アインシュタイン方程式

真空でないときのアインシュタイン方程式を作ります。
「真空でのアインシュタイン方程式」と同じようにニュートンの重力理論との対応を取ります。

「エネルギー・運動量テンソル」でも触れたように、物質が分布する空間における

$$
\text{幾何学} = \text{空間のエネルギー}
$$

という仮定を定式化します。単純に考えて、左辺はリッチテンソル (リーマンテンソル)、右辺はエネルギー・運動量テンソルによって

$$
R_{\alpha\beta} = AT_{\alpha\beta}
$$

という形とします。A はまだ決まっていない定数です。エネルギー・運動量テンソルは、発散で 0 になるとしていますが、リッチテンソル $R_{\alpha\beta}$ は発散で 0 になりません。なので、アインシュタインテンソルを導入します。
アインシュタインテンソルの発散は 0 になるので、アインシュタインテンソル

$$
G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R
$$

を左辺に使います。また、より一般的な形として、左辺は

$$
G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}
$$

とできます。Λ は任意定数です。このことはカルタン (Cartan) によって証明されたことのようです。
というわけで、物質がある時の重力の場の方程式は

$$
G^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} = AT^{\alpha\beta}
$$

これがアインシュタインが示した重力に対する場の方程式の形で、物質があるときのアインシュタイン方程式です (A は後で決めます)。そして、Λ が宇宙定数 (cosmological constant) と呼ばれるものです。Λ は真空でのアインシュタイン方程式（右辺が $T^{\alpha\beta} = 0$）との対応のためには、$\Lambda = 0$ の必要があります。しかし、$\Lambda = 0$ なのかは簡単に結論を出せる問題ではないです。
ここではそんなことは無視して $\Lambda = 0$ として話を進めます。また、アインシュタイン方程式は計量の方程式ですが、左辺だけでなく右辺にも計量が含まれているので、見た目とは裏腹に相当複雑な方程式になっています。
アインシュタイン方程式 (真空の場合も含めて) は非線形なので、2 つの解 g, g' の和 $g + g'$(重ね合わせの原理) が解になるとは保証されていません。非線形の構造になるのは、物質とエネルギーは無関係ではないことの影響で、重力の重ね合わせをニュートンの重力理論のように簡単には行えなくなっています。
アインシュタイン方程式は便利な形に書き換えられます。縮約をとると

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha}{}_{\alpha}R = AT^{\alpha}{}_{\alpha} \\
R - 2R = AT \\
R = -AT
\end{aligned}
$$

リッチスカラー R と同じように、$T = T^{\alpha}{}_{\alpha}$ としています。これをアインシュタイン方程式に入れなおすと

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}AT &= AT^{\alpha\gamma} \\
R^{\alpha\gamma} &= A(T^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}T) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と変形させられます。

また決まっていない定数 A を決めます。「真空でのアインシュタイン方程式」では真空でのアインシュタイン方程式とラプラス方程式

$$
\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^{3}\phi_{|i|i} = 0
$$

との対応を取ったように、ここでは、ポアソン方程式

$$
\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^{3}\phi_{|i|i} = 4\pi\rho\kappa
$$

との対応を取ります (κ は重力定数)。

重力は弱いとして計量は「真空でのアインシュタイン方程式」でのようにミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ に微小な摂動を加えた

$$
g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon\gamma_{\mu\nu}
$$

とします。これは時間独立です。エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ には、物質が流体として分布しているとして、「エネルギー・運動量テンソル」の最初に求めた流体のエネルギー・運動量テンソル

$$
T^{\mu\nu} = \rho_0 u^{\mu}u^{\nu}
$$

を使います。ρ_0 は流体と一緒に動いている観測者から見た質量密度で、u^{μ} は流体の 4 元速度です。非相対論的極限 $v \ll c$ を取ると $T^{\mu\nu}$ は

$$
T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

となります。これの縮約を取ると

$$g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} + \epsilon\gamma_{\mu\nu}) \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

密度は薄いとして、$\epsilon\rho_0$ は無視できるとします。そうすると

$$T^{\mu}_{\ \mu} = T = \rho_0 + 0 + 0 + 0 = \rho_0$$

となります。
　これでアインシュタイン方程式の右辺は

$$\begin{aligned} A(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) &= A\Big(\begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\rho_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Big) \\ =& A \begin{pmatrix} \frac{\rho_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_0}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{A\rho_0}{2}\delta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2}$$

アインシュタイン方程式の左辺でのリッチテンソルは

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \beta \end{matrix} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma\ \nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\ \beta \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}$$

これの ϵ が 1 次のオーダまでの近似は「アインシュタイン方程式の線形化」で求めたように

$$R_{\mu\nu} \simeq \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \frac{1}{2}(\log|g|)_{|\mu|\nu}$$

となるので、(2) と合わせることで、近似されたアインシュタイン方程式は

$$\frac{1}{2}(\log|g|)_{|\mu|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\beta} = -\frac{A\rho_0}{2}\delta_{\mu\nu} \tag{3}$$

これの $\mu = \nu = 0$ の場合をみてみます。
　計量は時間独立としているので、$\mu = \nu = 0$ では第一項は消えます。第二項は

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 0\ 0 \end{array} \right\}_{|\beta} = (\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{0\alpha|0} + g_{\alpha 0|0} - g_{00|\alpha}))_{|\beta} = -\frac{\epsilon}{2}(g^{\alpha\beta}\gamma_{00|\alpha})_{|\beta}$$

ここで一つ分かることがあります。分かりやすくするために第一種クリストッフェル記号を使うと

$$[00, \alpha] = -\frac{\epsilon}{2}\gamma_{00|\alpha}$$

$\alpha = 0$ の時に左辺は 0 になるので、右辺も 0 です。よって、γ_{00} は時間独立です。
　このことを踏まえて変形していけば

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 0\ 0 \end{array} \right\}_{|\beta} &= -\frac{\epsilon}{2}((\eta^{\alpha\beta} + \epsilon\gamma^{\alpha\beta})\gamma_{00|\alpha})_{|\beta} = \ -\frac{\epsilon}{2}(\eta^{\alpha\beta}\gamma_{00|\alpha})_{|\beta} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon\sum_{k=1}^{3}\gamma_{00|k|k} \end{aligned}$$

最後に、$\gamma_{00|0} = 0$ なので $k = 1, 2, 3$ の和にしています ($\eta_{\alpha\beta} = (+1, -1, -1, -1)$)。これによって、$\mu = \nu = 0$ のアインシュタイン方程式 (3) は

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \beta \\ 0\ 0 \end{array} \right\}_{|\beta} &= \frac{A\rho_0}{2}\delta_{00} \\ \frac{1}{2}\epsilon\sum_{k=1}^{3}\gamma_{00|k|k} &= \frac{A\rho_0}{2} \\ \epsilon\sum_{k=1}^{3}\gamma_{00|k|k} &= A\rho_0 \qquad (4) \end{aligned}$$

これとポアソン方程式

$$\sum_{i=1}^{3}\phi_{|i|i} = 4\pi\rho_0\kappa$$

を比較します。(4) から ρ_0 は

$$\rho_0 = \frac{\epsilon}{A}\sum_{i=1}^{3}\gamma_{00|i|i}$$

これをポアソン負定式に入れれば

$$\sum_{i=1}^{3}\phi_{|i|i} = 4\pi\kappa\frac{\epsilon}{A}\sum_{i=1}^{3}\gamma_{00|i|i}$$

から

$$\frac{\epsilon}{A}\gamma_{00} = \frac{\phi}{4\pi\kappa}$$

となっていれば対応関係がつけられます。そして、弱い重力場では「真空でのアインシュテイン方程式」で出てきたように、計量と

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1)$$

という関係になっているので

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1) = \frac{c^2}{2}(\eta_{00} + \epsilon\gamma_{00} - 1) = \frac{c^2}{2}\epsilon\gamma_{00}$$

よって、A は

$$\frac{\epsilon}{A}\gamma_{00} = \frac{1}{4\pi\kappa}\frac{c^2}{2}\epsilon\gamma_{00}$$
$$A = \frac{8\pi\kappa}{c^2}$$

となるので、アインシュタイン方程式は

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^{\alpha\beta}$$

と決まります。宇宙項を入れれば

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R - \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}T^{\alpha\beta}$$

(1) の形なら

$$R^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}T)$$

これらが、一般的にアインシュタイン方程式と呼ばれる形です。左辺が空間の幾何学を表現し、右辺が空間のエネルギーを表します。右辺に物質の質量やエネルギーを与えることで、その空間がどのようになるのかを左辺で表現します。

また、真空でない場合でも線形化することができて

$$\Box\gamma^{\alpha\gamma} = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}T^{\alpha\gamma}$$

となります。

表記上の注意ですが、エネルギー・運動量テンソルを質量密度の次元でなくエネルギー密度の次元にすると、アインシュタイン方程式は

$$G^{\alpha\beta} - \Lambda g^{\alpha\beta} = \frac{8\pi\kappa}{c^4}T^{\alpha\beta}$$

となります。こっちの定義を使っている場合の方が多いです。

アインシュタイン方程式が作れたところで、簡単にまとめておきます。一般相対性理論の出発点は、アインシュタインの等価原理です。これによって、重力は曲がった空間として記述できると仮定されます。そして物理の基本的な考え方である、物理法則は座標系に依存しない、を要求します。これらの仮定に対応する数学がリーマン幾何学とテンソルです。

そして、重力による空間とするためにアインシュタイン方程式が仮定され、その空間上の測地線に沿って物体は運動 (自由落下) すると仮定したのが、一般相対性理論です。また、当たり前のように使ってきましたが、光の速度が不変も要求されています。

ちなみに、

$$G^{\alpha\gamma} - \Lambda g^{\alpha\gamma} = AT^{\alpha\gamma}$$

という形は、ニュートン的なポアソン方程式の唯一の拡張版ではないです。他にもポアソン方程式の拡張となり、保存則を満たし、テンソル形式で書けるものは存在します。その中でアインシュタイン方程式が用いられているのは、単純に、この方程式が今のところ実験結果と矛盾していないために、新しく別の方程式を持ち出す必要がないというだけです。細かいことを言うと、他の方程式でも弱い重力場での記述は十分に実験結果と一致させることができ、アインシュタイン方程式との差は強い重力場での記述で生じます。しかし、現在の実験は弱い重力場中（太陽系内）が主なために、強い重力場でどうなるのかはまだ不確かです。なので、結局は実験結果待ちで、実験結果がわからない限りアインシュタイン方程式で十分というのが主な考え方のようです。