アインシュタイン方程式の線形化

非線形のアインシュタイン方程式を弱い重力として近似して線形化します。

　重力は弱いとして、ミンコフスキー計量に微小な項を加えたものを使います。なので、計量 $g_{\alpha\beta}$ を

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta} + \epsilon^2\gamma'_{\alpha\beta} + \cdots$$

として、ミンコフスキー計量 $\eta_{\alpha\beta}$ に微小な項が加わった形で展開できるよします。ϵ は微小とします。微小項がミンコフスキー空間を曲げる寄与になります。ここでは、ϵ の 1 次までを考えます。ちなみに、1 次までの計量 $g_{\alpha\beta}$ が $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu$ を満たしているなら、

$$\begin{aligned}\delta^\nu_\mu = &\ (\eta_{\mu\alpha} + \epsilon\gamma_{\mu\alpha})(\eta^{\alpha\nu} + \epsilon\gamma^{\alpha\nu}) \simeq \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \epsilon\gamma_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \epsilon\eta_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu} \\ &= \delta^\nu_\mu + \epsilon\gamma_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \epsilon\eta_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} + \eta_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu} = 0 \\ \eta_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu} = &\ -\eta^{\alpha\nu}\gamma_{\mu\alpha} \\ \eta^{\beta\mu}\eta_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu} = &\ -\eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}\gamma_{\mu\alpha} \\ \delta^\beta_\alpha\gamma^{\alpha\nu} = &\ -\eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}\gamma_{\mu\alpha} \\ \gamma^{\beta\nu} = &\ -\eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}\gamma_{\mu\alpha}\end{aligned}$$

となります。このとき、添え字の上げ下げはミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ で行えるとするなら

$$\gamma^{\beta\nu} = \eta^{\beta\mu}\eta^{\alpha\nu}\gamma_{\mu\alpha}$$

とする必要があり、この場合上付きの計量 $g^{\alpha\beta}$ は

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon\gamma^{\alpha\beta}$$

と定義されます。

　ここではミンコフスキー計量の符号を統一させるために虚数時間で座標を定義し、時間座標を ict とします。これは単に時間軸を虚軸に持っていくという数学的な変換なので、現実に虚数時間があるとかそういった話ではないです (場の理論ではユークリッド化と言ったりします)。この変換によってミンコスフキー空間の 4 元ベクトルは (ict, x, y, z) となるので、ミンコフスキー空間の内積 $x_\mu x^\mu$ は

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \ \Rightarrow\ -c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

となります。つまり、計量が

$$\eta_{\alpha\beta} \;\Rightarrow\; -\delta_{\alpha\beta}$$

として、クロネッカーデルタになります。マイナスがなければ、4 次元ユークリッド空間の計量です。この手続きは必ず必要というわけでなく、添え字の位置を気にせずに計算できるようにするためにしているだけです。基本的には内積部分をミンコフスキー計量に戻せば元に戻ります。

　真空でのアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \nu \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{matrix} \right\}\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} = 0$$

のクリストッフェル記号に今の計量を適用させます。クリストッフェル記号は

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu|\nu} + g_{\nu\beta|\mu} - g_{\mu\nu|\beta})$$

なので、微分は微小項にのみ作用します (ミンコフスキー計量は定数)。そして、明らかにリッチテンソルの第一項と第二項部分には ϵ の 1 次の項が存在し、第三項と第四項には ϵ の 1 次の項は存在せず ϵ の 2 次以上で構成されています。今は ϵ の 1 次までを考えるので、第一項と第二項のみを取り、アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} \simeq \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\}_{|\nu} = 0$$

でいいことになります。これの第二項のクリストッフェル記号は計量の行列式で書けば

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\}_{|\nu} = \frac{1}{2}(\log|g|)_{|\mu|\nu}$$

$|\ |$ は絶対値です。行列式 g は、$g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta}$ から

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1-\epsilon\gamma_{00} & -\epsilon\gamma_{01} & -\epsilon\gamma_{02} & -\epsilon\gamma_{03} \\ -\epsilon\gamma_{10} & 1-\epsilon\gamma_{11} & -\epsilon\gamma_{12} & -\epsilon\gamma_{13} \\ -\epsilon\gamma_{20} & -\epsilon\gamma_{21} & 1-\epsilon\gamma_{22} & -\epsilon\gamma_{23} \\ -\epsilon\gamma_{30} & -\epsilon\gamma_{31} & -\epsilon\gamma_{32} & 1-\epsilon\gamma_{33} \end{vmatrix}$$

$|\ |$ は行列式です。今の近似での g は、この行列式から ϵ が一次までの項を取り出したものです。

　見て分かるように、一次になる項を含むのは対角成分の積だけなので、行列式は

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) \simeq (1-\epsilon\gamma_{00})(1-\epsilon\gamma_{11})(1-\epsilon\gamma_{22})(1-\epsilon\gamma_{33})$$

$$\simeq 1 - \epsilon(\gamma_{00} + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})$$

これを $\log|g|$ に入れて、テーラー展開すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log|g| &\simeq \log[1-\epsilon(\gamma_{00}+\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33})] \\
&\simeq -\epsilon(\gamma_{00}+\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33})
\end{aligned}
$$

よって、アインシュタイン方程式で必要なクリストッフェル記号の片方は

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c}\alpha \\ \alpha\ \mu\end{array}\right\}_{|\nu} &= \frac{1}{2}(\log|g|)_{|\mu|\nu} \\
&\simeq -\frac{1}{2}\epsilon(\gamma_{00}+\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33})_{|\mu|\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu}
\end{aligned}
$$

と求まります。添え字が上下になっていないので、和の記号を書いています。もう一方のクリストッフェル記号は

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c}\alpha \\ \mu\ \nu\end{array}\right\} &= \frac{\eta^{\alpha\beta}+\epsilon\gamma^{\alpha\beta}}{2}(g_{\beta\mu|\nu}+g_{\nu\beta|\mu}-g_{\mu\nu|\beta}) \\
&= \frac{\eta^{\alpha\beta}+\epsilon\gamma^{\alpha\beta}}{2}(\epsilon\gamma_{\beta\mu|\nu}+\epsilon\gamma_{\nu\beta|\mu}-\epsilon\gamma_{\mu\nu|\beta})
\end{aligned}
$$

虚数時間にして、$\eta^{\alpha\beta}$ を $-\delta^{\alpha\beta}$ に置き換えれば、クリストッフェル記号は ϵ の 1 次までで

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c}\alpha \\ \mu\ \nu\end{array}\right\} &\simeq -\frac{\delta^{\alpha\beta}}{2}(\epsilon\gamma_{\beta\mu|\nu}+\epsilon\gamma_{\nu\beta|\mu}-\epsilon\gamma_{\mu\nu|\beta}) \\
\left\{\begin{array}{c}\alpha \\ \mu\ \nu\end{array}\right\}_{|\alpha} &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3}(\epsilon\gamma_{\alpha\mu|\nu}+\epsilon\gamma_{\nu\alpha|\mu}-\epsilon\gamma_{\mu\nu|\alpha})_{|\alpha}
\end{aligned}
$$

となります。

　というわけで、アインシュタイン方程式は ϵ の 1 次までで

$$
-\sum_{\alpha=0}^{3}(\gamma_{\alpha\mu|\nu}+\gamma_{\nu\alpha|\mu}-\gamma_{\mu\nu|\alpha})_{|\alpha}+\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu}=0
$$

見て分かるように線形になっているので、これが線形化された真空でのアインシュタイン方程式です。この式は、$\gamma_{\alpha\beta}$ の独立成分 10 個に対して 10 個の偏微分方程式で構成されているので、$\gamma_{\alpha\beta}$ は理屈上では解けます。

　線形化された方程式は共変性を持たなく、その方程式の解である $\gamma_{\alpha\beta}$ もテンソルの必要はないです。元々はテンソルだった計量がテンソルでなくなっているのは、ϵ が 1 次のオーダでの近似で計算したためです。このため、厳密な計量（線形化されてないアインシュタイン方程式の解）との間に差が生じています。

　しかし、テンソルとして扱うべきと考えることができます。厳密な計量 $g'_{\alpha\beta}$ と近似した計量 $g_{\alpha\beta}$ の差が 2 次のオーダ表せるとしたら、$g'_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta}=O(\epsilon^2)$ と書けます。この関係が座標変換後でも維持されるべきと考えます。そうすると、$g_{\alpha\beta}$ もテンソルとして座標変換すれば

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^\nu}(g'_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta})=O(\epsilon^2)$$

と出来て、差は ϵ^2 のオーダのままです。なので、$g_{\alpha\beta}$ をテンソルのように扱うべきで、$\gamma_{\alpha\beta}$ もテンソルです。

ちなみに、虚数時間にしていない場合ではリッチテンソルは

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\gamma_{\alpha\nu|\mu|\beta}+\gamma_{\mu\beta|\alpha|\nu}-\gamma_{\mu\nu|\alpha|\beta}-\gamma_{\alpha\beta|\mu|\nu})$$

となります。下の補足で簡単に導出しています。

線形化しても見るからに複雑な形をしていますが、簡易化することが可能です。見た目を分かりやすくするために、4 次元でのダランベルシャン

$$\Box=-\sum_{\alpha=0}^{3}\partial_\alpha\partial_\alpha$$

を使うことにします。計量が $-\delta_{\mu\nu}$ になっていることに注意してください。これによって

$$-\sum_{\beta=0}^{3}\gamma_{\mu\nu|\beta|\beta}=\Box\gamma_{\mu\nu}$$

と書くことにして

$$-\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\mu|\nu|\alpha}-\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\nu\alpha|\mu|\alpha}-\Box\gamma_{\mu\nu|\alpha|\alpha}+\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu}=0$$

左辺は変形すると

$$\begin{aligned}&-\Box\gamma_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu}-\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\mu|\nu|\alpha}-\sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\nu\alpha|\mu|\alpha}\\&=-\Box\gamma_{\mu\nu}+\sum_{\alpha=0}^{3}(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha|\mu}-\gamma_{\alpha\mu|\alpha})_{|\nu}+\sum_{\alpha=0}^{3}(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha|\nu}-\gamma_{\nu\alpha|\alpha})_{|\mu}\end{aligned}\tag{1}$$

微分の順序は交換できることを使っています。ここで

$$A_\mu=\sum_{\alpha=0}^{3}(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\alpha|\mu}-\gamma_{\alpha\mu|\alpha})\tag{2}$$

と置き換えれば

$$\Box\gamma_{\mu\nu}-A_{\mu|\nu}-A_{\nu|\mu}=0\tag{3}$$

ここまではただ変形しただけです。

　ここで、A_μ がある関数 ϕ_μ にダランベルシャンを作用させたものと等しいと仮定して

$$A_\mu = \Box\phi_\mu \tag{4}$$

とします。そうすると

$$\Box\gamma_{\mu\nu} = \Box\phi_{\mu|\nu} + \Box\phi_{\nu|\mu}$$

この式からダランベルシャンを外せば、$\gamma_{\mu\nu}$ は

$$\gamma_{\mu\nu} = \phi_{\mu|\nu} + \phi_{\nu|\mu}$$

となります。

　しかし、これは仮定した結果なので、本当に (3) の解になるのかを確かめます。そのために、元の (1) に入れてみると

$$\begin{aligned}
&-\Box\gamma_{\mu\nu} + \sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\alpha|\mu|\nu} - \sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\nu|\mu|\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{3}\gamma_{\alpha\mu|\nu|\alpha} \\
&= -\Box\gamma_{\mu\nu} + \sum_{\alpha=0}^{3}((\phi_{\alpha|\alpha} + \phi_{\alpha|\alpha})_{|\mu|\nu} - (\phi_{\alpha|\nu} + \phi_{\nu|\alpha})_{|\mu|\alpha} - (\phi_{\alpha|\mu} + \phi_{\mu|\alpha})_{|\nu|\alpha}) \\
&= -\Box\gamma_{\mu\nu} + \sum_{\alpha=0}^{3}(2\phi_{\alpha|\alpha|\mu|\nu} - \phi_{\alpha|\nu|\mu|\alpha} - \phi_{\nu|\alpha|\mu|\alpha} - \phi_{\alpha|\mu|\nu|\alpha} - \phi_{\mu|\alpha|\nu|\alpha}) \\
&= -\Box\gamma_{\mu\nu} + \sum_{\alpha=0}^{3}(2\phi_{\alpha|\alpha|\mu|\nu} - \phi_{\alpha|\alpha|\mu|\nu} - \phi_{\nu|\mu|\alpha|\alpha} - \phi_{\alpha|\alpha|\mu|\nu} - \phi_{\mu|\nu|\alpha|\alpha}) \\
&= -\Box\gamma_{\mu\nu} - \sum_{\alpha=0}^{3}(\phi_{\mu|\nu|\alpha|\alpha} + \phi_{\nu|\mu|\alpha|\alpha}) \\
&= -\Box\gamma_{\mu\nu} + (\Box\phi_{\mu|\nu} + \Box\phi_{\nu|\mu}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので、解になっています。$\phi_{\eta|\lambda} + \phi_{\lambda|\eta}$ の解をワイル解 (Weyl solutions) と呼びます。このように解が見つかりましたが、ワイル解は意味を持ちません。これを見ていくことで、解くべき方程式が簡単になります。

　ある任意の解 $\gamma^{(0)}_{\mu\nu}$ が求まっているとします。この解を (2) に入れれば、$A^{(0)}_\mu$ が求まります。そして、(4) に入れれば、$\phi^{(0)}_\mu$ が求まります。そうすると、ワイル解として

$$\gamma^{(w)}_{\mu\nu} = \phi^{(0)}_{\mu|\nu} + \phi^{(0)}_{\nu|\mu}$$

というのが作れます。$\gamma^{(0)}_{\mu\nu}$ と $\gamma^{(w)}_{\mu\nu}$ の差を見ていきます。

　線形化されたアインシュタイン方程式の解なので、重ね合わせの原理から

$$\hat{\gamma}_{\eta\lambda} = \gamma^{(0)}_{\eta\lambda} - \gamma^{(w)}_{\eta\lambda}$$

としても解になります。$\gamma^{(0)}_{\eta\lambda}$ と $\gamma^{(w)}_{\eta\lambda}$ のダランベルシャンは

$$\Box\gamma^{(0)}_{\eta\lambda} = A^{(0)}_{\eta|\lambda} + A^{(0)}_{\lambda|\eta}$$

$$\Box\gamma^{(w)}_{\eta\lambda} = \Box\phi^{(0)}_{\eta|\lambda} + \Box\phi^{(0)}_{\lambda|\eta} = A^{(0)}_{\eta|\lambda} + A^{(0)}_{\lambda|\eta}$$

このため差は 0 になるので

$$\Box\hat{\gamma}_{\eta\lambda} = 0 \tag{5}$$

という波動方程式になります。これからさらに見ていきますが、結局これが解くべき方程式となります。

波動方程式の性質から $\hat{\gamma}_{\eta\lambda}$ の波は光速で伝播します $(\partial/c\partial t)$。$\hat{\gamma}_{\eta\lambda}$ は空間の歪みを表すので、空間の歪みが伝播していくことになり、それを重力波と呼んでいます。このように影響が伝播していく現象が出てくるのは、ニュートンの重力理論と違い時間依存性があるためです。また、電磁波も重力波もヌル測地線を伝わっていきます。

(5) を見ていく前に、$\hat{\gamma}_{\eta\lambda}$ の成分の関係を求めておきます。そのために、キリング方程式

$$\xi_{\lambda||\eta} + \xi_{\eta||\lambda} = 0$$

を持ち出します。この式と (3) での

$$\Box\hat{\gamma}_{\eta\lambda} = \hat{A}_{\eta|\lambda} + \hat{A}_{\lambda|\eta} = 0$$

を比べればわかるように、$\hat{A}_{\eta|\lambda}$ はキリングベクトルに対応します。なので、計量が何かの対称性を持っていますが、ここでは触れずに先に進みます。

もう一回微分して

$$\hat{A}_{\eta|\lambda|\nu} + \hat{A}_{\lambda|\eta|\nu} = 0$$

添え字のつけかえと微分の順序を入れ替えて

$$\hat{A}_{\eta|\lambda|\nu} + \hat{A}_{\lambda|\eta|\nu} = 0$$

$$\hat{A}_{\lambda|\eta|\nu} + \hat{A}_{\nu|\lambda|\eta} = 0$$

$$\hat{A}_{\nu|\lambda|\eta} + \hat{A}_{\eta|\lambda|\nu} = 0$$

という 3 パターンを作ります。これらによる連立方程式の解がどうなっているかは、行列として書いた

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_{\eta|\lambda|\nu} \\ \hat{A}_{\lambda|\eta|\nu} \\ \hat{A}_{\nu|\lambda|\eta} \end{pmatrix} = 0$$

において、係数の行列式が 0 かそうでないかを見ればいいです。係数の行列式は $1+1=2$ なので、0 でないです。よって、解としては 0 しかないので

$$\hat{A}_{\eta|\lambda|\nu} = 0$$

2 回積分すれば $\hat{A}_\eta$ になるので、$\hat{A}_\eta$ は 1 次関数です。

そして、空間の無限遠において $\hat{A}_\eta$ は 0 に近づくという境界条件を加えます。これは無限遠で重力場は 0 になるという仮定からです。この条件のために 1 次関数である $\hat{A}_\eta$ は 0 です（1 次関数 $ax+b$ が x の ∞ で 0 になるためには、0 でないといけない）。そうすると

$$\hat{A}_\eta = \sum_{\beta=0}^{3}(\hat{\gamma}_{\eta\beta|\beta} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_{\beta\beta|\eta}) = 0$$

となり、これから $\hat{\gamma}_{\eta\lambda}$ の成分の関係が与えられます。

$\hat{\gamma}_{\eta\lambda}$ が意味のある解であることを示します。なので、物理量であるリーマンテンソルを計算してみます。リーマンテンソルは

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\lambda} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\ \eta \end{matrix} \right\}$$

これに計量として

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta}$$

を使えば、ϵ の 1 次で

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\lambda} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\lambda}$$

これはすでに計算しているので、添え字を今の場合に合わせれば

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\beta} = -\frac{1}{2}(\epsilon\gamma_{\alpha\lambda|\eta} + \epsilon\gamma_{\alpha\eta|\lambda} - \epsilon\gamma_{\lambda\eta|\alpha})_{|\beta}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \eta \end{matrix} \right\}_{|\lambda} = -\frac{1}{2}(\epsilon\gamma_{\alpha\beta|\eta} + \epsilon\gamma_{\alpha\eta|\beta} - \epsilon\gamma_{\beta\eta|\alpha})_{|\lambda}$$

よって、リーマンテンソルは

$$\begin{aligned}R^{\alpha}{}_{\eta\beta\lambda} &= \frac{\epsilon}{2}\big(-\gamma_{\alpha\lambda|\eta|\beta}-\gamma_{\alpha\eta|\lambda|\beta}+\gamma_{\lambda\eta|\alpha|\beta}+\gamma_{\alpha\beta|\eta|\lambda}+\gamma_{\alpha\eta|\beta|\lambda}-\gamma_{\beta\eta|\alpha|\lambda}\big)\\ &= -\frac{\epsilon}{2}\big(\gamma_{\beta\eta|\alpha|\lambda}+\gamma_{\alpha\lambda|\eta|\beta}-\gamma_{\lambda\eta|\alpha|\beta}-\gamma_{\alpha\beta|\eta|\lambda}\big)\end{aligned}$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ をワイル解 $\phi_{\alpha|\beta}+\phi_{\beta|\alpha}$ とすれば

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\lambda}=-\frac{\epsilon}{2}\big(\phi_{\beta|\eta|\alpha|\lambda}+\phi_{\eta|\beta|\alpha|\lambda}+\phi_{\alpha|\lambda|\eta|\beta}+\phi_{\lambda|\alpha|\eta|\beta}-\phi_{\lambda|\eta|\alpha|\beta}-\phi_{\eta|\lambda|\alpha|\beta}-\phi_{\alpha|\beta|\eta|\lambda}-\phi_{\beta|\alpha|\eta|\lambda}\big)$$

微分の添え字を入れ替えて整理していくと、全て消えて

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\lambda}=0$$

となるので、ワイル解によってリーマンテンソルは 0 になります。
任意の解 $\gamma^{(0)}_{\alpha\beta}$ は

$$\gamma^{(0)}_{\alpha\beta}=\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}+\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$$

としているので、リーマンテンソルにおいてワイル解 $\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}$ の項は消えて、$\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ のみが寄与します。つまり、ワイル解は線形化されたアインシュタイン方程式の解ですが、物理的には意味を持たない解です。

また、ミンコフスキー計量 $\eta_{\alpha\beta}$ にワイル解を加えた計量 $\eta_{\alpha\beta}+\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}$ は明らかにリーマンテンソルを 0 にします。これから、ワイル解 $\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}$ は重力とは無関係になっているのが分かるので、物理的に無意味と言えます。

計量に対しても見ておきます。今の計量は

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+\epsilon\gamma_{\alpha\beta}\ \Rightarrow\ -\delta_{\alpha\beta}+\epsilon\gamma_{\alpha\beta}$$

これに対して、座標変換

$$\overline{x}^{\mu}=x^{\mu}-\epsilon\phi_{\mu}$$

を行ってみます、計量の変換は

$$\overline{g}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\overline{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\overline{x}^{\nu}}g_{\alpha\beta}$$

これの微分は

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\overline{x}^{\mu}}=\delta^{\alpha}_{\mu}+\epsilon\frac{\partial\phi_{\alpha}}{\partial\overline{x}^{\mu}}$$

なので、変換後の計量は

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^\alpha + \epsilon\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\overline{x}^\mu})(\delta_\nu^\beta + \epsilon\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\overline{x}^\nu})(-\delta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta}) \\
&\simeq -\delta_{\mu\nu} + \epsilon(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta\gamma_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\nu}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\overline{x}^\mu} - \delta_{\beta\mu}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\overline{x}^\nu}) \\
&= -\delta_{\mu\nu} + \epsilon(\gamma_{\mu\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial\overline{x}^\mu} - \frac{\partial\phi_\mu}{\partial\overline{x}^\nu}) \\
&= -\delta_{\mu\nu} + \epsilon(\gamma_{\mu\nu} - (\phi_{\nu|\mu} + \phi_{\mu|\nu}))
\end{aligned}
$$

ワイル解 $\phi_{\nu|\mu} + \phi_{\mu|\nu}$ がいます。この項のために、元の計量

$$
g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta} + \epsilon(\gamma_{\alpha\beta}^{(w)} + \hat{\gamma}_{\alpha\beta})
$$

から、変換後では

$$
\overline{g}_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \epsilon\hat{\gamma}_{\mu\nu}
$$

となり、ワイル解が消えます。つまり、座標変換を上手く選べばワイル解は消せます。

このように、必要なのは $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ だけです。よって、解くべき方程式は $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ に対する

$$
\Box\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \tag{6}
$$

という波動方程式になります。$\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ の成分の関係は

$$
\sum_{\beta=0}^{3}(\hat{\gamma}_{\eta\beta|\beta} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_{\beta\beta|\eta}) = 0
$$

で与えられます。右辺は無限遠で 0 になるという境界条件から 0 にしてますが、一般的には定数です。

ワイル解を使って見てきましたが、今までやってきたことはゲージ変換です。すでに見た座標変換

$$
\overline{x}^\mu = x^\mu - \epsilon\phi^\mu
$$

が、一般相対性理論でのゲージ変換です。この座標変換によって計量が

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} + \epsilon\gamma_{\mu\nu} \\
\overline{g}_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} + \epsilon(\gamma_{\mu\nu} - (\phi_{\nu|\mu} + \phi_{\mu|\nu}))
\end{aligned}
$$

となり、$\gamma_{\alpha\beta}$ の変換は

$$
\overline{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - (\phi_{\nu|\mu} + \phi_{\mu|\nu})
$$

となっています。見てきたように、$\phi_{\nu|\mu}+\phi_{\mu|\nu}$ がいても物理に影響しません。一方で、電磁気のゲージ変換は、電磁場の 4 元ベクトル A_μ を $\overline{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ (Λ はスカラー関数) と変換しても物理が変わらないというものです。なので、この対応としてゲージ変換です。

また、ゲージ条件は

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta|\beta}=0$$

となっています。

・補足

ミンコフスキー計量のままでリッチテンソルを求めます。やることは同じです。計量は

$$g_{\alpha\beta}\simeq\eta_{\alpha\beta}+\epsilon\gamma_{\alpha\beta}$$

とします。ϵ が 1 次までのリッチテンソルは

$$R_{\mu\nu}\simeq\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \nu\end{matrix}\right\}_{|\alpha}-\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \mu\ \alpha\end{matrix}\right\}_{|\nu}$$

このクリストッフェル記号を求めます。

計量の行列式は

$$g=\det(g_{\alpha\beta})=\begin{vmatrix}1+\epsilon\gamma_{00} & \epsilon\gamma_{01} & \epsilon\gamma_{02} & \epsilon\gamma_{03}\\ \epsilon\gamma_{10} & -1+\epsilon\gamma_{11} & \epsilon\gamma_{12} & \epsilon\gamma_{13}\\ \epsilon\gamma_{20} & \epsilon\gamma_{21} & -1+\epsilon\gamma_{22} & \epsilon\gamma_{23}\\ \epsilon\gamma_{30} & \epsilon\gamma_{31} & \epsilon\gamma_{32} & -1+\epsilon\gamma_{33}\end{vmatrix}$$

なので、ϵ の 1 次の部分は

$$g\simeq-1-\epsilon\gamma_{00}+\epsilon\gamma_{11}+\epsilon\gamma_{22}+\epsilon\gamma_{33}$$

そうすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log|g| &\simeq \log[1+\epsilon(\gamma_{00}-\gamma_{11}-\gamma_{22}-\gamma_{33})]\\ &\simeq \epsilon(\gamma_{00}-\gamma_{11}-\gamma_{22}-\gamma_{33})\end{aligned}$$

これから

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha\ \mu \end{array} \right\}_{|\nu} = \frac{1}{2}(\log|g|)_{|\mu|\nu}
$$

$$
\simeq \frac{1}{2}\epsilon(\gamma_{00} - \gamma_{11} - \gamma_{22} - \gamma_{33})_{|\mu|\nu}
$$

$$
= \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta|\mu|\nu}
$$

もう１つのクリストッフェル記号は

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\} = \frac{\eta^{\alpha\beta} + \epsilon\gamma^{\alpha\beta}}{2}(g_{\beta\mu|\nu} + g_{\nu\beta|\mu} - g_{\mu\nu|\beta})
$$

$$
= \frac{\eta^{\alpha\beta} + \epsilon\gamma^{\alpha\beta}}{2}(\epsilon\gamma_{\beta\mu|\nu} + \epsilon\gamma_{\nu\beta|\mu} - \epsilon\gamma_{\mu\nu|\beta})
$$

$$
\simeq \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}(\epsilon\gamma_{\beta\mu|\nu} + \epsilon\gamma_{\nu\beta|\mu} - \epsilon\gamma_{\mu\nu|\beta})
$$

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|\alpha} = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2}(\epsilon\gamma_{\beta\mu|\nu} + \epsilon\gamma_{\nu\beta|\mu} - \epsilon\gamma_{\mu\nu|\beta})_{|\alpha}
$$

というわけで、ϵ の１次までの真空のアインシュタイン方程式は

$$
R_{\mu\nu} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{array} \right\}_{|\nu}
$$

$$
\simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\gamma_{\beta\mu|\nu} + \gamma_{\nu\beta|\mu} - \gamma_{\mu\nu|\beta})_{|\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta|\mu|\nu}
$$

$$
= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\gamma_{\nu\beta|\alpha|\mu} + \gamma_{\beta\mu|\alpha|\nu} - \gamma_{\mu\nu|\alpha|\beta} - \gamma_{\alpha\beta|\mu|\nu})
$$

となって、上で示した形になります。