エネルギー・運動量テンソル

エネルギーと運動量を表現するテンソルを導入します。ここでは、非相対論的極限で保存則となるように作っていきます。
エネルギー・運動量テンソルの求め方としてラグランジアンを使った方法もあって、そっちのほうが直接的です。

ここではエネルギー・運動量テンソルには質量密度の次元を持たせますが、c^2 をかけたエネルギー密度の次元で定義されていることが多いので気をつけてください。
「真空でのアインシュタイン方程式」で、物質が分布していないときの重力の場の方程式をリッチテンソルによって

$$R_{\mu\nu} = 0$$

と与えました。これによって、重力を空間の幾何学として記述しています。これを物質が分布する空間に一般化します。
そのための仮定が、

$$\text{幾何学} = \text{空間のエネルギー}$$

というものです。左辺はリーマンテンソルによる式です。右辺は空間に分布している重力を発生させるであろうもののことです。力学において、重力の引力ポテンシャル $\phi(x)$ は、空間に分布する物質の質量密度 $\rho(x)$ によって

$$\phi(x) = -\kappa \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|x - x'|}$$

と与えられます (κ は重力定数)。なので、右辺は空間のエネルギーでなく、空間に分布している物質の質量となりそうですが、一般相対性理論では事情が異なります。
空間のエネルギーという言い回しになっているのは、アインシュタインが主張した質量とエネルギーは等価という関係 ($E = mc^2$) のためです。つまり、空間に分布している物質の質量だけでなく、その物質間の相互作用等も全て含めたものが、右辺の空間のエネルギーです。この空間のエネルギーを表すものがエネルギー・運動量テンソルです。ただし、重力のエネルギーは含めません。
この仮定から、エネルギー・運動量テンソルには、対称な 2 階テンソルとなることを要求します。

- 完全流体

  まずは、単純な場合として、相互作用も外力もない物質の集まりを考え、流体として扱います。なので、作るのは質量密度を含むテンソルです。

  ある 4 元速度 $u^\mu(x)$ で流れている流体 (場) を用意し、その質量密度を $\rho_0(x)$（スカラー）とします。質量密度 $\rho_0(x)$ は、流体の速度と同じ速度で動いて観測したときの密度とします。ようは静止質量に対応するものです。ある点 $x^\mu(s)$ での物質の 4 元速度は $u^\mu = dx^\mu/ds$ で与えられます (s は線素 ds の s なので、4 元速度は無次元量)。s を固有時間 τ と考えれば、速度の次元を持つので次元解析は分かりやすくなります。また、今の設定では圧力も無視するので、完全流体の結果にはなりません。

  2 階テンソルとして

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

というのを作ります。物質が速度 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で動いているとして、ミンコフスキー空間での線素は

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

なので

$$ds^2 = c^2dt^2(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}) = c^2dt^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$v = |\boldsymbol{v}|$ としています。変形させて

$$\frac{ds}{dt} = c(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$$

そして、これを $T^{\mu\nu}$ の 00 成分

$$T^{00} = \rho_0 u^0 u^0 = \rho_0 \frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} = c^2\rho_0(\frac{dt}{ds})^2$$

に入れれば

$$T^{00} = \rho_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1} = \gamma^2\rho_0 \quad\quad (\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \geq 1)$$

γ は特殊相対論で出てくるローレンツ因子と同じです。なので、特殊相対論の話から、速度 v を持つ質量密度 ρ は (止まっている観測者から見た質量密度)

$$\rho = \gamma^2\rho_0$$

となります。というわけで、T^{00} は特殊相対論での質量密度となり、c^2 をかければエネルギー密度となります。

他の成分も同様に求められて、T^{0i} $(i = 1, 2, 3)$ は

$$T^{0i} = \rho_{\mathbf{0}}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds} = c\rho_{\mathbf{0}}\frac{dt}{ds}\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \rho_{\mathbf{0}}\gamma^2\frac{v^i}{c} = \rho\frac{v^i}{c}$$

T^{ik} は

$$T^{ik} = \rho_0\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \rho_0\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}(\frac{dt}{ds})^2 = \rho_0\gamma^2\frac{v^iv^k}{c^2} = \rho\frac{v^iv^k}{c^2}$$

これらを行列で書けば

$$T^{\mu\nu} = \rho \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_x}{c} & \frac{v_y}{c} & \frac{v_z}{c} \\ \frac{v_x}{c} & \frac{v_x^2}{c^2} & \frac{v_x v_y}{c^2} & \frac{v_x v_z}{c^2} \\ \frac{v_y}{c} & \frac{v_y v_x}{c^2} & \frac{v_y^2}{c^2} & \frac{v_y v_z}{c^2} \\ \frac{v_z}{c} & \frac{v_z v_x}{c^2} & \frac{v_z v_y}{c^2} & \frac{v_z^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

v^i を v_x, v_y, v_z と書いています。これが今の場合でのエネルギー・運動量テンソルです。非相対論的極限 $v^i \ll c$ を取れば

$$T^{00} \simeq \rho_0$$

「真空でのアインシュタイン方程式」で求めたように、弱い重力場において計量は $g_{00} \simeq 1 + 2\phi/c^2$ と出てきており、$T^{00} \simeq \rho_0$ はそれに対応しています。

　$T^{0\nu}$ の発散をとってみると

$$\begin{aligned} T^{0\nu}_{|\nu} &= \frac{\partial\rho}{c\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{c\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{c\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{c\partial z} \\ &= \frac{1}{c}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z}) \\ &= \frac{1}{c}(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}) \quad\quad (\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)) \end{aligned}$$

( ) 部分は連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v} = 0$$

の左辺になっています。このため、$T^{0\nu}$ によって質量の保存 (c^2 をかければエネルギーの保存) を表すことができ

$$T^{0\nu}_{|\nu} = 0$$

によって、連続の方程式 (保存則) になります。

　他の成分での発散は

$$
\begin{aligned}
T^{1\nu}_{|\nu} &= \frac{\partial \rho v_x}{c^2\partial t} + \frac{\partial \rho v_x^2}{c^2\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{c^2\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{c^2\partial z} \\
&= \frac{1}{c^2}(\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_x(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(\rho v_z)}{\partial z}) \\
&= \frac{1}{c^2}\Big(\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}) + (\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_x\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}) + (\rho v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + v_x\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z})\Big) \\
&= \frac{\rho}{c^2}(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}) + \frac{v_x}{c^2}(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}) \\
&= \frac{\rho}{c^2}(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_x) + \frac{v_x}{c^2}(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

第二項は連続の方程式なので、連続の方程式が成立しているとして

$$T^{1\nu}_{|\nu} = \frac{\rho}{c^2}(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_x)$$

これは $T^{2\nu}, T^{3\nu}$ でも同様なので

$$T^{i\nu}_{|\nu} = \frac{\rho}{c^2}(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v^i) \tag{1}$$

これは流体力学での運動量方程式で、運動量保存の式です（流体力学の「流体の運動」参照)。もし、圧力 P と外力 F^i があるなら

$$\rho(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v^i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}P + F^i$$

となります。今は圧力も外力もないとしているので、右辺は 0 です。よって

$$T^{i\nu}_{|\nu} = 0$$

まとめると、エネルギー・運動量テンソルの発散は、流体力学の方程式から

$$T^{\mu\nu}_{|\nu} = 0$$

となり、今考えている流体のエネルギーと運動量の保存を表します。なので、$T^{\mu\nu}$ をエネルギー・運動量テンソルと呼ぶことができます。そして、エネルギー・運動量テンソルには、発散を取ることで保存則になることを要求します。

今は特殊相対論なので平坦な空間ですが、保存則の曲がった空間への一般化は

$$T^{\mu\nu}_{||\nu} = 0$$

とすることで出来ます。こう出来ることの説明は省きます。

圧力 P があるとして、完全流体にします。今求めたエネルギー・運動量テンソルを $M^{\mu\nu}$ と書くことにして

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

とします。これに対して、非相対論的極限を使うことで、連続の方程式

$$M^{0\nu}_{\ \ |\nu} = \frac{1}{c}(\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{v})) = 0$$

が出てきます ($\gamma = 1$)。しかし、圧力 P がいるときの運動量方程式では

$$\rho_0(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v^i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}P$$

となってるので

$$M^{i\nu}_{\ \ |\nu} = \frac{\rho_0}{c^2}(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v^i) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_i}P \neq 0$$

と出てくることになります。このため、$M^{\mu\nu}_{\ \ |\nu}$ は完全流体では保存則となりません。エネルギー・運動量テンソルは保存則になるように作るので、修正します。

修正のための対称な 2 階テンソルを $S^{\mu\nu}$ とします。対称であることから、今の設定から作れる 2 階テンソルとして

$$S^{\mu\nu} = Au^\mu u^\nu + Bg^{\mu\nu}$$

という形が考えられます。$g^{\mu\nu}$ は計量です。そして、運動量方程式が 0 になるようにしたいので

$$S^{ij}_{\ \ |j} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_i}P$$

これは単純に積分すれば

$$S^{ij} = \frac{P}{c^2}\delta_{ij} \qquad (2)$$

となります。δ_{ij} はクロネッカーデルタです。

4 元速度 u^μ は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dt}{ds}(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = c\frac{dt}{ds}(1, \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}, \frac{1}{c}\frac{dy}{dt}, \frac{1}{c}\frac{dz}{dt})$$
$$= c\frac{dt}{ds}(1, \frac{v_x}{c}, \frac{v_y}{c}, \frac{v_z}{c})$$
$$= c\frac{dt}{ds}(1, \frac{\boldsymbol{v}}{c}) \qquad (\frac{dt}{ds} = c^{-1}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\gamma}{c})$$

$\boldsymbol{v} \ll c$ では $u^\mu = (1,0,0,0)$ なので、$u^\mu u^\nu$ は $\mu=\nu=0$ のときに 1 で他は 0 です。そうすると、$A=1, B=-1$ として、P/c^2 を係数につければ、$S^{\mu\nu}$ は $S^{00}=0$、S^{ij} は (2) にできるので

$$S^{\mu\nu} = \frac{P}{c^2}(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu})$$

これを $M^{\mu\nu}$ に足せば非相対論的極限で質量保存と運動量保存が成立させられます。よって、完全流体でのエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + \frac{P}{c^2}(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu})$$

となります。

- **電磁場**

電荷を持った物質を流体 (電荷をもった流体) として、電磁場のエネルギー・運動量テンソルを求めます。今度は物質間に相互作用があります。

マクスウェル方程式の電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ によって

$$F^{\mu\nu}_{\ |\nu} = s^\mu \ , \ \{F_{\mu\nu|\lambda}\} = 0$$

{ } は反対称化です。$F^{\mu\nu}$ は

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \ , \ F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

４元電流密度ベクトル s^μ は

$$s^\mu = (\sigma, \frac{\boldsymbol{j}}{c})$$

σ を電荷密度、$\boldsymbol{j}$ を三次元電流密度とします。

流体と一緒に動いている観測者による質量密度を ρ_0、電荷密度を σ_0 とし、4 元速度を u^μ とします。4 元速度 u^μ の関係は流体のときと同じなので

$$u^\mu = (\gamma, \gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c})$$

これに σ_0 をかけると

$$\sigma_0 u^\mu = (\gamma\sigma_0, \gamma\sigma_0\frac{\boldsymbol{v}}{c})$$

なので、電荷密度は質量密度と同じように、速度 $\boldsymbol{v}$ で動いていると

$$\sigma = \gamma\sigma_0$$

また、電流密度は $\sigma_0\boldsymbol{v}$ なので $s^\mu = \sigma_0 u^\mu$ から、マクスウェル方程式は

$$F^{\mu\nu}_{|\nu} = \sigma_0 u^\mu \ ,\ \{F_{\mu\nu|\lambda}\} = 0$$

となります。

完全流体の場合と同じように考えます。まず、物質の質量密度だけが寄与しているとし、非相対論的極限で考えます。電荷を無視するなら、最初の流体の場合と同じになるので、非相対論的極限で連続の方程式

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{v}) = 0$$

が成立しているとします。なので、この場合のエネルギー・運動量テンソルを $M^{\mu\nu}$ として、質量保存は

$$M^{0\nu}_{|\nu} = 0 \tag{3}$$

で与えます。一方で、ローレンツ力 f^i がいるために運動量方程式は

$$\rho_0(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla v^i) = f^i \quad\ (f^i = \sigma(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B})^i)$$

となります。f^i は、例えば f^1 では

$$f^1 = \sigma_0\gamma(E_x + \frac{v_y}{c}B_z - \frac{v_z}{c}B_y) \simeq \sigma_0(-F^{10} + \frac{v_y}{c}F^{12} + \frac{v_z}{c}F^{13})$$

これは 4 元速度 $u_\nu = \gamma(1, -\boldsymbol{v}/c)$ を使えば

$$\begin{aligned}\sigma_0(-F^{10} + \frac{v_y}{c}F^{12} + \frac{v_z}{c}F^{13}) =& -\sigma_0(F^{10}, F^{11}, F^{12}, F^{13})\cdot(1, -\frac{v_x}{c}, -\frac{v_y}{c}, -\frac{v_z}{c})\\ =& -\sigma_0 F^{1\nu}u_\nu\end{aligned}$$

と書けます。他の成分も同様なので

$$f^i = -\sigma_0 F^{i\nu} u_\nu$$

これによって、運動量方程式は

$$\rho_0 (\frac{\partial v^i}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla v^i) = -\sigma_0 F^{i\nu} u_\nu$$

これの両辺を c^2 で割れば、(1) と同じになるので

$$M^{i\nu}_{|\nu} = -\frac{\sigma_0}{c^2} F^{i\nu} u_\nu \tag{4}$$

として、$M^{i\nu}$ を与えます。

　というわけで、$M^{\mu\nu}$ を最初の流体と同じとして

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

と与えます。(3),(4) から $M^{\mu\nu}_{|\nu} = 0$ になっていなく、保存則が満たされていないので修正します。

　保存則を満たすには (4) から

$$S^{i\nu}_{|\nu} = \frac{\sigma_0}{c^2} F^{i\nu} u_\nu$$

としたものを加えればいいです。これで、(4) の右辺が 0 になるので、保存則が成立します。これを $S^{\mu\nu}_{|\nu}$ とすると

$$S^{\mu\nu}_{|\nu} = \frac{\sigma_0}{c^2} F^{\mu\nu} u_\nu$$

これだと $M^{0\nu}_{|\nu} + S^{0\nu}_{|\nu} \neq 0$ となってしまいます。しかし、

$$F^{0\nu} u_\nu = F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3$$

なので、$v \ll c$ では $S^{0\nu}_{|\nu}$ は十分無視できる寄与です。

　$S^{\mu\nu}$ を求めます。4 元ベクトル u_ν は電磁場テンソルによって

$$u_\nu = \frac{1}{\sigma'} F_\nu{}^\lambda{}_{|\lambda}$$

なので、$S_\mu{}^\nu{}_{|\nu}$ は

$$c^2 S_{\mu|\nu}^{\ \ \nu} = F_\mu^{\ \nu} F_{\nu|\lambda}^{\lambda}$$

右辺にいるテンソルは $F^{\mu\nu}$ と内積で出てくる $g^{\mu\nu}$ なので、微分してこれになる形としては

$$c^2 S_\mu^{\ \nu} = AF_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu} + Bg_\mu^{\ \nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

が考えられます。係数 A, B は微分を作用させて元の形になるように決めればいいので

$$\begin{aligned}
c^2 S_{\mu|\nu}^{\ \ \nu} &= AF_{\mu\alpha|\nu}F^{\alpha\nu} + AF_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}_{|\nu} + Bg_\mu^{\ \nu}F^{\alpha\beta}_{|\nu}F_{\alpha\beta} + Bg_\mu^{\ \nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta|\nu} \\
&= AF_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu}_{|\nu} + AF_{\mu\alpha|\nu}F^{\alpha\nu} + 2Bg_\mu^{\ \nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta|\nu} \\
&= AF_\mu^{\ \nu}F_{\nu|\lambda}^{\lambda} + F^{\alpha\beta}(AF_{\mu\alpha|\beta} + 2BF_{\alpha\beta|\mu})
\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目に行くときに添え字の付け替えをしています。これから、$A = 1$ とすれば、第二項は 0 になる必要があるので

$$\begin{aligned}
0 = F^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha|\beta} + 2BF^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta|\mu} &= \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha|\beta} + \frac{1}{2}F^{\beta\alpha}F_{\mu\beta|\alpha} + 2BF^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta|\mu} \\
&= \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(F_{\mu\alpha|\beta} - F_{\mu\beta|\alpha} + 4BF_{\alpha\beta|\mu}) \quad (F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha})
\end{aligned}$$

$B = 1/4$ とすれば

$$(F_{\mu\alpha|\beta} - F_{\mu\beta|\alpha} + F_{\alpha\beta|\mu}) = \frac{1}{2}(F_{\mu\alpha|\beta} - F_{\alpha\mu|\beta} + F_{\beta\mu|\alpha} - F_{\mu\beta|\alpha} + F_{\alpha\beta|\mu} - F_{\beta\alpha|\mu})$$

これに 1/3 をかければ

$$\frac{1}{3}\frac{1}{2}(F_{\mu\alpha|\beta} - F_{\alpha\mu|\beta} + F_{\beta\mu|\alpha} - F_{\mu\beta|\alpha} + F_{\alpha\beta|\mu} - F_{\beta\alpha|\mu}) = \{F_{\mu\alpha|\beta}\}$$

となって、反対称化されます。これはマクスウェル方程式 $\{F_{\mu\alpha|\beta}\} = 0$ から 0 になるので、$A = 1, B = 1/4$ となります。

よって、$S_\mu^{\ \nu}$ は

$$c^2 S_\mu^{\ \nu} = F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g_\mu^{\ \nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

と求まり、電磁場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + \frac{1}{c^2}(F^{\mu}_{\ \ \alpha}\ F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})$$

となります。

c^2S^{00} がどうなっているのか見ておくと

$$\begin{aligned} c^2S^{00} &= (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{1}{4}g^{00}(-2E_x^2 - 2E_y^2 - 2E_z^2 + 2B_x^2 + 2B_y^2 + 2B_z^2) \\ &= \frac{|\boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2}{2} \end{aligned}$$

これは電磁気での電磁場のエネルギー密度です。なので、質量密度に電磁場のエネルギー密度が加わったものが T^{00} に対応しています。よって、質量密度だけでなく、場（今は電磁場）のエネルギー密度も重力を作り出すという相対論の性質を反映したものになっています。

また、c^2S^{0i} は

$$c^2S^{0i} = (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})^i$$

から、ポインティングベクトルを c で割ったものに対応します。このことから、エネルギー・運動量テンソルにはエネルギーの流れが含まれているのが分かります。

このような $S^{\mu\nu}$ の構造から

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$$

であるときは真空での（物質のない）電磁場に対応します。これは $M^{\mu\nu}$ が質量密度部分としていることから当たり前の結果です。