ラグランジアン密度

アインシュタイン方程式のラグランジアンを求めます。

アインシュタイン方程式はアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ とエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ によって

$$G_{\mu\nu} = AT_{\mu\nu}$$

これのラグランジアンを作ります。左辺は計量による式で、右辺でのエネルギー・運動量テンソルも計量に依存しているので、変分は計量に対して取ることを考えます。なので、グランジアンは計量によって作られるスカラーと考えます。加えて、エネルギー・運動量テンソルはそれを作り出す場 (スカラー場とか電磁場とか) にも依存するので、それも含まれている必要があります。

スカラーとしてはリッチスカラー R があるので、これを使うことにして

$$\mathcal{R} = \sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

としたものを作ります。これはスカラー密度です。これの変分を見ていきます。

計量の変分は計量の座標変換から作れるとします。計量の変換は、x_μ から $\overline{x}_\mu$ への座標変換とすれば

$$\overline{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}g_{\alpha\beta}$$

このとき、計量の変換を $g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$ として、$\delta g_{\mu\nu}$ を計量の変分とします。$g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}$ はテンソルなので、$\delta g_{\mu\nu}$ もテンソルです。計量の変分がテンソルなので、$R_{\mu\nu}$ の変分 $\delta R_{\mu\nu}$ もテンソルです。一方で、クリストッフェル記号は

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\nu\tau} = \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\tau}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2 \overline{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\tau}$$

と変換されるので、テンソルではないです。しかし、計量の変分に対してはテンソルとして変換されます。理由は単純で、第二項は計量に依存していないので、計量の変分に対して、クリストッフェル記号の変分は

$$\delta\overline{\Gamma}^\mu_{\nu\tau} = \frac{\partial \overline{x}^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\tau}\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$$

となるために、テンソルとして変換します。

リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}_{|\alpha} - \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}_{|\nu} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\ \beta\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right\}$$

これの変分 $\delta R_{\mu\nu}$ は δ を変分の演算子として作用させれば

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} = {} & \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}_{|\alpha} - \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}_{|\nu} - \delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\ \beta\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\ \beta\end{matrix}\right\} \\
& + \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

クリストッフェル記号の変分はテンソルなので、テンソルの共変微分から

$$
\Big(\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}\Big)_{||\nu} = \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}_{|\nu} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\ \beta\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \nu\ \mu\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \alpha\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \nu\ \alpha\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \beta\end{matrix}\right\}
$$

$$
\Big(\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\Big)_{||\alpha} = \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}_{|\alpha} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \mu\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \nu\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \nu\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \beta\end{matrix}\right\}
$$

これらの差は

$$
\begin{aligned}
& \Big(\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\})_{||\nu} - (\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\Big)_{||\alpha} \\
& = \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}_{|\nu} + \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \nu\ \beta\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\beta\\ \nu\ \mu\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\ \alpha\end{matrix}\right\} - \delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}_{|\alpha} - \left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right\}\delta\left\{\begin{matrix}\beta\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha\ \mu\end{matrix}\right\}\delta\Big\{
\end{aligned}
$$

なので、リッチテンソルの変分は

$$
\delta R_{\mu\nu} = \Big(\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}\Big)_{||\alpha} - \Big(\delta\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}\Big)_{||\nu}
$$

と書けます。

次に $\sqrt{-g}$ の変分を求めます。「共変微分」の発散で出てきたように、余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ によって計量とその行列式は

$$
\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu}\ ,\ g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}
$$

δg は $\delta g_{\mu\nu}\partial g/\partial g_{\mu\nu}$ なので、これから

$$
\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
$$

$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ は符号が反転することに注意してください。これは、$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ は計量の定義よりクロネッカーデルタのトレースなので

$$
\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = 0
$$

となるからです。というわけで、$\delta\sqrt{-g}$ は

$$
\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

と求まります。

これで必要なものは揃ったので、スカラー密度 $\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ の変分を求めます。変分 δ を作用させていけば

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) &= (\delta\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}(\delta g^{\alpha\beta})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{Bmatrix}\right)_{||\nu} - \left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}\right)_{||\alpha}\right) \\
&= -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{Bmatrix}\right)_{||\nu} - \left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}\right)_{||\alpha}\right) + (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \\
&= -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{Bmatrix}\right)_{||\nu} - \left(\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}\right)_{||\alpha}\right) + G_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

第一項は、計量は共変微分によって消えるので

$$
\left(\left(g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{Bmatrix}\right)_{||\nu} - \left(g^{\mu\nu}\delta\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix}\right)_{||\alpha}\right)\sqrt{-g}
$$

と書き換えられます。そうすると、添え字がつぶれるので、適当なベクトル v_μ, u_μ を使った

$$
(v^\nu_{||\nu} - u^\alpha_{||\alpha})\sqrt{-g}
$$

という形でになります。「共変微分」の発散で出てきた

$$
\xi^i_{||i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[\xi^i\sqrt{-g}]_{|i}
$$

この関係から

$$v^\nu_{||\nu}\sqrt{-g}=(v^\nu\sqrt{-g})_{|\nu}$$

となり、これは普通の発散になります。

ここで４次元積分による

$$I=\int_D d^4x\mathcal{R}$$

こんな量を作ります。D は今使っている計量による空間のある領域です。これの変分は今の結果から

$$\begin{aligned}\delta I&=\delta\int_D d^4x\mathcal{R}\\&=\delta\int_D d^4x\sqrt{-g}R\\&=\int_D d^4x\Big(-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big(\Big(\delta\left\{\begin{array}{c}\alpha\\\mu\ \alpha\end{array}\right\}\Big)_{||\nu}-\Big(\delta\left\{\begin{array}{c}\alpha\\\mu\ \nu\end{array}\right\}\Big)_{||\alpha}\Big)+G_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\Big)\end{aligned}$$

そうすると、第一項は上での話より、通常の発散とみなせるので、表面積分が 0 となるように領域 D の境界条件を与えれば、第一項は消えて

$$\delta I=\int_D d^4xG_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}$$

真空でのアインシュタイン方程式は $G_{\mu\nu}=0$ なので

$$\delta I=\delta\int_D d^4x\sqrt{-g}R=\int_D d^4x\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}=0$$

とすれば、変分原理から真空でのアインシュタイン方程式が出てきます。

解析力学の話と同じように考えれば、$\sqrt{-g}R$ は真空のアインシュタイン方程式のラグランジアン密度、I は作用となります。ラグランジアン密度は系の全ラグランジアンを L としたときに

$$L=\int d^3x\mathcal{L}$$

として、定義される $\mathcal{L}$ です (場の量子論の「古典場」参照)。そして、アインシュタイン方程式に対応する作用

$$I=\int_D d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_G=\int_D d^4x\sqrt{-g}R$$

のことをアインシュタイン・ヒルベルト作用と呼びます。また、$\sqrt{-g}d^4x$ は不変な体積要素で、$\sqrt{-g}\mathcal{L}$ を曲がった空間でのラグランジアン密度と扱うことが多いです。

後は真空でないアインシュタイン方程式での右辺 $AT_{\mu\nu}$ に対する対するラグランジアン密度を求める必要があります。今の結果から単純に予想すれば、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を作り出すラグランジアンを $\mathcal{L}_m$ として、その計量の変分に対して

$$\delta\int_D d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m=\int_D d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

となっていればいいと考えられます。これと真空のラグランジアン密度を合わせれば

$$\delta\int_D d^4x\sqrt{-g}(R-A\mathcal{L}_m)=0$$

A はアインシュタイン方程式の右辺の $AT_{\mu\nu}$ の A です。これがアインシュタイン方程式に対するラグランジアン密度となります。

ここで重要なことは、$\mathcal{L}_m$ は $g_{\mu\nu}$ だけでその場の変数を変数として持てることです。例えば、電磁場を変数に持てます。このため、電磁場なら４元ベクトルポテンシャルの変分によってマクスウェル方程式が出てくる必要があります。

実際に $\mathcal{L}_m$ からエネルギー・運動量テンソルとマクスウェル方程式を出せることを見ておきます。電磁場のラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{EM}=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と与えます。計量の変分を取ると ($F_{\mu\nu}$ は計量に依存しない)

$$\begin{aligned}
\delta\int_D d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{EM}=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x(\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sqrt{-g}+g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sqrt{-g}+F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x(\delta g^{\mu\alpha}F_{\mu\nu}F_{\alpha}{}^{\nu}\sqrt{-g}+\delta g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{\beta}\sqrt{-g}-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x(\delta g^{\mu\nu}F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}+\delta g^{\mu\nu}F_{\rho\mu}F^{\rho}{}_{\nu}-\frac{1}{2}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x(F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}+F_{\rho\mu}F^{\rho}{}_{\nu}-\frac{1}{2}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\\
=&-\frac{1}{2}\int_D d^4x(2F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}-\frac{1}{2}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g})\\
=&\int_D d^4x\sqrt{-g}(F_{\rho\mu}F_{\nu}{}^{\rho}+\frac{1}{4}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

( ) 部分は真空での電磁場のエネルギー・運動量テンソルと一致します。よって、エネルギー・運動量テンソルが $\mathcal{L}_{EM}$ の計量の変分から求められています。このように、電磁場がある場合でのアインシュタイン方程式がラグランジアンの変分から求まります。

今度はベクトルポテンシャル ϕ_μ の変分を考えます。ラグランジアン密度は $F_{\mu\nu}$ で構成されているために、ベクトルポテンシャル ϕ_μ の微分 $\phi_{\mu|\nu}$ に依存します。また、計量は ϕ_μ に依存しないので、ϕ_μ による変分を δ_ϕ として

$$\begin{aligned}\delta_\phi\int_D d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{EM} &= \int_D d^4x\sqrt{-g}\delta_\phi\mathcal{L}_{EM} \\ &= \int_D d^4x\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial\phi_{\mu|\nu}}\delta\phi_{\mu|\nu} \\ &= -\int_D d^4x(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial\phi_{\mu|\nu}})_{|\nu}\delta\phi_\mu\end{aligned}$$

最後に表面積分で落ちるとしています。ラブランジアン部分は

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial\phi_{\mu|\nu}} = \frac{\partial}{\partial\phi_{\mu|\nu}}(\phi_{\mu|\nu}-\phi_{\nu|\mu})(\phi_\mu{}^{|\nu}-\phi_\nu{}^{|\mu}) = -2F_{\mu\rho}$$

計算は省略しますが、地道に計算していけば出てきます (場の量子論の「電磁場〜ゲージ不変性〜」参照)。これは

$$\delta_\phi(\mathcal{L}_{EM}\sqrt{-g}) = -(\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial\phi_{\mu|\nu}})_{|\nu} = 2(F_{\mu\nu}\sqrt{-g})_{|\nu} = 0$$

とすれば、オイラー・ラグランジュ方程式そのものです。この結果は

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{|\nu} = 0$$

と一致するので、マクスウェル方程式が ϕ_μ の変分から出てきました。よって、計量の変分に対してはアインシュタイン方程式、物質の場の変分に対してはその場が従う方程式が導かれます。

ついでに、実数スカラー場での場合も示しておきます。スカラー場はクライン・ゴルドン方程式によって表現されるとします (クライン・ゴルドン方程式は相対論的量子力学の「クライン・ゴルドン方程式」や場の量子論の「クライン・ゴルドン場〜実数スカラー場〜」参照)。平坦な空間での実数スカラー場 Φ でのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$$

このように与えられます ($\eta^{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量)。これは Φ の変分によって (オイラー・ラグランジュ方程式)、クライン・ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\Phi = 0 \quad (\Box = \partial_\mu\partial^\mu)$$

を導きます。電磁場と同じように一般的な空間では $\sqrt{-g}$ を付けて、計量を一般的な $g_{\mu\nu}$ に変えた

$$\mathcal{L}_{KG}\sqrt{-g}$$

がラグランジアン密度となります (スカラーなので共変微分に書き換えて書くこともできます)。このときのエネルギー・運動量テンソルを求めます。

計量による変分を取ると

$$
\begin{aligned}
\delta \int_D d^4x L_{KG}\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\int_D d^4x\delta((g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - m^2\Phi^2)\sqrt{-g}) \\
&= \frac{1}{2}\int_D d^4x(\delta g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu}\sqrt{-g} + (g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - m^2\Phi^2)\delta\sqrt{-g}) \\
&= \frac{1}{2}\int_D d^4x(\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - m^2\Phi^2)\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\int_D d^4x\sqrt{-g}(\Phi_{|\alpha}\Phi_{|\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - m^2\Phi^2))\delta g^{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

なので、実数スカラー場のエネルギー・運動量テンソルは

$$
T_{\alpha\beta} = \Phi_{|\alpha}\Phi_{|\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu} - m^2\Phi^2)
$$

と求まります。

ここで見てきたように、わざわざアインシュタイン方程式に対応する作用を作り、変分原理による定式化をするのには意味があります。一般相対性理論に限らずに、ラグランジアンから理論を構成するとその理論が持つ対称性 (保存量) が見やすくなるという利点があります。このことは場の量子論に行けばこれでもかというぐらいに利用されているものです。他にも、作用が計量によるスカラーでさえあれば、幾何学=空間のエネルギーの式が作れることも分かります。なので、ニュートンの重力理論の拡張となる方程式として、アインシュタイン方程式でない形も作れます。