}G^{ab}\delta h_{ab}]\end{aligned}\tag{2}$$

「ラグランジアン密度」での符号の逆になっているのは、$h^{ab}\delta h_{ab}$ のように取っているからです。$h_{ab}\delta h^{ab}$ にすれば符号は同じになります。ハミルトニアンの第二項では

$$\begin{aligned}\delta(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2}) &= (\delta\pi_{cd})\pi^{cd} + \pi_{cd}\delta\pi^{cd} - \frac{\delta\pi^2}{2}\\ &= \frac{\partial}{\partial h_{ab}}\Big[(h_{mc}h_{nd}\pi^{mn})\pi^{cd} - \frac{h_{ec}\pi^{ec}h_{nd}\pi^{nd}}{2})\Big]\delta h_{ab}\\ &= \big(\delta_{am}\delta_{cb}h_{nd}\pi^{mn}\pi^{cd} + \delta_{an}\delta_{bd}h_{mc}\pi^{mn}\pi^{cd} - \pi^{ab}\pi\big)\delta h_{ab}\\ &= (\pi^a{}_d\pi^{bd} + \pi^a{}_c\pi^{cb} - \pi^{ab}\pi)\delta h_{ab}\\ &= (2\pi^a{}_d\pi^{bd} - \pi^{ab}\pi)\delta h_{ab}\end{aligned}$$

(1) の最後の項に対しては

$$\begin{aligned}\delta(N_{a:b}) &= \delta(h_{ac}N^c_{:b})\\ &= N^c_{:b}\delta h_{ac} + h_{ac}\delta N^c_{:b}\\ &= N^c_{:b}\delta h_{ac} + h_{ac}\delta(N^c_{|b} + N^d\Gamma^c_{bd})\\ &= N^c_{:b}\delta h_{ac} + h_{ac}\delta N^c_{|b} + h_{ac}\Gamma^c_{bd}\delta N^d + h_{ac}N^d\delta\Gamma^c_{bd}\\ &= N^c_{:b}\delta h_{ac} + h_{ac}N^d\delta\Gamma^c_{bd}\end{aligned}$$

を使うことで、$\delta\mathcal{H}$ は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} =& -N\delta(\sqrt{h}^{(3)}R) + \frac{N}{\sqrt{h}}\delta(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) - \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})\delta\sqrt{h} + 2\delta(\pi^{ab}N_{a:b})\\ =& N\sqrt{h}(u^c_{:c} + G^{ab}\delta h_{ab}) + \frac{2N}{\sqrt{h}}(\pi^a{}_d\pi^{bd} - \frac{1}{2}\pi^{ab}\pi)\delta h_{ab}\\ &- \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})h^{ab}\delta h_{ab} + 2(\pi^{ac}N^b_{:c}\delta h_{ab} + h_{ac}\pi^{ab}N^d\delta\Gamma^c_{bd})\\ =& \Big[N\sqrt{h}G^{ab} + \frac{2N}{\sqrt{h}}(\pi^a{}_d\pi^{bd} - \frac{1}{2}\pi^{ab}\pi) - \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})h^{ab} + 2\pi^{c(a}N^{b)}_{:c}\Big]\delta h_{ab}\\ &+ \sqrt{h}Nu^c_{:c} + 2\pi^b{}_cN^d\delta\Gamma^c_{bd}\end{aligned}\tag{3}$$

最後の 2 項はまだ δh_{ab} が表に出てきていないので、どうなっているのか見ていきます。
　接続係数の変分を使うことで、u^c は

$$
\begin{aligned}
u^c &= (h^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}) - (h^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}) \\
&= \frac{1}{2}h^{ac}h^{db}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) - \frac{1}{2}h^{ab}h^{dc}\big((\delta h_{db})_{||a} + (\delta h_{da})_{||b} - (\delta h_{ab})_{||d}\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(h^{ac}h^{db} - h^{ab}h^{dc}\big)\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big)
\end{aligned}
$$

(3) の $\sqrt{h}Nu^c_{:c}$ 項は三次元積分を受けていることから、部分積分によって (表面項を落とします)

$$
\int d^3y\sqrt{h}Nu^c_{:c} = -\int d^3y\sqrt{h}N_{|c}u^c
$$

と書きかえられるので、$N_{|c}u^c$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
N_{|c}u^c &= \frac{1}{2}N_{|c}(h^{ac}h^{db} - h^{ab}h^{dc})((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}) \\
&= \frac{1}{2}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) \\
&= \frac{1}{2}N^{|a}h^{db}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) - \frac{1}{2}N^{|d}h^{ab}\big((\delta h_{db})_{:a} + (\delta h_{da})_{:b} - (\delta h_{ab})_{:d}\big) \\
&= \frac{1}{2}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{db})_{:a} + \frac{1}{2}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{da})_{:b} - \frac{1}{2}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{ab})_{:d} \\
&= \frac{1}{2}(N^{|d}h^{ab} - N^{|a}h^{db})(\delta h_{ab})_{:d} - \frac{1}{2}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{ab})_{:d} \\
&= -(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{ab})_{:d}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int d^3y\sqrt{h}Nu^c_{:c} &= -\int d^3y\sqrt{h}N_{|c}u^c \\
&= \int d^3y\sqrt{h}(N^{|a}h^{db} - N^{|d}h^{ab})(\delta h_{ab})_{:d} \\
&= -\int d^3y\sqrt{h}(N^{|a}_{|d}h^{db} - N^{|d}_{|d}h^{ab})\delta h_{ab} \\
&= -\int d^3y\sqrt{h}(N^{:a}_{:d}h^{db} - N^{:d}_{:d}h^{ab})\delta h_{ab}
\end{aligned}
$$

$\delta\mathcal{H}$ の最後の項 $2\pi^b{}_c N^d\delta\Gamma^c_{bd}$ も積分がいることを踏まえて、表面項を落とすようにすれば

$$
\begin{aligned}
2\pi^b{}_c N^d \delta\Gamma^c_{bd} &= \pi^b{}_c N^d h^{ec}((\delta h_{ed})_{:b} + (\delta h_{eb})_{:d} - (\delta h_{bd})_{:e}) \\
&= \pi^{be} N^d((\delta h_{ed})_{:b} + (\delta h_{eb})_{:d} - (\delta h_{bd})_{:e}) \\
&= \pi^{be} N^d(\delta h_{ed})_{:b} + \pi^{be} N^d(\delta h_{eb})_{:d} - \pi^{be} N^d(\delta h_{ed})_{:b} \\
&= \sqrt{h}\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{be} N^d(\delta h_{eb})_{:d} \\
&= \ -\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab} N^d)_{:d}\delta h_{ab}
\end{aligned}
$$

というわけで、全部をまとめると

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{H} = \big[&N\sqrt{h}G^{ab} + \frac{2N}{\sqrt{h}}(\pi^a{}_c\pi^{bc} - \frac{1}{2}\pi^{ab}\pi) - \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2})h^{ab} + 2N^{(b}_{:c}\pi^{a)c} \\
&- \sqrt{h}(N^{:a:b} - N^{:c}_{:c}h^{ab}) - \sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c)_{:c}\big]\delta h_{ab}
\end{aligned}
$$

これより正準方程式は

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ab} = -\big[&N\sqrt{h}G^{ab} + \frac{2N}{\sqrt{h}}(\pi^a{}_c\pi^{bc} - \frac{1}{2}\pi^{ab}\pi) - \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2})h^{ab} + 2N^{(b}_{:c}\pi^{a)c} \\
&- \sqrt{h}(N^{:a:b} - N^{:c}_{:c}h^{ab}) - \sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}N^c)_{:c}\big]
\end{aligned}
$$

となります。

よって、求められた 2 つの正準方程式は

$$
\dot{h}_{ab} = \sqrt{h}[\frac{N}{h}(2\pi_{ab} - h_{ab}\pi) + 2\frac{1}{\sqrt{h}}N_{(a:b)}]
$$

$$
\dot{\pi}^{ab} = -N\sqrt{h}G^{ab} - \frac{2N}{\sqrt{h}}(\pi^a{}_c\pi^{bc} - \frac{1}{2}\pi^{ab}\pi) + \frac{1}{2}\frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{\pi^2}{2})h^{ab}[0.21cm] \qquad + \sqrt{h}(N^{:a:b} - N^{:c}_{:c}h^{ab}) + \sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}
$$

これで正準方程式が求められましたが、ADM 形式では正準方程式だけでは成立していなく、拘束条件が重要になっています。

ハミルトニアンの力学変数は h_{ab}, π^{ab}, N, N_a なので、まだ N と N_a が残っています。しかし、この 2 つの共役量はないために、作用の変分を取ると

$$
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = 0 \ , \ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N_a} = 0
$$

となっている必要があります。これらを S, V^a と書くことにすれば

$$S=\sqrt{h}[-^{(3)}R+\frac{1}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab}-\frac{\pi^2}{2})]=0$$

$$V^a=-2\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b}=0$$

という二つの式が求められます。これが拘束条件になります。S のことをスカラー拘束条件 (scalar constrains)、V^a をベクトル拘束条件 (vector constrains) と呼びます。この 4 つの拘束条件 (スカラーで 1 つ、ベクトルで 3 つ) と正準方程式によってアインシュタイン方程式と同等になります。
拘束条件の式によってハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}=\sqrt{h}[-^{(3)}RN+\frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab}-\frac{\pi^2}{2})-2N_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b}]=NS+N_aV^a$$

このように拘束条件の線形結合によって書くことができます。作用は

$$I=\int dt\int_{\Sigma_t}d^3y(\pi^{ab}\dot{h}_{ab}-\mathcal{H})=\int dt\int_{\Sigma_t}d^3y(\pi^{ab}\dot{h}_{ab}-NS-N_aV^a)$$

となります。ハミルトニアン密度が拘束条件によって書けてしまうのは、明らかに奇妙なことが分かると思います。しかし、これが共変的な系を扱う時の一般的な性質になっています。
最後に、ポアソン括弧の関係も見ておきます。場を扱うときのポアソン括弧は

$$\{F,G\}_P=\int d^3x(\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta F}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi(x)})$$

となっています。ポアソン括弧の場合は汎関数であることを無視できないので残しておきます。今の共役量は h_{ab},π^{ab} なので

$$\{F,G\}_P=\int d^3x(\frac{\delta F}{\delta h_{ab}(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ab}(x)}-\frac{\delta F}{\delta\pi^{ab}(x)}\frac{\delta G}{\delta h_{ab}(x)})$$

そうすると、h_{ij} と π^{mn} のポアソン括弧は、h_{ij} や π^{mn} が対称であることを使って、対称な形になるように計算すると

$$\begin{aligned}
\{h_{ij}(x_1),\pi^{mn}(x_2)\}_P=&\int d^3y(\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta h_{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta\pi^{ab}(y)}-\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta\pi^{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta h_{ab}(y)})\\
&=\frac{1}{2}\int d^3y(\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta h_{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta\pi^{ab}(y)}-\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta\pi^{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta h_{ab}(y)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\int d^3y(\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta h_{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta\pi^{ba}(y)}-\frac{\delta h_{ij}(x_1)}{\delta\pi^{ab}(y)}\frac{\delta\pi^{mn}(x_2)}{\delta h_{ab}(y)})\\
&=\frac{1}{2}\int d^3y(\delta_i^a\delta_j^b\delta_a^m\delta_b^n+\delta_i^a\delta_j^b\delta_b^m\delta_a^n)\delta^3(x_1-y)\delta^3(x_2-y)\\
&=\frac{1}{2}\int d^3y(\delta_i^m\delta_j^n+\delta_j^m\delta_i^n)\delta^3(x_1-y)\delta^3(x_2-y)\\
&=\frac{1}{2}(\delta_i^m\delta_j^n+\delta_j^m\delta_i^n)\delta(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

同じもの同士でも同様にやればよく、これはすぐに

$$\{h_{ij}(x_1), h_{mn}(x_2)\}_P = \{\pi^{ij}(x_1), \pi^{mn}(x_2)\}_P = 0$$

と分かります。

ついでに他のポアソン括弧も計算しておきます。ベクトル拘束条件とでは

$$\begin{aligned}
&\Big\{h_{jk}(x_1), \int d^3x_2 N^i V_i(x_2)\Big\}_P \\
&= \int d^3y d^3x_2 \Big(\frac{\delta h_{jk}(x_1)}{\delta h_{ab}(y)}\frac{\delta(N^iV_i(x_2))}{\delta\pi^{ab}(y)} - \frac{\delta h_{jk}(x_1)}{\delta\pi^{ab}(y)}\frac{\delta(N^iV_i(x_2))}{\delta h_{ab}(y)}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x_2 d^3y \Big(\delta^a_j\delta^b_k\delta^3(x_1-y)N^i\frac{\delta V_i(x_2)}{\delta\pi^{ab}(y)} + \delta^a_j\delta^b_k\delta^3(x_1-y)N^i\frac{\delta V_i(x_2)}{\delta\pi^{ba}(y)}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x_2 \Big(-2h_{ic}\sqrt{h}\delta^a_j\delta^b_k N^i\big(\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^a_c\delta^b_d\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:d} - 2h_{ic}\sqrt{h}\delta^a_j\delta^b_k N^i\big(\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^b_c\delta^a_d\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:d}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x_2 \Big(-2\delta^a_j\delta^b_k\delta^a_c\delta^b_d h_{ic}\sqrt{h}N^i\big(\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:d} - 2\delta^a_j\delta^b_k\delta^b_c\delta^a_d h_{ic}\sqrt{h}N^i\big(\frac{1}{\sqrt{h}}(x_2-x_1)\big)_{:d}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x_2 \Big(-2\sqrt{h}N_j\big(\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:k} - 2\sqrt{h}N_k\big(\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:j}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int d^3x_2 \Big(2\sqrt{h}\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)N_{j:k} + 2\sqrt{h}\frac{1}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)N_{k:j}\Big) \\
&= N_{j:k}(x_1) + N_{k:j}(x_1)
\end{aligned}$$

この結果は h_{ab} の N_a 方向のリー微分と一致しています。テンソルでのリー微分の定義式から計量では

$$\mathfrak{L}_{N_i} h_{ab} = h_{ab:j}N^j + N_{a:j}h^j{}_b + N^j_{:b}h_{aj}$$

計量の共変微分は消えることから、当然

$$\mathfrak{L}_{N_i} h_{ab} = N_{a:b} + N_{a:b}$$

となって一致しています。

共役量 π_{ij} では

$$\begin{aligned}\Big\{\pi^{jk}(x_1),\int d^3x_2N^iV_i(x_2)\Big\}_P =& \int d^3yd^3x_2\Big(\frac{\delta\pi^{jk}(x_1)}{\delta h_{ab}(y)}\frac{\delta(N^iV_i(x_2))}{\delta\pi^{ab}(y)}-\frac{\delta\pi^{jk}(x_1)}{\delta\pi^{ab}(y)}\frac{\delta(N^iV_i(x_2))}{\delta h_{ab}(y)}\Big)\\
=& -\int d^3yd^3x_2\delta^j_a\delta^k_bN^i\frac{\delta V_i(x_2)}{\delta h_{ab}(x_1)}\delta^3(x_1-y)\\
=& -\int d^3x_2\delta^j_a\delta^k_bN^i\Big(-2\delta^a_i\delta^b_c\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{cd})_{:d}-h_{ic}h^{ab}\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{cd})_{:d}\\
&\qquad +h_{ic}\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}h^{ab}\pi^{cd})_{:d}\Big)\delta^3(x_2-x_1)\\
=& -\int d^3x_2N^j\big(-2\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{kd})_{:d}\big)\delta^3(x_2-x_1)\\
=& -2\int d^3x_2N^j_{:d}\pi^{kd}\delta^3(x_2-x_1)\\
=& -2\int d^3x_2N^j_{:d}\pi^{kd}\delta^3(x_2-x_1)+\int d^3x_2\sqrt{h}\big(N^d\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}\delta^3(x_2-x_1)\big)_{:d}\\
=& -2N^j_{:d}\pi^{kd}+\sqrt{h}(N^d\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}})_{:d}\end{aligned}$$

最後の前の行で全微分で消える項を加えています。この項のおかげで

$$\begin{aligned}\Big\{\pi^{jk}(x_1),\int d^3x_2N^iV_i(x_2)\Big\}_P =& -2N^j_{:d}\pi^{kd}+\sqrt{h}(N^d\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}})_{:d}\\
=& -2\sqrt{h}N^j_{:d}\frac{\pi^{kd}}{\sqrt{h}}+\sqrt{h}N^d_{:d}\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}+\sqrt{h}N^d(\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}})_{:d}\\
=& \sqrt{h}\mathfrak{L}_{N_i}\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}+\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}\sqrt{h}N^d_{:d}\\
=& \sqrt{h}\mathfrak{L}_{N_i}\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}+\frac{\pi^{jk}}{\sqrt{h}}\mathfrak{L}_{N_i}\sqrt{h}\\
=& \mathfrak{L}_{N_i}\pi^{jk}\end{aligned}$$

2 階テンソルのリー微分

$$\mathfrak{L}_tT^{ij}=T^{ij}_{||k}t^k-T^{kj}t^i_{||k}-T^{ik}t^j_{||k}$$

とスカラー密度 $s=\sqrt{h}S$ のリー微分

$$\mathfrak{L}_ts=t^is_{:i}+st^i_{:i}$$

を使っています。リー微分に置き換えるときに π^{jk} は対称であることを使っています。というわけで、N_i 方向のリー微分になっていることが分かります。つまり、ベクトル拘束条件は N_i 方向、言い換えれば超曲面 Σ 上の空間方向への生成子になっています。