ゲーデル解

現実的な宇宙を記述している解ではないですが、特殊な性質を持つゲーデル解を扱います。
ここでは計量から分かる性質を求めていきます。
上付きの添え字と累乗の区別をそれほどはっきりさせていないので気をつけてください。

先にここで示すゲーデル (Gödel) 解の主要な性質を言っておくと、一般相対性理論はマッハの原理と矛盾する、大局的な時間座標がない、宇宙は回転している、時間的 (time-like) な閉じた世界線が存在する、というものです。マッハの原理との矛盾はゲーデル解そのものでなく、ゲーデル解が見つかったことによるものです。

ゲーデル解の線素は

$$ds^2 = (dx^0 + e^{\alpha x^1} dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}(dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

と与えられていて、計量は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{\alpha x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{\alpha x^1} & 0 & \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^{-\alpha x^1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-\alpha x^1} & 0 & -2e^{-2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となっています。α は定数です。これが実際にアインシュタイン方程式を満たすことを確かめます。

変分問題は

$$(\frac{ds}{ds})^2 = (\frac{dx^0 + e^{\alpha x^1}dx^2}{ds})^2 - (\frac{dx^1}{ds})^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}(\frac{dx^2}{ds})^2 - (\frac{dx^3}{ds})^2$$

から

$$\delta\int ds = \delta\int[(\frac{dx^0}{ds} + e^{\alpha x^1}\frac{dx^2}{ds})^2 - (\frac{dx^1}{ds})^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}(\frac{dx^2}{ds})^2 - (\frac{dx^3}{ds})^2]ds = \delta\int Fds = 0$$

これをオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}$$

に入れます。ドットは s 微分です。
$\alpha = 0$ では

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^0}(\frac{dx^0}{ds} + e^{\alpha x^1}\frac{dx^2}{ds})^2 = 2\frac{d}{ds}(\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) \\ &\frac{\partial F}{\partial x^0} = 0 \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ では

$$-\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^1}(\frac{dx^1}{ds})^2 = -\frac{d}{ds}\frac{d}{d\dot{x}^1}(\dot{x}^1)^2 = -2\frac{d}{ds}\dot{x}^1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}((\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2)^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2) = 2\alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \alpha e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2$$

$\alpha = 2$ では

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^2}((\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2)^2 - \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2) = \frac{d}{ds}(e^{\alpha x^1}(2\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2))$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} = 0$$

$\alpha = 3$ は

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}^3) = 0$$

よって

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{d}{ds}\dot{x}^1 + \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2 = 0 \tag{1b}$$

$$\frac{d}{ds}(e^{\alpha x^1}(2\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2)) = 0 \tag{1c}$$

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}^3) = 0 \tag{1d}$$

(1a) の s 微分を実行すれば

$$\ddot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\ddot{x}^2 + \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 = 0 \tag{2}$$

(1b) は

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(e^{\alpha x^1}(2\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2)) &= \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1(2\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) + e^{\alpha x^1}(2\ddot{x}^0 + \alpha\dot{x}^1 e^{\alpha x^1}\dot{x}^2 + e^{\alpha x^1}\ddot{x}^2) \\ &= 2e^{\alpha x^1}\ddot{x}^0 + e^{2\alpha x^1}\ddot{x}^2 + 2\alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^1 + 2\alpha e^{2\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 \end{aligned} \tag{3}$$

この (2) を (3) に使えば

$$-2e^{\alpha x^1}\ddot{x}^2 - 2\alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 + e^{\alpha x^1}\ddot{x}^2 + 2\alpha\dot{x}^0\dot{x}^1 + 2\alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 = -e^{\alpha x^1}\ddot{x}^2 + 2\alpha\dot{x}^0\dot{x}^1 = 0$$

これを (2) に入れなおせば

$$\ddot{x}^0 + 2\alpha\dot{x}^0\dot{x}^1 + \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 = 0$$

よって

$$\ddot{x}^0 + 2\alpha\dot{x}^0\dot{x}^1 + \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^1\dot{x}^2 = 0 \tag{4a}$$

$$\ddot{x}^1 + \alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2 = 0 \tag{4b}$$

$$\ddot{x}^2 - 2\alpha e^{-\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^1 = 0 \tag{4c}$$

$$\ddot{x}^3 = 0 \tag{4d}$$

これらと測地線方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

からクリストッフェル記号を求めます。$\alpha = 0$ では

$$\ddot{x}^0 + \left\{\begin{array}{c}0\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

(4a) から

$$\ddot{x}^0 + \left\{\begin{array}{c}0\\ 0\ 1\end{array}\right\}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 1\ 0\end{array}\right\}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 1\ 2\end{array}\right\}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left\{\begin{array}{c}0\\ 2\ 1\end{array}\right\}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} = 0$$

となるので

$$\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\ 1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 1\ 0\end{array}\right\} = \alpha\ ,\ \left\{\begin{array}{c}0\\ 1\ 2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}0\\ 2\ 1\end{array}\right\} = \frac{\alpha}{2}e^{\alpha x^1}$$

$\alpha = 1$ では (4b) から

$$\ddot{x}^1 + \left\{\begin{array}{c}1\\ 0\ 2\end{array}\right\}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left\{\begin{array}{c}1\\ 2\ 0\end{array}\right\}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \left\{\begin{array}{c}1\\ 2\ 2\end{array}\right\}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

なので

$$\left\{\begin{array}{c}1\\ 0\ 2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}1\\ 2\ 0\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha x^1}\ ,\ \left\{\begin{array}{c}1\\ 2\ 2\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha x^1}$$

$\alpha = 2$ では (4c) から

$$\ddot{x}^2 + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} \frac{dx^0}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} \frac{dx^1}{ds}\frac{dx^0}{ds} = 0$$

なので

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} = -\alpha e^{-\alpha x^1}$$

クリストッフェル記号の残りの成分は 0 です。まとめれば

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} = \alpha\ ,\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2\ 1 \end{array} \right\} = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha x^1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha x^1}\ ,\ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha x^1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} = -\alpha e^{-\alpha x^1}$$

次にリッチテンソルを求めます。リッチテンソルは

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{array} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \mu\ \alpha \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ \mu\ \nu \end{array} \right\} \tag{5}$$

となっているので、これに求めたクリストッフェル記号を入れます。α は定数で、クリストッフェル記号は x^1 しか含んでいないので、第一項で消えない成分は

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|0} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|1} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|2} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|2}$$

から、(μ, ν) に対して

$$(0,2): \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}_{|0} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}_{|1} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}_{|2} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}_{|2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}_{|1} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x^1} e^{\alpha x^1} = \frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha x^1}$$

$$(2,2): \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}_{|0} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}_{|1} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}_{|2} + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}_{|2} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}_{|1} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial x^1} e^{2\alpha x^1} = \alpha^2 e^{2\alpha x^1}$$

(5) の第二項は全て 0 になるので消えます。(5) の第三項ではクリストッフェル記号が消えない μ, ν の組み合わせは

$$(0,0): \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 0\ \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0\ 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\} = -\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = -\alpha^2$$

$$(2,2): \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 2\ \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2\ 1 \end{array} \right\} = \frac{\alpha^2}{4} e^{2\alpha x^1} + \frac{\alpha^2}{4} e^{2\alpha x^1} = \frac{\alpha^2}{2} e^{2\alpha x^1}$$

(5) の第四項では

$$
\begin{aligned}
(0,2):&\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 0\ 2 \end{array} \right\}=\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 0 \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0\ 2 \end{array} \right\}=\frac{\alpha^2}{2}e^{\alpha x^1} \\
(2,2):&\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 2\ 2 \end{array} \right\}=\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1\ 0 \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 2 \end{array} \right\}=\frac{\alpha^2}{2}e^{2\alpha x^1}
\end{aligned}
$$

よって、リッチテンソルの成分は

$$R_{00}=\alpha^2\ ,\ R_{22}=\alpha^2 e^{2\alpha x^1}\ ,\ R_{02}=R_{20}=\alpha^2 e^{\alpha x^1} \tag{6}$$

となります (残りは 0)。これからリッチスカラーはすぐに

$$
\begin{aligned}
R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}&=g^{00}R_{00}+g^{22}R_{22}+g^{02}R_{02}+g^{20}R_{20} \\
&=-\alpha^2-2\alpha^2+2\alpha^2+2\alpha^2 \\
&=\alpha^2
\end{aligned}
$$

と求まります。

次はエネルギー・運動量テンソルの形です。これは完全流体を使うことにします。そして、共動座標を使います。つまり、宇宙に分布している物質は静止しているとします。そして、エネルギー・運動量テンソル T^{00} だけを持つとして密度 ρ によって

$$T^{\mu\nu}=\rho u^\mu u^\nu=\rho\delta^\mu_0\delta^\nu_0$$

とします。u^μ は静止している物質の 4 元速度 $u^\mu=(1,0,0,0)$ です。

下付きにすれば

$$T_{\mu\nu}=g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta}=g_{0\mu}g_{0\nu}T^{00}$$

から

$$T_{00}=\rho\ ,\ T_{22}=\rho e^{2\alpha x^1}\ ,\ T_{02}=T_{20}=\rho e^{\alpha x^1} \tag{7}$$

(6) と (7) を比較してみれば

$$R_{\mu\nu}=\frac{\alpha^2}{\rho}T_{\mu\nu} \tag{8}$$

となっていることが分かります。

しかし、アンシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T_{\mu\nu}$$

となっていて (κ は重力定数)、リッチスカラー部分が余計です。そのため、ゲーデル解は宇宙項を含めたアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}(\frac{1}{2}R + \Lambda) = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T_{\mu\nu} \tag{9}$$

を満たすとします。実際に、Λ と α を

$$\Lambda = -\frac{\alpha^2}{2} \ , \ \alpha^2 = \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho$$

とすることで、(8) となります。よって、ゲーデル解は宇宙項ありのアインシュタイン方程式の解です。ゲーデル解は時間依存していないので、膨張するといったことは言えません。

ゲーデル解による性質を求めていきます。まず、計量を見てすぐに分かるのは特異点を持っていないことです。このため特異点を気にせずに運動を調べることが出来ます。

次に分かることは、ゲーデル宇宙 (ゲーデル解による宇宙) は一様ということです。一様性は、b を定数として

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}) : x'^0 = x^0 + b \ , \ x'^i = x^i \qquad (i = 1, 2, 3) \\
&(\mathrm{ii}) : x'^2 = x^2 + b \ , \ x'^i = x^i \qquad (i \neq 2) \\
&(\mathrm{iii}) : x'^3 = x^3 + b \ , \ x'^i = x^i \qquad (i \neq 3) \\
&(\mathrm{iv}) : x'^0 = x^0 \ , \ x'_1 = x_1 + b \ , \ x'_2 = e^{-b}x_2 \ , \ x'_3 = x_3
\end{aligned}$$

という 4 つの変換に対して不変だからです。このため、空間上のある点は他の点と同じになるので、一様です。

ゲーデル解の性質でなく、一般相対性理論における性質ですが、同じエネルギー・運動量テンソルに対して異なる解があることが分かります。ロバートソン・ウォーカー解において、$T^{00} = \rho,\ T^{ij} = 0$ とすれば今と同じエネルギー・運動量テンソルによる計量を作ることが出来ます。そして、ゲーデル解は時間依存していないので時間依存性も外して静的にします (アインシュタインの静的な宇宙モデル)。しかし、ロバートソン・ウォーカー計量の形 (アインシュタイン方程式) から分かるように明らかにゲーデル解と異なっています (例えばゲーデル解は球対称になっていない)。

このように、同じエネルギー・運動量テンソルに対してアインシュタイン方程式 (9) は 2 つの解を持ちます。このため、一般相対性理論において、宇宙に分布する物質は宇宙の幾何学を一意的に決定しないことになります。これはマッハの原理の考え方と矛盾しています。なので、一般相対性理論ではマッハの原理は条件付きで成立するものです。

次の性質を見るために 3 次元超曲面

$$F(x^\mu) = \lambda$$

を考えます（「超曲面」参照)。超曲面の法線は $F_{|\alpha}$ によって与えられます。次に任意のベクトル v_μ から反対称テンソル

$$a_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3!}(v_\mu(v_{\nu|\lambda} - v_{\lambda|\nu}) + v_\nu(v_{\lambda|\mu} - v_{\mu|\lambda}) + v_\lambda(v_{\mu|\nu} - v_{\nu|\mu})) \qquad (v_{\nu|\lambda} - v_{\lambda|\nu} = v_{\nu||\lambda} - v_{\lambda||\nu})$$

を作ります。$v_\mu = F_{|\mu}$ とすれば $F_{|\mu|\nu} = F_{|\nu|\mu}$ なので $a_{\mu\nu\lambda} = 0$ です。よって、超曲面と直交しているなら $a_{\mu\nu\lambda} = 0$ と言えます。

ゲーデル宇宙において静止している物質の 4 元速度 $u^\mu = (1,0,0,0)$ から $a_{\mu\nu\lambda}$ を求めてみます。u_μ は

$$u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = g_{\mu 0}u^0 = (1, 0, e^{\alpha x^1}, 0)$$

なので、$u_{\mu|\nu}$ は

$$\begin{aligned} u_{2|1} &= \alpha e^{\alpha x^1} \\ u_{\mu|\nu} &= 0 \quad\ (\mu \neq 2, \nu \neq 1) \end{aligned}$$

よって、$\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2$ のとき $a_{\mu\nu\lambda}$ は 0 でなく

$$a_{012} = \frac{1}{3!}(v_0(v_{1|2} - v_{2|1}) + v_1(v_{2|0} - v_{0|2}) + v_2(v_{0|1} - v_{1|0})) = -\frac{1}{3!}v_0 v_{2|1} = -\frac{1}{6}\alpha e^{\alpha x^1}$$

a_{012} は反対称テンソルなので、偶置換で $-\alpha e^{\alpha x^1}/6$、奇置換で $+\alpha e^{\alpha x^1}/6$ となります。これから、u_μ は $a_{\mu\nu\lambda} = 0$ とならないことが分かります。よって、ゲーデル宇宙において x^0 方向の世界線 (静止している物質の世界線) と直交する 3 次元超曲面が存在しません。これは明らかにロバートソン・ウォーカー解とは異なった性質です。この性質のためにロバートソン・ウォーカー解での固有時間に対応する時間座標 t と同じものを定義できません。つまり、ゲーデル宇宙では大局的な時間座標を与えられません。

計量を座標変換してみます。変換の過程は下の補足に回して結果を書けば

$$ds^2 = \frac{4}{\alpha^2}(dt^2 - dr^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r)d\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r d\phi dt - dz^2)$$

となります。これは t, r, ϕ による円筒座標になっています。実際に、平坦空間において z 軸周りで角速度 ω で回転しているときの線素

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - 2\omega r^2 d\phi dt - dz^2$$

と同じ形です。このことから、ゲーデル宇宙はある角速度で回転していることが予想できます。また、g_{ij} は ϕ に依存していないので、ゲーデル解は回転対称性を持っています。

線素に対して、$t = z = 0$ とし、r を適当な定数 $\rho > 0$ とすれば

$$ds^2 = \frac{4}{\alpha^2}(\sinh^4 \rho - \sinh^2 \rho)d\phi^2$$

sinh に対して $\sinh^4 \rho - \sinh^2 \rho > 0$ を要求すると $\sinh \rho > 0$ なので

$$\begin{aligned} \sinh \rho &> 1 \\ \rho &> \operatorname{ar\,sinh} 1 \\ \rho &> \log[1 + \sqrt{2}] \end{aligned}$$

よって、$\rho > \log[1+\sqrt{2}]$ のとき $ds^2 > 0$ なので、時間的 (time-like) な世界線 (大雑把には 4 次元空間上の粒子の軌道) となります。そして、円筒座標との対応から、$t=0, R=\rho, z=0$ による円を描きます。つまり、ゲーデル宇宙には時間的な閉じた世界線が存在出来ます。時間的な世界線が閉じていると、空間上の出発点にいつか戻ってくることが出来ます（一様性のためにどこでも可能)。

$r=\rho,\ t=-\alpha\phi,\ z=0$ としてみても $(\alpha>0)$、$\sinh^4 r - \sinh^2 r > 0$ を超えない程度に α が小さければ時間的なままです。この世界線上に 2 つの点 P_1, P_2 を取り、P_1 $(\phi=0)$ から出発して ,P_2 $(\phi=2\pi)$ に進むとします $(0\le\phi\le 2\pi)$。そうすると、P_1 を出発点としているのに P_1 のほうが P_2 より後の時間にいます。つまり、過去に向かっています。

こういった世界線の性質から、ゲーデル解は一般相対性理論において時間旅行の可能性を示している例の 1 つになっています (時間的な閉じた世界線はカー解、富松・佐藤解などでも存在する)。ただし、時間的な閉じた世界線となる測地線 (自由落下の軌道) はゲーデル宇宙に存在しません (測地線に沿った時間旅行はできない)。簡単に言えば、時間的な測地線では r は $\log[1+\sqrt{2}]$ に到達できないからです。

ここから後は、ゲーデル解での回転について見ていきます。そのために

$$\Omega^\beta = \frac{c\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}}a_{\mu\nu\lambda}$$

というベクトルを作ります $(\epsilon^{0123}=+1)$。$\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}/\sqrt{-g}$ はレヴィ・チビタテンソルです。これはミンコフスキー時空では

$$\Omega^\beta = c\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}a_{\mu\nu\lambda} \qquad (\sqrt{-g}=1)$$

このままミンコフスキー時空として Ω^β を計算してみます。$\beta=0$ は、ローマ文字の添え字を $1,2,3$ とし、$\Omega^\mu = (\Omega^0, \boldsymbol{\Omega}), v^\mu=(v^0,\boldsymbol{v})$ とすれば

$$\begin{aligned}
\Omega^0 = c\epsilon^{0\mu\nu\lambda}a_{\mu\nu\lambda} = c\epsilon^{ijk}a_{ijk} &= \frac{c}{3!}\epsilon^{ijk}(v_i(v_{j|k}-v_{k|j})+v_j(v_{k|i}-v_{i|k})+v_k(v_{i|j}-v_{j|i}))\\
&= \frac{c}{3!}(v_i(\epsilon^{ijk}v_{j|k}+\epsilon^{ikj}v_{k|j})+v_j(\epsilon^{jki}v_{k|i}+\epsilon^{jik}v_{i|k})+v_k(\epsilon^{kij}v_{i|j}+\epsilon^{kji}v_{j|i}))\\
&= \frac{c}{3!}(2v_i\epsilon^{ijk}v_{j|k}+2v_j\epsilon^{jki}v_{k|i}+2v_k\epsilon^{kij}v_{i|j})\\
&= \frac{6c}{3!}v_i\epsilon^{ijk}v_{j|k}\\
&= c(v_1\epsilon^{123}\partial_3 v_2 + v_1\epsilon^{132}\partial_2 v_3+\cdots)\\
&= c(-v^1(\partial_2 v^3-\partial_3 v^2)+\cdots)\\
&= c(-v^1(\nabla\times\boldsymbol{v})^1+\cdots) \qquad (\partial_\mu=(\partial_0,\nabla))\\
&= -c\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}) \qquad (\epsilon^{ijk}v_{j|k}=(\nabla\times\boldsymbol{v})^i)
\end{aligned}$$

1 行目で $\epsilon^{0\mu\nu\lambda}$ から μ,ν,λ は 0 を取れないので、ϵ^{ijk} と書いています。$\beta=i$ では

$$
\begin{aligned}
\Omega^i &= c\epsilon^{i\mu\nu\lambda}a_{\mu\nu\lambda} \\
&= \frac{c}{3!}\epsilon^{i\mu\nu\lambda}(v_\mu(v_{\nu|\lambda}-v_{\lambda|\nu})+v_\nu(v_{\lambda|\mu}-v_{\mu|\lambda})+v_\lambda(v_{\mu|\nu}-v_{\nu|\mu})) \\
&= \frac{c}{3!}(v_\mu(\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}-\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\lambda|\nu})+v_\nu(\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\lambda|\mu}-\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\mu|\lambda})+v_\lambda(\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\mu|\nu}-\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\nu|\mu})) \\
&= \frac{c}{3!}(v_\mu(\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+\epsilon^{i\mu\lambda\nu}v_{\lambda|\nu})+v_\nu(\epsilon^{i\nu\lambda\mu}v_{\lambda|\mu}+\epsilon^{i\nu\mu\lambda}v_{\mu|\lambda})+v_\lambda(\epsilon^{i\lambda\mu\nu}v_{\mu|\nu}+\epsilon^{i\lambda\nu\mu}v_{\nu|\mu})) \\
&= \frac{c}{3!}(2v_\mu\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+2v_\nu\epsilon^{i\nu\lambda\mu}v_{\lambda|\mu}+2v_\lambda\epsilon^{i\lambda\mu\nu}v_{\mu|\nu}) \\
&= cv_\mu\epsilon^{i\mu\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} \\
&= c(v_0\epsilon^{i0\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+v_1\epsilon^{i1\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+v_2\epsilon^{i2\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+v_3\epsilon^{i3\nu\lambda}v_{\nu|\lambda})
\end{aligned}
$$

第一項は

$$v_0\epsilon^{i0\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = -v_0\epsilon^{0i\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = -v_0\epsilon^{0ijk}v_{j|k} = -v_0(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

第二項は

$$
\begin{aligned}
v_1\epsilon^{i1\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = v_1\epsilon^{i10\lambda}v_{0|\lambda}+v_1\epsilon^{i1j\lambda}v_{j|\lambda} &= v_1\epsilon^{i10j}v_{0|j}+v_1\epsilon^{i1j0}v_{j|0}+v_1\epsilon^{i1jk}v_{j|k} \\
&= -v_1\epsilon^{01ij}v_{0|j}+v_1\epsilon^{01ij}v_{j|0} \\
&= -v_1\epsilon^{01ij}(v_{0|j}-v_{j|0}) \qquad (10a)
\end{aligned}
$$

同様に第三項と第四項は

$$v_2\epsilon^{i2\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = v_2\epsilon^{0i2j}(v_{0|j}-v_{j|0}) \qquad (10b)$$

$$v_3\epsilon^{i3\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = -v_3\epsilon^{0ij3}(v_{0|j}-v_{j|0}) \qquad (10c)$$

$i=1$ とすれば (10a) は

$$v_1\epsilon^{11\nu\lambda}v_{\nu|\lambda} = 0$$

(10b),(10c) は

$$
\begin{aligned}
v_2\epsilon^{12\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}+v_3\epsilon^{13\nu\lambda}v_{\nu|\lambda}&=v_2\epsilon^{012j}(v_{0|j}-v_{j|0})-v_3\epsilon^{01j3}(v_{0|j}-v_{j|0})\\
&=v_2\epsilon^{0123}(v_{0|3}-v_{3|0})-v_3\epsilon^{0123}(v_{0|2}-v_{2|0})\\
&=v_2(v_{0|3}-v_{3|0})-v_3(v_{0|2}-v_{2|0})\\
&=v_2\partial_3v_0-v_2\partial_0v_3-v_3\partial_2v_0+v_3\partial_0v_2\\
&=(v_2\partial_3-v_3\partial_2)v_0-(v_2\partial_0v_3-v_3\partial_0v_2)\\
&=\ -(v^2\partial_3-v^3\partial_2)v_0-(v^2\partial_0v^3-v^3\partial_0v^2)\\
&=\ -(\boldsymbol{v}\times\nabla)^1v_0-(\boldsymbol{v}\times\partial_0\boldsymbol{v})^1
\end{aligned}
$$

よって

$$
\boldsymbol{\Omega}=-cv_0(\nabla\times\boldsymbol{v})-c(\boldsymbol{v}\times\nabla)v_0-c(\boldsymbol{v}\times\partial_0\boldsymbol{v})
$$

となります。

これに、3 次元直交座標 (x,y,z) において角速度 ω で z 軸周りで回転している時の v^μ を入れてみます。v^0 は定数とし、v^i は通常通り

$$
\boldsymbol{v}=\frac{1}{c}(\omega y,-\omega x,0)
$$

とします。そうすると

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{c}(0,0,-2\omega)\\
&\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0\\
&(\boldsymbol{v}\times\nabla)v_0=0\\
&\boldsymbol{v}\times\partial_0\boldsymbol{v}=\frac{1}{c^2}(0,0,-\omega^2y\partial_0x+\omega x\partial_0y)=0
\end{aligned}
$$

から

$$
\Omega^0=0\ ,\ \boldsymbol{\Omega}=(0,0,2\omega)
$$

となり、$\boldsymbol{\Omega}$ に角速度が入ってきます。

今度はゲーデル解で行ってみます。ゲーデル宇宙において静止している物質の速度 $u^\mu=(1,0,0,0)$ から

$$
\begin{aligned}
\Omega^\beta &= \frac{c\epsilon^{\beta\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}} a_{\mu\nu\lambda} \\
&= \frac{c}{\sqrt{-g}}(\epsilon^{\beta 012}a_{012} + \epsilon^{\beta 021}a_{021} + \epsilon^{\beta 102}a_{102} + \epsilon^{\beta 120}a_{120} + \epsilon^{\beta 201}a_{201} + \epsilon^{\beta 210}a_{210}) \\
&= \frac{c}{\sqrt{-g}}\frac{1}{6}\alpha e^{\alpha x^1}(-\epsilon^{\beta 012} + \epsilon^{\beta 021} + \epsilon^{\beta 102} - \epsilon^{\beta 120} - \epsilon^{\beta 201} + \epsilon^{\beta 210})
\end{aligned}
$$

$\beta = 3$ 以外は 0 になるので

$$
-\epsilon^{3012} + \epsilon^{3021} + \epsilon^{3102} - \epsilon^{3120} - \epsilon^{3201} + \epsilon^{3210} = 1+1+1+1+1+1 = 6
$$

計量の行列式は余因子を使えば

$$
\begin{aligned}
g = \det g_{\mu\nu} &= g_{00}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + g_{02}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ e^{\alpha x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}e^{2\alpha x^1} - e^{2\alpha x^1} \\
&= -\frac{1}{2}e^{2\alpha x^1}
\end{aligned}
$$

と求まります。よって、Ω^β は

$$
\Omega^\beta = \sqrt{2}ce^{-\alpha x^1}\alpha e^{\alpha x^1}(0,0,0,1) = (0,0,0,\sqrt{2}c\alpha)
$$

これは 3 次元直交座標での z 軸周りの回転の形と同じです。つまり、ゲーデル宇宙における物質（ゲーデル宇宙に張り付いてる物質）は定数の角速度 $\omega = \sqrt{2}c\alpha$ を持っていると考えられます。

次の問題は何に対して回転しているのかです。そのために、ゲーデル宇宙における粒子の運動を見てみます。運動方程式はすでに求めている (1a)〜(1d) です。積分すれば

$$
\dot{x}^0 + e^{\alpha x^1}\dot{x}^2 = a \tag{11a}
$$

$$
\dot{x}^1 + \alpha b x^2 = d \tag{11b}
$$

$$
e^{\alpha x^1}(\dot{x}^0 + \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) = b \tag{11c}
$$

$$
\dot{x}^3 = l \tag{11d}
$$

a, b, d, l は定数です。(11c) は書き換えれば

$$
e^{\alpha x^1}(\dot{x}^0 + \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) = e^{\alpha x^1}((a - e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) + \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) = e^{\alpha x^1}(a - \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}\dot{x}^2) = b \tag{12}
$$

(11b) は、(11c) が

$$\dot{x}^0 + \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}\dot{x}^2 = be^{-\alpha x^1}$$

$$\dot{x}^0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}e^{\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2 = be^{-\alpha x^1}\dot{x}^2$$

$$\alpha e^{\alpha x^1}\dot{x}^0\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha x^1}(\dot{x}^2)^2 = \alpha b\dot{x}^2$$

となることから、(1b) を

$$\frac{d}{ds}\dot{x}^1 + \alpha b\dot{x}^2 = 0$$

と書けるので、積分すれば

$$\frac{d}{ds}(\dot{x}^1 + \alpha bx^2) = 0$$

$$\dot{x}^1 + \alpha bx^2 = d$$

として求められます。

もし静止しているなら $\dot{x}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ なので、A, B, C を定数として $x^\mu = (s, A, B, C)$ となります。なので、この条件から

$$a = 1\ ,\ l = 0\ ,\ b = e^{\alpha A}\ ,\ d = \alpha bB$$

さらに、$s = 0$ の初期条件として $x^i = (0, 0, 0)$ とすれば、(11a)〜(11d) は

$$\dot{x}^0 + \dot{x}^2 = 1\ ,\ \dot{x}^1 = d\ ,\ \dot{x}^0 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = b\ ,\ \dot{x}^3 = 0$$

よって、$\dot{x}^\mu$ の初期条件は

$$\dot{x}^0 = 1\ ,\ \dot{x}^1 = \beta\ ,\ \dot{x}^2 = 0\ ,\ \dot{x}^3 = 0$$

となります。β は定数です。これらから $a = b = 1,\ d = \beta$ です。

運動方程式をまともに解かずに、近似的に解きます。近似解として、$\alpha = 0$ の解に α が微小だとしたものを加えたものを作ります。$\alpha = 0$ では exp は全て 1 になるので、(11a)〜(11d) は

$$\dot{x}^0 + \dot{x}^2 = 1\ ,\ \dot{x}^0 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = 1\ ,\ \dot{x}^1 = \beta\ ,\ \dot{x}^3 = 0$$

これから、すぐに $\alpha = 0$ の解は

$$x^\mu_{(0)} = (s, \beta s, 0, 0)$$

と分かります。なります。次に α の 1 次までを取り出します。単純に (11a)〜(11d) ((12)) の exp を展開すればいいだけなので

$$\dot{x}^0+\dot{x}^2+\alpha x^1\dot{x}^2=1$$

$$\dot{x}^1+\alpha x^2=\beta$$

$$\dot{x}^2-2\alpha x^1(1-\dot{x}^2)=0$$

$$\dot{x}^3=0$$

近似解の形を $x^\mu=x^\mu_{(0)}+\alpha x^\mu_{(1)}=(s+\alpha f^0,\beta s+\alpha f^1,\alpha f^2,\alpha f^3)$ として、これらに入れて α の 1 次までを拾えば

$$\dot{f}^0+\dot{f}^2=0\ ,\ \dot{f}^1=0\ ,\ \dot{f}^2-2\beta s=0\ ,\ \dot{f}^3=0$$

これらから、C_1,C_2,C_3,C_4 を定数として

$$f^0+f^2=C_1\ ,\ f^1=C_2\ ,\ f^2=\beta s^2+C_3\ ,\ f^3=C_4$$

そして、$x^\mu_{(0)}+\alpha x^\mu_{(1)}$ に初期条件を入れると $x^\mu_{(0)},\dot{x}^\mu_{(0)}$ だけで初期条件を満たしているために、$f^\mu,\dot{f}^\mu$ の初期条件は 0 です。なので、$C_1=C_2=C_3=C_4=0$ です。

よって

$$x^\mu_{(1)}=(-\beta s^2,0,\beta s^2,0)$$

というわけで、α の 1 次までで

$$x^\mu=x^\mu_{(0)}+\alpha x^\mu_{(1)}=(s-\alpha\beta s^2,\beta s,\alpha\beta s^2,0)$$

となります。

今は初期条件として、$s=0$ で $x^i=(0,0,0)$ としています。なので、運動している粒子が x^1 方向に直進するなら適当な位置 $(A,0,0)$ につくはずです。実際に $\alpha=0$ での $x^\mu_{(0)}=(s,\beta s,0,0)$ は s の経過によって A まで直進します。しかし、α の 1 次まで拾った近似解では $x^\mu\simeq(s-\alpha\beta s^2,\beta s,\alpha\beta s^2,0)$ となり、$(A,0,0)$ に向かって直進せずに曲がってしまいます。

このようにゲーデル宇宙において粒子の軌道（測地線）は直進せずに曲がります。つまり、今の結果と角速度はどこでも ω であることを合わせれば、ゲーデル宇宙の物質は初期条件 $\dot{x}^1\neq 0$ の粒子の軌道に対して剛体的に回転していると言えます。逆に言えば、軌道の接方向はゲーデル宇宙の物質に対して回転しているとも言えます。軌道の接方向は compass of inertia とも呼ばれますが、おそらく軌道に置いてあるジャイロコンパスやジャイロスコープに関して回転していると言った方が分かりやすいです。

・補足

座標変換を行います。元の形は

$$ds^2 = (dx^0 + e^{\alpha x^1} dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{1}{2} e^{2\alpha x^1} (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

これに対して

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi}{2} + 2^{-3/2}(x^0 - 2t) = \arctan(e^{-2R} \tan\frac{\phi}{2}) \quad (\tan(\frac{\phi}{2} + 2^{-3/2}(x^0 - 2t)) = e^{-2R} \tan\frac{\phi}{2}) \\
&e^{\alpha x^1} = \cosh 2R + \cos\phi \sinh 2R \\
&\alpha e^{\alpha x^1} x^2 = \sqrt{2} \sin\phi \sinh 2R \\
&x^3 = z
\end{aligned}$$

という変換を行います。r にすると見づらかったので R と書いています。まず、前段階として (この変換はしなくても手間はそれほど変わりません)

$$x^0 = x^0\ ,\ \alpha x^1 = -\log[\alpha y]\ ,\ x^2 = \sqrt{2} x\ ,\ x^3 = z$$

と変換すれば

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^0 + e^{\alpha x^1} dx^2)^2 - (dx^1)^2 - \frac{1}{2} e^{2\alpha x^1} (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \\
&= (dx^0 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha y} dx)^2 - \frac{1}{(\alpha y)^2} dy^2 - \frac{1}{(\alpha y)^2} dx^2 - dz^2 \quad (dx^1 = -\frac{1}{\alpha y} dy) \\
&= (dx^0 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha y} dx)^2 - \frac{1}{(\alpha y)^2}(dy^2 + dx^2) - dz^2
\end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi}{2} + 2^{-3/2}(x^0 - 2t) = \arctan(e^{-2R} \tan\frac{\phi}{2}) \\
&y = \alpha^{-1}(\cosh 2R + \cos\phi \sinh 2R)^{-1}\ ,\ x = y \sin\phi \sinh 2R
\end{aligned}$$

とすれば、同じ変換になります。実際に

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha x^1} = (\alpha y)^{-1} = \cosh 2R + \cos\phi \sinh 2R \\
&\alpha e^{\alpha x^1} x^2 = \sqrt{2} \alpha x e^{\alpha x^1} = \sqrt{2} \sin\phi \sinh 2R
\end{aligned}$$

となっています。ただし、これだと t, z の次元が R, ϕ と異なるので、後でそろえます。

y は微分すれば

$$
\begin{aligned}
dy = &-dR(2\sinh 2R + 2\cos\phi\cosh 2R)(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R)^{-2} \\
&+ d\phi\sin\phi\sinh 2R(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R)^{-2} \\
= &-2\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR(\sinh 2R + \cos\phi\cosh 2R) + (\alpha y)^2 d\phi\sin\phi\sinh 2R
\end{aligned}
$$

2 乗して

$$
\begin{aligned}
dy^2 = &\,4\alpha^{-2}(\alpha y)^4 dR^2(\sinh 2R + \cos\phi\cosh 2R)^2 + \alpha^{-2}(\alpha y)^4 d\phi^2\sin^2\phi\sinh^2 2R \\
&-4\alpha^{-2}(\alpha y)^4 dRd\phi(\sinh 2R + \cos\phi\cosh 2R)\sin\phi\sinh 2R \\
= &\,4\alpha^{-2}(\alpha y)^4\big(dR^2(\sinh^2 2R + \cos^2\phi\cosh^2 2R + 2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R) + \frac{1}{4}d\phi^2\sin^2\phi\sinh^2 2R \\
&-dRd\phi(\sin\phi\sinh^2 2R + \sin\phi\cos\phi\cosh 2R\sinh 2R)\big)
\end{aligned}
$$

x では

$$
\begin{aligned}
x = &\,\alpha^{-1}\frac{\sin\phi\sinh 2R}{\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R} \\
dx = &\,\alpha^{-1}dR\left(\frac{2\sin\phi\cosh 2R}{\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R} - \frac{2\sin\phi\sinh 2R(\sinh 2R + \cos\phi\cosh 2R)}{(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R)^2}\right) \\
&+\alpha^{-1}d\phi\left(\frac{\cos\phi\sinh 2R}{\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R} - \frac{\sin\phi\sinh 2R(-\sin\phi\sinh 2R)}{(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R)^2}\right) \\
= &\,\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR(2\sin\phi\cosh 2R(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R) - 2\sin\phi\sinh 2R(\sinh 2R + \cos\phi\cosh 2R)) \\
&+\alpha^{-1}(\alpha y)^2 d\phi(\cos\phi\sinh 2R(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R) - \sin\phi\sinh 2R(-\sin\phi\sinh 2R)) \\
= &\,\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR(2\sin\phi\cosh^2 2R + 2\sin\phi\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R - 2\sin\phi\sinh^2 2R - 2\sin\phi\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R) \\
&+\alpha^{-1}(\alpha y)^2 d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \cos^2\phi\sinh^2 2R + \sin^2\phi\sinh^2 2R) \\
= &\,\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR(2\sin\phi\cosh^2 2R - 2\sin\phi\sinh^2 2R) + \alpha^{-1}(\alpha y)^2 d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R) \\
= &\,2\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR\sin\phi + \alpha^{-1}(\alpha y)^2 d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R) \qquad (\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1)
\end{aligned}
$$

2 乗して

$$
\begin{aligned}
dx^2 = &\,4\alpha^{-2}(\alpha y)^4 dR^2\sin^2\phi + \alpha^{-2}(\alpha y)^4 d\phi^2(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R)^2 \\
&+4\alpha^{-2}(\alpha y)^4 dRd\phi\sin\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R) \\
= &\,4\alpha^{-2}(\alpha y)^4\big(dR^2\sin^2\phi + \frac{1}{4}d\phi^2(\cos^2\phi\sinh^2 2R\cosh^2 2R + \sinh^4 2R + 2\cos\phi\sinh^3 2R\cosh 2R) \\
&+dRd\phi(\sin\phi\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sin\phi\sinh^2 2R)\big)
\end{aligned}
$$

よって、dy^2+dx^2 は

$$
\begin{aligned}
&dy^2+dx^2\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4\big(dR^2(\sinh^2 2R+\cos^2\phi\cosh^2 2R+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R)\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2\sin^2\phi\sinh^2 2R-dRd\phi(\sin\phi\sinh^2 2R+\sin\phi\cos\phi\cosh 2R\sinh 2R)\big)\\
&\quad+4\alpha^{-2}(\alpha y)^4\big(dR^2\sin^2\phi+\frac{1}{4}d\phi^2(\cos^2\phi\sinh^2 2R\cosh^2 2R+\sinh^4 2R+2\cos\phi\sinh^3 2R\cosh 2R)\\
&\quad+dRd\phi(\sin\phi\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R+\sin\phi\sinh^2 2R)\big)\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[dR^2(\sinh^2 2R+\cos^2\phi\cosh^2 2R+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R+\sin^2\phi)\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2(\sin^2\phi\sinh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^2 2R\cosh^2 2R+\sinh^4 2R+2\cos\phi\sinh^3 2R\cosh 2R)]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[dR^2(\sinh^2 2R+\cos^2\phi(1+\sinh^2 2R)+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R+\sin^2\phi)\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2(\sin^2\phi\sinh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^2 2R(1+\sinh^2 2R)+\sinh^4 2R+2\cos\phi\sinh^3 2R\cosh 2R)]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[dR^2(1+\sinh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^2 2R+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R)\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2(\sinh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^4 2R+\sinh^4 2R+2\cos\phi\sinh^3 2R\cosh 2R)]
\end{aligned}
$$

$\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R$ の項を αy で書けるように変形させて

$$
\begin{aligned}
&dy^2+dx^2\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[dR^2(1+\sinh^2 2R-\cosh^2 2R+\cosh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^2 2R+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R)\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2(\sinh^2 2R+\sinh^4 2R-\sinh^2 2R\cosh^2 2R+\sinh^2 2R(\cosh^2 2R+\cos^2\phi\sinh^2 2R+2\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R))]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[dR^2(1+\sinh^2 2R-\cosh^2 2R+(\alpha y)^{-2})\\
&\quad+\frac{1}{4}d\phi^2(\sinh^2 2R+\sinh^4 2R-\sinh^2 2R\cosh^2 2R+(\alpha y)^{-2}\sinh^2 2R)]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[(\alpha y)^{-2}dR^2+\frac{1}{4}d\phi^2(\sinh^2 2R(1-\cosh^2 2R)+\sinh^4 2R+(\alpha y)^{-2}\sinh^2 2R)]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[(\alpha y)^{-2}dR^2+\frac{1}{4}d\phi^2(-\sinh^4 2R+\sinh^4 2R+(\alpha y)^{-2}\sinh^2 2R)]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^4[(\alpha y)^{-2}dR^2+\frac{1}{4}(\alpha y)^{-2}d\phi^2\sinh^2 2R]\\
&=4\alpha^{-2}(\alpha y)^2[dR^2+\frac{1}{4}d\phi^2\sinh^2 2R]
\end{aligned}
$$

双曲線関数の加法定理を使って

$$
\begin{aligned}
dy^2 + dx^2 &= 4\alpha^{-2}(\alpha y)^2(dR^2 + d\phi^2 \sinh^2 R \cosh^2 R) \qquad (\sinh(\theta_1+\theta_2) = \sinh\theta_1\cosh\theta_2 + \cosh\theta_1\sinh\theta_2) \\
&= 4\alpha^{-2}(\alpha y)^2(dR^2 + d\phi^2 \sinh^2 R(1+\sinh^2 R)) \\
&= 4\alpha^{-2}(\alpha y)^2(dR^2 + d\phi^2(\sinh^2 R + \sinh^4 R))
\end{aligned} \tag{13}
$$

x^0 の微分では

$$
\frac{d}{d\theta}\arctan\theta = (1+\tan^2\theta)^{-1}
$$

から

$$
\begin{aligned}
dx^0 &= 2dt + 2^{3/2}dR(1+e^{-4R}\tan^2\frac{\phi}{2})^{-1}(-2e^{-2R}\tan\frac{\phi}{2}) \\
&\quad + 2^{3/2}d\phi(1+e^{-4R}\tan^2\frac{\phi}{2})^{-1}\frac{1}{2}e^{-2R}(1+\tan^2\frac{\phi}{2}) - 2^{3/2}\frac{1}{2}d\phi \\
&= 2dt - 4\sqrt{2}dR\tan\frac{\phi}{2}(e^{2R}+e^{-2R}\tan^2\frac{\phi}{2})^{-1} \\
&\quad + \sqrt{2}d\phi(1+\tan^2\frac{\phi}{2})(e^{2R}+e^{-2R}\tan^2\frac{\phi}{2})^{-1} - \sqrt{2}d\phi \\
&= 2dt - (4\sqrt{2}dR\tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{2}d\phi(1+\tan^2\frac{\phi}{2}))(e^{2R}+e^{-2R}\tan^2\frac{\phi}{2})^{-1} - \sqrt{2}d\phi
\end{aligned}
$$

第二項において

$$
\begin{aligned}
e^{2R}+e^{-2R}\tan^2\frac{\phi}{2} &= (\frac{e^{2R}+e^{-2R}}{2} + \frac{e^{2R}-e^{-2R}}{2}) + (\frac{e^{2R}+e^{-2R}}{2} - \frac{e^{2R}-e^{-2R}}{2})\tan^2\frac{\phi}{2} \\
&= \cosh 2R + \sinh 2R + (\cosh 2R - \sinh 2R)\frac{\sin^2\phi/2}{\cos^2\phi/2} \\
&= (\cos^2\frac{\phi}{2})^{-1}(\cos^2\frac{\phi}{2}\cosh 2R + \cos^2\frac{\phi}{2}\sinh 2R + (\cosh 2R - \sinh 2R)\sin^2\frac{\phi}{2}) \\
&= (\cos\frac{\phi}{2})^{-2}\big((\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2})\cosh 2R + (\cos^2\frac{\phi}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2})\sinh 2R\big) \\
&= (\cos\frac{\phi}{2})^{-2}(\cosh 2R + \cos\phi\sinh 2R) \qquad (\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= (\alpha y)^{-1}(\cos\frac{\phi}{2})^{-2}
\end{aligned}
$$

となることから

$$
\begin{aligned}
dx^0 &= 2dt - \big(4\sqrt{2}dR\tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{2}d\phi(1+\tan^2\frac{\phi}{2})\big)\alpha y\cos^2\frac{\phi}{2} - \sqrt{2}d\phi \\
&= 2dt - \alpha y\big(4\sqrt{2}dR\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} - \sqrt{2}d\phi(\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2})\big) - \sqrt{2}d\phi \\
&= 2dt - 2\sqrt{2}\alpha y dR\sin\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi - \sqrt{2}d\phi
\end{aligned}
$$

これだと dx の次元と異なっているので

$$
dx^0 = \alpha^{-1}(2dt - 2\sqrt{2}\alpha y dR\sin\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi - \sqrt{2}d\phi)
$$

と定義しなおします。そうすると、ds^2 の第一項は

$$
\begin{aligned}
dx^0 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha y}dx &= \alpha^{-1}(2dt - 2\sqrt{2}\alpha y dR\sin\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi - \sqrt{2}d\phi) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{\alpha y}\big(2\alpha^{-1}(\alpha y)^2 dR\sin\phi + \alpha^{-1}(\alpha y)^2 d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R)\big) \\
&= \alpha^{-1}(2dt - 2\sqrt{2}\alpha y dR\sin\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi - \sqrt{2}d\phi) \\
&\quad + \sqrt{2}\alpha^{-1}\big(2\alpha y dR\sin\phi + \alpha y d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sinh^2 2R)\big) \\
&= \alpha^{-1}\big(2dt + \sqrt{2}\alpha y d\phi - \sqrt{2}d\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi(\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + (\cosh^2 2R - 1))\big) \\
&= \alpha^{-1}(2dt - \sqrt{2}d\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi\cos\phi\sinh 2R\cosh 2R + \sqrt{2}\alpha y d\phi\cosh^2 2R) \\
&= \alpha^{-1}\big(2dt - \sqrt{2}d\phi + \sqrt{2}\alpha y d\phi\cosh 2R(\cos\phi\sinh 2R + \cosh 2R)\big) \\
&= \alpha^{-1}(2dt - \sqrt{2}d\phi + \sqrt{2}d\phi\cosh 2R) \\
&= \alpha^{-1}\big(2dt + \sqrt{2}d\phi(\cosh 2R - 1)\big) \\
&= \alpha^{-1}(2dt + 2\sqrt{2}d\phi\sinh^2 R) \qquad (\cosh 2\theta = 1 + 2\sinh^2\theta)
\end{aligned}
$$

2 乗して

$$
\begin{aligned}
(dx^0 + \frac{\sqrt{2}}{\alpha y}dx)^2 = \alpha^{-2}(2dt + 2\sqrt{2}d\phi\sinh^2 R)^2 &= \alpha^{-2}(4dt^2 + 8d\phi^2\sinh^4 R + 8\sqrt{2}d\phi dt\sinh^2 R) \\
&= 4\alpha^{-2}(dt^2 + 2d\phi^2\sinh^4 R + 2\sqrt{2}d\phi dt\sinh^2 R)
\end{aligned}
$$

よって、(13) と合わせて

$$
ds^2 = 4\alpha^{-2}(dt^2 + 2\sinh^4 R d\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 R d\phi dt) - 4\alpha^{-2}(dR^2 + (\sinh^2 R + \sinh^4 R)d\phi^2) - dz^2
$$

$4\alpha^{-2}$ をそろえるために、dz^2 に $4\alpha^2$ を含めるように再定義して

$$ds^2 = 4\alpha^{-2}(dt^2 - dR^2 - dz^2 + (\sinh^4 R - \sinh^2 R)d\phi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 R d\phi dt)$$

となります。