ハミルトニアン密度

ラグランジアン密度とは違いかなり面倒で特殊な話をしていくので、相対論の入門を勉強したい人や「超曲面」の後半で何をしているか分からなくなった人は飛ばしてください。
ここではギリシャ文字を元の 4 次元空間の添え字、ローマ文字を 3 次元の超曲面の添え字とします。
煩わしさを避けるために、重力定数 κ と光速 c を 1 とする幾何学単位系を使います ($\kappa = c = 1$)。
π と書いたものが π_{ab} のトレースになっていることに注意してください。
ハミルトニアンを使った話で計量を $(+,-,-,-)$ としている話をほとんどみないので、$(-,+,+,+)$ を使います。

最初に超曲面での定義をまとめておきます。導出は「超曲面」を見てください。計量の符号を $(-,+,+,+)$ にするので、「超曲面」で出てきた時間的、空間的に関係する式の符号が反転します。単位法線ベクトルに対しては

- $n^\alpha n_\alpha = +1$ $(\epsilon = +1)$: 超曲面は時間的
- $n^\alpha n_\alpha = -1$ $(\epsilon = -1)$: 超曲面は空間的

超曲面上での定義 (ローマ文字は $1, 2, 3$)

- 誘導計量

$$h_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b$$

- 共変微分

$$A_{a:b} = A_{a|b} - \Gamma^c_{ab} A_c$$

- クリストッフェル記号

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} h^{ic} [h_{ib|a} + h_{ai|b} - h_{ab|i}]$$

- 外部曲率

$$K_{ab} = n_{\lambda||\nu} e^\lambda_a e^\nu_b$$

$$K_{ab} = K_{ba}$$

$$K = K^a{}_a = h^{ab} K_{ab} = n^\alpha_{||\alpha}$$

- リーマンテンソル

$$R^c_{dab} = \Gamma^c_{bc|a} - \Gamma^c_{da|b} - \Gamma^c_{bj}\Gamma^j_{ad} + \Gamma^c_{aj}\Gamma^j_{bd}$$

- リッチスカラー

$$R = {}^{(3)}R + 2\epsilon[n^\alpha_{||\beta}n^\beta - n^\beta_{||\beta}n^\alpha]_{||\alpha} + \epsilon(K^2 - K_{ab}K^{ab})$$

一般相対性理論でのハミルトニアンは、4 次元空間を分解することで作られます。これは正準形式にするときに、力学変数 (位置とか運動量) の時間微分が必要になることによります。

空間上で $t(x^\mu)$ というのを定義し、$t = const$ で 4 次元空間を切断します。これによって作られる、時間が一定な超曲面 Σ_t を考えます。時間の方向は超曲面に対して直交するように取ります、なので、$\partial_\mu t$ は単位法線ベクトル n_μ に比例します。時間の方向 (法線の方向) を時間的にとるので、超曲面は空間的になります。このように時間一定面で空間を切ることを 3+1 分解と言い、空間と時間が分離された状況になります (空間と時間が分離されているからハミルトニアン形式が使える)。3+1 分解したときの空間の性質をまず見ておきます。

超曲面を横切り、t をパラメータとする曲線 $x_\mu(t)$ を考えます。この曲線は一般的には超曲面と直交しません。t^μ を曲線の接ベクトルとすれば、曲線の接ベクトル t^μ は x_μ を曲線のパラメータで微分することで求まるので

$$t^\mu\partial_\mu t = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x^\mu} = 1$$

という関係式が出てきます。超曲面上での座標を y^a とすれば、曲線は $x^\mu = x^\mu(t, y^a)$ と書くことができます。「超曲面」で出てきたように、Σ_t 上の接ベクトル e^μ_a は

$$e^\mu_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}$$

で与えられます。

次に t^μ を Σ_t での接成分と法線成分に分離させます。これは単位法線ベクトル n^μ と接ベクトル e^μ_a によって

$$t^\mu = Nn^\mu + N^a e^\mu_a \tag{1}$$

このように書くことができるはずで、N をラプス関数 (lapse function)、N^a をシフトベクトル (shift vector) と呼びます。この式に n_μ をかけるとラプス関数のみを取り出せて

$$n_\mu t^\mu = Nn_\mu n^\mu + N^a n_\mu e^\mu_a = -N$$

この式より、ラプス関数は単位法線ベクトル n_μ と曲線の接ベクトル t^μ との内積になっていることが分かります。また、$t^\mu\partial_\mu t = 1$ なので

$$n_\mu = -N\partial_\mu t \tag{2}$$

とも書くことができ、Σ_t の接ベクトルと単位法線ベクトルの比例定数のようにもラプス関数はなっています。

3+1 分解された空間での線素を作ります。曲線の座標 x^μ を t, y^a の関数だとして dx^μ を作ると

$$
\begin{aligned}
dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t}dt + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}dy^a \\
&= t^\mu dt + e^\mu_a dy^a \\
&= t^\mu dt + e^\mu_a dy^a \\
&= (Nn^\mu + N^a e^\mu_a)dt + e^\mu_a dy^a \\
&= Nn^\mu dt + (N^a dt + dy^a)e^\mu_a
\end{aligned}
$$

これによって線素は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\
&= g_{\mu\nu}(Nn^\mu dt + (N^a dt + dy^a)e^\mu_a)(Nn^\nu dt + (N^b dt + dy^b)e^\nu_b) \\
&= g_{\mu\nu}N^2 n^\mu n^\nu dt^2 + g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b(N^a dt + dy^a)(N^b dt + dy^b) \\
&= -N^2 dt^2 + h_{ab}(N^a dt + dy^a)(N^b dt + dy^b)
\end{aligned}
$$

n^μ と e^μ_a は直交することと、$n_\mu n^\mu = -1$ を使い、誘導計量 $h_{ab} = g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b$ を導入しています。

第一項の形から、超曲面 Σ_t とそこから時間 dt だけ経った超曲面 Σ_{t+dt} との間の差が Ndt であるという解釈ができます。言い換えると、Ndt が固有時間となっていると言えます。第二項からは、Σ_t と曲線が交わっているある点を法線に沿って Σ_{t+dt} 上に移した点が、Σ_{t+dt} と曲線の交点から $N^a dt$ ズレていることを言っていると考えられます。これによって N^a がシフトベクトルと呼ばれる理由が分かると思います。

固有時間と言えることを見ておきます。Σ_t での点 A と、微小時間 δt 経過した $\Sigma_{t+\delta t}$ での点 B を考えます。A と B の差を表すベクトルを m^μ とすれば

$$
B^\mu = A^\mu + m^\mu \delta t
$$

と書け、m^μ は接ベクトル t^μ の分解から Nn^μ となります。そして、この差の長さは固有時間 $\delta\tau$ に対応させられるので

$$
\delta\tau = \delta t\sqrt{-g_{\mu\nu}m^\mu m^\nu} = N^2\delta t\sqrt{-g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu} = N^2\delta t
$$

となり、固有時間との対応関係が出てきます。また、m^μ が Nn^μ であることは

$$
t(B) = t(A + m\delta t) = t(A) + m^\mu\delta t\partial_\mu t = t(A) + \delta t Nn^\mu\partial_\mu t = t(A) - n^\mu n_\mu\delta t = t(A) + \delta t
$$

からも確かめられます。

これで基本的な 3+1 分解による設定ができたので、ハミルトニアン密度を求めていきます。後々必要になる計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式 g が h_{ab} の行列式 h によってどう書けるのかを先に求めておきます。h_{ab} は $g_{\mu\nu}$ の時間成分に関係する部分を抜いたものなので、余因子を使うことで関係性が分かります。$g^{\mu\nu}$ は余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ と行列式によって

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}$$

この式において 00 成分とすれば、余因子 Δ^{00} は h_{ab} の行列式そのものになるので

$$g^{00} = \frac{h}{g}$$

と書けます。h_{ab} の行列式になるのは、計量の座標変換

$$h_{ab} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b} g_{\mu\nu} = g_{ab}$$

を考えれば分かりやすいです。g^{00} は、(2) を使って

$$g^{00} = \frac{\partial x^0}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^0}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = (\partial_\mu t)(\partial_\nu t) g^{\mu\nu} = N^{-2} g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = -N^{-2}$$

なので

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$$

という関係が導かれます。ここでは添え字のない g, h は計量 $g_{\mu\nu}$ と誘導計量 h_{ab} の行列式としますが、他のテンソルの場合はトレースとします。

真空のアインシュタイン方程式に対するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$$

で与えられ、ラグランジアンと作用は

$$L = \int_D d^3x\sqrt{-g}R$$

$$I = \int dt \int_D d^3x \mathcal{L} = \int dt \int_D d^3x \sqrt{-g}R$$

これを今の状況にあわせます。つまり、空間の三次元積分は超曲面 Σ_t 上でのものにします。なので、作用は

$$I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{-g}R$$

そして、$\sqrt{-g}$ は 3+1 分解された表現として

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$$

R は超曲面上でのものとして

$$R = {}^{(3)}R + 2(n^{\alpha}_{||\beta}n^{\beta} - n^{\beta}_{||\beta}n^{\alpha})_{||\alpha} - K^2 + K_{ab}K^{ab}$$

R の第二項は表面積分の形になっていることから、落とすことが出来るので

$$I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y\sqrt{h}N({}^3R - K^2 + K_{ab}K^{ab}) = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y\mathcal{L}$$

これで 3+1 分解されたラグランジアン密度が求められたことになります。これは元々のラグランジアンの変数 (力学変数) である計量 $g_{\mu\nu}$ が、誘導計量 h_{ab} とラプス関数 N とシフトベクトル N_a を変数に持つ形式へ変換されたと見れます。

ラグランジアンを使う場合、本当は空間の境界面の構造を確かめる必要があることを一応注意しておいてください。しかし、ここでは特に気にする必要がないので、境界上では力学変数は消えることを要求するだけにします (解析力学での話と同じ)。また、ラグランジアンには境界面で消える表面項を付け足すことができ、それがより一般的なものですが、そういった項は考えません。

本題のハミルトニアン密度に移ります。解析力学でのラグランジアンは位置の変分を考えていたのに対して、相対論の場合では計量がその代わりとなります。その上、今の場合では変数としてラプス関数とシフトベクトルという新しい量が現われています。この二つは後にまわして、まずは計量について見ていきます。

ハミルトニアン密度を作るためには計量の共役量が必要になるので、これを求めます。これには、解析力学での共役量の定義

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

から分かるように、計量の時間微分が必要になります。ここで、わざわざ 3+1 分解をしたことの意味が出てきて、時間にそった微分を考えることが出来ます。

今は超曲面上で考えているので、計量は誘導計量 h_{ab} を使います。時間に関する微分は今の場合、時間の流れにそった曲線上での微分であるために、これはリー微分によって

$$\dot{h}_{ab} = \mathfrak{L}_t h_{ab}$$

として作れます (「共変微分」参照)。そして、超曲面上ではただの時間微分 $\partial h_{ab}/\partial t = \dot{h}_{ab}$ になります。というわけで、共役量 π^{ab} は

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}}$$

として与えられます (π_{ab} のトレースを π と書きますが、円周率の π と間違えないでください)。

ラグランジアン密度の微分を行うには $\dot{h}_{ab}$ がどのように含まれているのか知る必要があるので、それを調べます。$\dot{h}_{ab}$ は

$$\dot{h}_{ab} = \mathfrak{L}_t h_{ab} = \mathfrak{L}_t(g_{\alpha\beta}e^{\alpha}_a e^{\beta}_b) = (\mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta})e^{\alpha}_a e^{\beta}_b$$

これは、基底ベクトルのリー微分 $\mathfrak{L}_t$ は 0 になることを使っています。感覚的に、時間一定な超曲面上の基底ベクトルを時間に沿って微分すれば 0 になるのは分かると思います (今の基底ベクトルの定義みたいなものです)。計量に対するリー微分は

$$\mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta} = t_{\alpha||\beta} + t_{\beta||\alpha}$$

(1) を使うことで

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta} = t_{\alpha||\beta} + t_{\beta||\alpha} &= (Nn_\alpha + N_\alpha)_{||\beta} + (Nn_\beta + N_\beta)_{||\alpha} \qquad (N^\alpha = N^a e_a^\alpha) \\
&= N_{||\beta}n_\alpha + Nn_{\alpha||\beta} + N_{\alpha||\beta} + N_{||\alpha}n_{\beta||\alpha} + Nn_{\beta||\alpha} + N_{\beta||\alpha} \\
&= N_{|\beta}n_\alpha + N_{|\alpha}n_\beta + N(n_{\alpha||\beta} + n_{\beta||\alpha}) + N_{\alpha||\beta} + N_{\beta||\alpha}
\end{aligned}$$

N はスカラーなので、共変微分はただの微分になります。というわけで

$$\begin{aligned}
\dot{h}_{ab} &= (\mathfrak{L}_t g_{\alpha\beta})e_a^\alpha e_b^\beta \\
&= N(n_{\alpha||\beta} + n_{\beta||\alpha})e_a^\alpha e_b^\beta + N_{\alpha||\beta}e_a^\alpha e_b^\beta + N_{\beta||\alpha}e_a^\alpha e_b^\beta \\
&= N(K_{ab} + K_{ba}) + N_{a:b} + N_{b:a} \\
&= 2NK_{ab} + N_{a:b} + N_{b:a}
\end{aligned}$$

となるので、外部曲率は

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - N_{a:b} - N_{b:a})$$

のように $\dot{h}_{ab}$ を含んでいます。
　この結果によってラグランジアン密度の $\dot{h}_{ij}$ 微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}}\sqrt{h}N({}^{(3)}R - K^2 + K_{ab}K^{ab}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}}\sqrt{h}N({}^{(3)}R - h^{ab}h^{cd}K_{ab}K_{cd} + h^{ac}h^{bd}K_{ab}K_{cd}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}}\sqrt{h}N[{}^{(3)}R - (h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})K_{ab}K_{cd}] \\
&= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}}\sqrt{h}N[{}^{(3)}R - \frac{1}{4N^2}(h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})(\dot{h}_{ab} - N_{a:b} - N_{b:a})(\dot{h}_{cd} - N_{c:d} - N_{d:c})] \\
&= -\sqrt{h}N\frac{1}{4N^2}(h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})[\delta_{ia}\delta_{jb}(\dot{h}_{cd} - N_{c:d} - N_{d:c}) + \delta_{ic}\delta_{jd}(\dot{h}_{ab} - N_{a:b} - N_{b:a})] \\
&= -\sqrt{h}N\frac{1}{2N}(h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})(\delta_{ia}\delta_{jd}K_{cd} + \delta_{ic}\delta_{jd}K_{ab}) \\
&= -\sqrt{h}\frac{1}{2}(h^{ij}K - K^{ij} + h^{ij}K - K^{ij}) \\
&= -\sqrt{h}(h^{ij}K - K^{ij}) \\
&= \sqrt{h}(K^{ij} - h^{ij}K)
\end{aligned}$$

よって、共役量は

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}(K^{ab} - h^{ab}K)$$

この式によって外部曲率は共役量 π^{ab} に置き換えられます。この定義から共役量 π^{ab} はテンソル密度です。このため、テンソル密度であることを踏まえるために、π^{ab} は $\pi^{ab}/\sqrt{h}$ という形になるように式を組みます。

　これで計量の共役量は求められましたが、ラグランジアン密度から求められる共役量について他に重要な性質があります。それは、ラプス関数とシフトベクトルの共役量が存在しないということです。これは、ラグランジアン密度の中に、この二つの時間微分がいないことからすぐに分かります。つまり

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0\ ,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_a} = 0$$

という式になっています。これは拘束条件に対応します。

　共役量が求められたところで、ハミルトニアン密度を作ります。解析力学と同じようにして (N と N_a の共役量はないので無視します)

$$\mathcal{H} = \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}$$

とします。これによって、力学変数は h_{ab}, π^{ab}, N, N_a と変化します。ラグランジアン密度を

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + N_{a:b} + N_{b:a}\ ,\ K^{ab} = \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{h}} + h^{ab}K\ ,\ K = -\frac{\pi}{2\sqrt{h}}$$

これらを使って、外部曲率を消すように $\dot{h}_{ab}$ と π^{ab} の式に変えると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sqrt{h}N({}^{(3)}R - K^2 + K_{ab}K^{ab}) \\
&= \sqrt{h}N({}^{(3)}R - K^2 + K_{ab}(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{h}} + h^{ab}K) \\
&= \sqrt{h}N({}^{(3)}R - K^2 + (\frac{1}{\sqrt{h}}K_{ab}\pi^{ab} + K^2) \\
&= \sqrt{h}N({}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - N_{a:b} - N_{b:a})\pi^{ab}) \\
&= \sqrt{h}N({}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab}\pi^{ab} - N_{a:b}\pi^{ab} - N_{b:a}\pi^{ab}) \\
&= \sqrt{h}N({}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab}\pi^{ab} - N_{a:b}\pi^{ab} - N_{b:a}\pi^{ba}) \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}(\dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab}) \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - N_{a:b}\pi^{ab} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ab}\pi^{ab} \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - N_{a:b}\pi^{ab} - \frac{1}{2}(2NK_{ab} + N_{a:b} + N_{b:a})\pi^{ab} \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - NK_{ab}\pi^{ab} \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - N(\frac{\pi_{ab}}{\sqrt{h}} + h_{ab}K)\pi^{ab} \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - N(\frac{\pi_{ab}\pi^{ab}}{\sqrt{h}} + \pi K) \quad (\pi = \pi^a{}_a) \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - N\frac{\pi_{ab}\pi^{ab}}{\sqrt{h}} - N\pi K \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - N\frac{\pi_{ab}\pi^{ab}}{\sqrt{h}} + N\frac{\pi^2}{2\sqrt{h}} \\
&= N\sqrt{h}{}^{(3)}R + \dot{h}_{ab}\pi^{ab} - 2N_{a:b}\pi^{ab} - \frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})
\end{aligned}
$$

となるので、ハミルトニアン密度は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - N\sqrt{h}{}^{(3)}R - \dot{h}_{ab}\pi^{ab} + 2N_{a:b}\pi^{ab} + \frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) \\
&= -N\sqrt{h}{}^{(3)}R + 2N_{a:b}\pi^{ab} + \frac{N}{\sqrt{h}}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) \\
&= \sqrt{h}(-N^{(3)}R + \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) + \frac{2}{\sqrt{h}}N_{a:b}\pi^{ab}) \\
&= \sqrt{h}(-N^{(3)}R + \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) + 2(\frac{1}{\sqrt{h}}N_a\pi^{ab})_{:b} - 2N_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b})
\end{aligned}
$$

これの第三項は表面項として落とせるので

$$\mathcal{H} = \sqrt{h}(-^{(3)}RN + \frac{N}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2}) - 2N_a(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b})$$

これが 3+1 分解したときのハミルトニアン密度になります。このハミルトニアン密度を出発点とする正準形式を Arnowitt-Deser-Misner(ADM) 形式と言います。