測地線方程式

アフィン空間での直線の定義をします。
曲線上の平行移動からと、変分問題からの二通りです測地線方程式を導出しています。

　q をパラメータとする曲線を $x^i(q)$ とし、$e^i(q)$ を曲線に対する任意の接ベクトルとします。まず、直線の与え方を一般化します。ある曲線に沿って接ベクトルを動かしたとき、その接ベクトルの移動が平行になっているなら、その曲線を直線と定義できます (ユークリッド空間の直線の接ベクトルは定数なので、常に平行)。そして、この一般化された直線 (曲線) が測地腺 (geodesic) と呼ばれます。
　そうすると、アフィン空間での接ベクトル $e^i(q)$ の曲線上の移動は、「アフィン接続係数と平行移動」でのベクトルの移動から

$$\frac{de^i}{dq} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dq}e^k = 0 \tag{1}$$

アフィン接続 Γ^i_{jk} はクリストッフェル記号の定義に合わせているので、符号は反転しています。e^k は接ベクトルなので dx^k/dq と与えられ (ようは傾き)、さらに一般化させるために適当な関数 $\lambda(q)$ をかけて

$$e^i = \lambda(q)\frac{dx^i}{dq}$$

これを (1) に入れれば

$$\frac{d}{dq}(\lambda(q)\frac{dx^i}{dq}) + \lambda(q)\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dq}\frac{dx^k}{dq} = 0$$

さらに変形 $\lambda(q)$ をかけて、q で微分すると $1/\lambda$ になる $p(q)$ を新しく導入して

$$\frac{dp(q)}{dq} = \frac{1}{\lambda(q)}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{d}{dq}(\lambda\frac{dx^i}{dq}) &= -\lambda^2\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dq}\frac{dx^k}{dq} \\
\lambda\frac{d\lambda}{dq}\frac{dx^i}{dq} + \lambda^2\frac{d^2x^i}{dq^2} &= -\lambda^2\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dq}\frac{dx^k}{dq} \\
\lambda(\frac{dp}{dq})^2\frac{d\lambda}{dp}\frac{dx^i}{dp} + \lambda^2(\frac{dp}{dq})^2\frac{d^2x^i}{dp^2} &= -\lambda^2(\frac{dp}{dq})^2\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dp}\frac{dx^k}{dp} \qquad (\frac{d}{dq} = \frac{dp}{dq}\frac{d}{dp}) \\
\frac{d^2x^i}{dp^2} &= -\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dp}\frac{dx^k}{dp}
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dp}\frac{dx^k}{dp} = 0$$

この形を normal form と呼び、これがアフィン空間での測地線の定義を与え、アフィン空間での直線になります。この式は 2 階常微分方程式なので、初期値として $x(0), dx(0)/dp$ の二つを与えてしまえば、あとは勝手に測地線は決定されます。というわけで、適当な点を決めてそこの接線と移動を与えることで、測地線は書けます。曲線のパラメータ p は任意ですが、これから他のパラメータに変換したとき、どんな場合でも測地腺方程式の形が同じになるわけではないです。これは最後に触れます。

アフィン空間で見てきましたが、ベクトルの移動則を平行移動に変えてリーマン空間にします。接ベクトルを曲線 x^i に沿って動かすとき、平行移動ではベクトルの長さは変わらないので、接ベクトルの長さが定数になるようにします。この接ベクトルは単位接ベクトルで与えられます (もしくはそれの定数倍)。曲線 x^i を弧長 (曲線の長さ)s で微分したものは単位接ベクトルになるという性質があります (数学の「ベクトルの計算」参照)。なので、s は単位接ベクトルが移動する曲線の弧長です。

曲線のパラメータを s として、単位接ベクトル dx^i/ds の内積は

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1$$

となっています (単位ベクトルの大きさは 1)。今は単位接ベクトルとしますが、定数倍したものでも使えます。

接ベクトルの動かし方自体はアフィン空間と同じなので、単純にクリストッフェル記号によって置き換えて、曲線のパラメータを弧長 s にすればリーマン空間になります。なので、見た目を変えるためにクリストッフェル記号に { } を使えば

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

これがリーマン空間での測地線の方程式になります。そもそも接ベクトルを平行移動することで出来る線を測地線と定義しているということからも、この形になることは予想できます。

そして、微小な弧長 ds は微小距離のことなので、弧長の ds は腺素の ds と同じです。これは

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = const$$

から、$g_{ik}dx^idx^k = Cds^2$ となることからも分かります。なので、例えば、ミンコフスキー空間では

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

となります。また、線素と固有時間 τ との関係は

$$(cd\tau)^2 = ds^2\ ,\ d\tau = \frac{ds}{c}$$

これは特殊相対性理論のように、慣性系のみなら $\tau = s/c$ としても問題ありません。なので、測地線方程式は固有時間を使って

$$\frac{d^2x^i}{d^2\tau} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

と書くこともでき、大抵の場合 s は τ と何も考えずに置き換えて平気です。

幾何学的には測地線は曲がった空間の直線ですが、これを物理にあてはめれば、曲がった空間での粒子の軌道(重力による粒子の運動)となります。これは「運動方程式と測地線方程式」で具体的に見ます。

・別の導き方

測地線は最短距離と解釈できるので、変分問題(最小作用の原理)からも求められます。二つの点 P_1, P_2 があり、この二つを結ぶ曲線の長さ(弧長)は

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds$$

と与えられます。ds は線素で

$$ds = \sqrt{g_{ik}dx^idx^k}$$

ここで曲線のパラメータ p を導入すると

$$s = \int_{P_1}^{P_2} dp\frac{ds}{dp} = \int_{P_1}^{P_2} dp(g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp})^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

となります(下の補足参照)。このとき、ルート部分が定数になるように選ぶなら、s に比例したものになります(ds と dp が比例)。例えば、ルート部分が時間依存しない K となっているなら、$s = \sqrt{K}p$ となります。

P_1 と P_2 を結ぶ曲線が最短になるためには、積分の変分が 0 になればいいので

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} dp(g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp})^{\frac{1}{2}} = 0$$

という式になります(解析力学の最小作用の原理と同じです)。この式は曲線のパラメータの変換で変わりません(ルート部分から dp'/dp、外の dp から $(dp/dp')dp'$)。解析力学と同じ話から、オイラー・ラグランジュ方程式が

$$\frac{d}{dp}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (L = (g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp})^{\frac{1}{2}}\ ,\ \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dp})$$

と出てきます。微分は、計量が x^i に依存しているとして

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}g_{jk}\dot{x}^j + \frac{1}{2}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}g_{ij}\dot{x}^j = (g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}g_{jk}\dot{x}^j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k$$

線素 ds は

$$ds = (g_{ik}dx^idx^k)^{\frac{1}{2}} = (g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp}(dp)^2)^{\frac{1}{2}} = (g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp})^{\frac{1}{2}}dp = (g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{\frac{1}{2}}dp$$

となっているので

$$(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}g_{ja}\dot{x}^a = g_{ja}\frac{dp}{ds}\frac{dx^a}{dp} = g_{ja}\frac{dx^a}{ds}[0.21cm] \quad \frac{1}{2}(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\dot{x}^a\dot{x}^b = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dp}{ds}\frac{dx^a}{dp}\frac{dx^b}{dp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{dp}$$

そして、

$$\frac{d}{dp} = \frac{ds}{dp}\frac{d}{ds}$$

から、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{ds}{dp}\frac{d}{ds}(g_{ja}\frac{dx^a}{ds}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{dp} \\
&= \frac{d}{ds}(g_{ja}\frac{dx^a}{ds}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dp}{ds}\frac{dx^b}{dp} \\
&= \frac{d}{ds}(g_{ja}\frac{dx^a}{ds}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} \\
&= g_{ja}\frac{d^2x^a}{ds^2} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^b}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^a}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} \\
&= g^{ij}g_{ja}\frac{d^2x^a}{ds^2} + g^{ij}\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^b}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^a}{ds} - \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^j}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} \\
&= \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{ij}(2g_{ja|b} - g_{ab|j})\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} \qquad (g_{ja|b} = \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^b})
\end{aligned}$$

第二項の添え字をいじると

$$\frac{1}{2}g^{ij}(g_{ja|b} + g_{ja|b} - g_{ab|j})\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} = \frac{1}{2}g^{ij}(g_{ja|b} + g_{jb|a} - g_{ab|j})\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds}$$

となり、これはクリストッフェル記号

$$\left\{\begin{array}{c} i \\ a\ b \end{array}\right\} = \frac{1}{2}g^{ij}(g_{ja|b} + g_{jb|a} - g_{ab|j})$$

によって

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} i \\ a\ b \end{array}\right\}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} = 0$$

線素 ds は弧長と同じなので、最初の測地線方程式と同じです。よって、P_1 と P_2 を結ぶ曲線が最短になる曲線 $x^i(s)$ は測地線方程式に従います。

実際の計算においては、こんなルートのついてるのを扱うのは面倒なだけなので、もっと単純な形が使えないか考えます (ただし、ルートがいる形ではパラメータの変換で式の形が変わらない利点がある)。なので、変分の形は関数 F によって

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} F(T)dp = 0$$

として、ルートの形に限定せずに見ていきます。このときの T は解析力学からの予想として

$$T = \frac{1}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^k}{dp}$$

という形をしているとします (これのルートが前の話)。1/2 はただの係数みたいなものです。$F(T)$ とする前のでもそうですが、この変分問題は座標系の性質とは無関係になっているために一般相対性理論について考えていくのに適しています。

計量 g_{ik} は座標に依存しているので、T の変数は x^i と dx^i/dp とできて

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} F(T(x^i, \frac{dx^i}{dp}))dp = 0$$

そうすると、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dp}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}) = \frac{\partial F}{\partial x^i} \qquad (\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dp})$$

が作れます。ドットがついているのは p での微分です。オイラー・ラグランジュ方程式に $T = \dfrac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$ を入れれば、左辺は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}) &= \frac{d}{dp}(\frac{\partial F}{\partial T} \frac{dT}{d\dot{x}^i}) \\
&= \frac{d}{dp}\big(F' \frac{1}{2} g_{jk}(\frac{d\dot{x}^j}{d\dot{x}^i}\dot{x}^k + \dot{x}^j \frac{d\dot{x}^k}{d\dot{x}^i})\big) \qquad (F' = \frac{\partial F}{\partial T}) \\
&= \frac{d}{dp}(F' g_{ik} \dot{x}^k)
\end{aligned}$$

右辺は

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = F' \frac{1}{2} \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l} \dot{x}^l \dot{x}^k$$

となります。

これを解くために、曲線 $x^i(p)$ のパラメータ p を、その曲線の弧長 s に選びます。そうすると、$x^i(s)$ を s で微分すれば、上で言ったように単位接ベクトルになります。なので、曲線のパラメータ p を s と選ぶなら、変分問題での T は

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} = \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \frac{1}{2}$$

という定数になります。つまり、変分問題によって導かれる曲線に沿って $F(T)$ と $F'(T)$ は定数になります。よって、F, F' はこの曲線に沿って定数でなければいけないので、F, F' は s で微分すれば 0 になります。このため、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$F'\frac{d}{ds}(g_{ik}\dot{x}^k)=F'\frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l}\dot{x}^l\dot{x}^k$$

p を s に選んでいます (ドットも s 微分)。左辺は

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^k}{ds})=g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

となるので、オイラー・ラグランジュ方程式として

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

これは

$$\begin{aligned}0&=g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2}+(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l})\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}\\&=g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{1}{2}(2\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l})\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}\\&=g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2}+\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l})\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}\end{aligned}$$

となるので、これに g^{ik} をかけて

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{ik}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^l})\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

クリストッフェル記号を使えば

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}i\\l\ k\end{matrix}\right\}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

となって同じ結果です。オイラー・ラグランジュ方程式を使っている時点でわかりきっていることですが、測地線は停留曲線になっています。というわけで、ルートがあろうとなかろうと、測地線方程式は出てくるので、実際の計算においてはルートを外して行います (例えば「運動方程式と測地線方程式」参照)。

測地腺方程式の形を変えないパラメータのことをアフィンパラメータと呼びます (s はアフィンパラメータ)。アフィンパラメータ p を任意の a,b を使った変換 $p'=ap+b$ を行った後もアフィンパラメータとして存在します。このことは簡単に確かめられます。アフィンパラメータ p による微分を新しい p' を使って

$$\begin{aligned}&\frac{dx^i}{dp}=\frac{dx^i}{dp'}\frac{dp'}{dp}\\&\frac{d^2x^i}{dp^2}=\frac{d}{dp}\frac{dx^i}{dp'}\frac{dp'}{dp}=\frac{dp'}{dp}\frac{d}{dp}\frac{dx^i}{dp'}+\frac{dx^i}{dp'}\frac{d^2p'}{dp^2}=(\frac{dp'}{dp})^2\frac{d^2x^i}{dp'^2}+\frac{dx^i}{dp'}\frac{d^2p'}{dp^2}\end{aligned}$$

と書き直すと、測地線方程式は (p を s として)

$$(\frac{dp'}{ds})^2\frac{d^2x^i}{dp'^2}+\frac{dx^i}{dp'}\frac{d^2p'}{ds^2}+\left\{\begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array}\right\}\frac{dx^l}{dp'}\frac{dx^k}{dp'}(\frac{dp'}{ds})^2=0$$

$$\frac{d^2x^i}{dp'^2}+\left\{\begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array}\right\}\frac{dx^l}{dp'}\frac{dx^k}{dp'}=-(\frac{dp'}{ds})^{-2}\frac{d^2p'}{ds^2}\frac{dx^i}{dp'}$$

右辺が 0 になれば測地線方程式と同じ形になります。右辺が 0 になるためには

$$\frac{d^2p'}{ds^2}=0$$

となっていればいいです (一般的に $dx^i/dp'\neq 0$)。この条件は p' が $p'=as+b$ を満たしていれば成立することが分かります。よって、アフィンパラメータの線形変換によって新しいアフィンパラメータを作ることができます。

この条件に従わないような変換は測地腺方程式の形を変えます。実際にパラメータとして $x^0=ct$ を使ってみます。その場合では上での p' を x^0 として、x^0 微分を「$\cdot$」で表せば

$$\ddot{x}^i+\left\{\begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^l\dot{x}^k=-(\frac{dx^0}{ds})^{-2}\frac{d^2x^0}{ds^2}\dot{x}^i \tag{3}$$

$i=0$ とすれば

$$\ddot{x}^0+\left\{\begin{array}{c} 0 \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^l\dot{x}^k=-(\frac{dx^0}{ds})^{-2}\frac{d^2x^0}{ds^2}\dot{x}^0$$

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^l\dot{x}^k=-(\frac{dx^0}{ds})^{-2}\frac{d^2x^0}{ds^2}\qquad(\dot{x}^0=1\ ,\ \ddot{x}^0=0)$$

なので、これを (3) に入れることで、x_0 微分による測地線方程式は

$$\ddot{x}^i+\left\{\begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^l\dot{x}^k=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^l\dot{x}^k\dot{x}^i$$

$$\ddot{x}^i+\Big(\left\{\begin{array}{c} i \\ l\ k \end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c} 0 \\ l\ k \end{array}\right\}\dot{x}^i\Big)\dot{x}^l\dot{x}^k=0$$

となります。

・補足

s について軽く補足しておきます (数学の「ベクトルの計算」参照)。3 次元デカルト座標とします。パラメータを p とすれば、曲線 $\xi(p)$ は

$$\xi(p)=(x(p),y(p),z(p))$$

と書けます。曲線上の微小な長さ ds は直線と考えていいので

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= dp\sqrt{(\frac{dx}{dp})^2 + (\frac{dy}{dp})^2 + (\frac{dz}{dp})^2} \end{aligned}$$

で与えられます。微小距離を足し合わせれば曲線になるので、区間 P_1 と P_2 を結ぶ曲線の長さ s は

$$s = \int_{P_1}^{P_2} dp\sqrt{(\frac{dx}{dp})^2 + (\frac{dy}{dp})^2 + (\frac{dz}{dp})^2}$$

となり、これは弧長です (P_1, P_2 を結ぶ曲線の形は $\xi(p)$ で指定される)。これは上で出てきた

$$s = \int_{P_1}^{P_2} dp(g_{ik}\frac{dx^i}{dp}\frac{dx^k}{dp})^{\frac{1}{2}}$$

これを 3 次元デカルト座標としたものです。P_1 と P_2 を結ぶ曲線が最短になるものを選ぶのが変分問題です。

任意のパラメータ p から弧長 s に書き換えるためには、$s(p)$ の式から $p(s)$ の式を求めて曲線の式に入れなおせばいいです。p, s の関係は

$$\frac{ds}{dp} = \frac{d\xi}{dp}$$

となっています。