真空でのアインシュタイン方程式

物質のない空間 (真空、自由空間) における重力の場の方程式を作ります。場と言っているのは、ニュートン力学のように時間と空間座標で指定される点の方程式ではなく、電磁場のように時間と空間座標を変数に持つ関数を考えるからです。

リーマン空間によって曲がった空間の数学を用意できたので、それを物理 (重力) とつなげる方程式を作ります。それがアインシュタイン方程式で、重力によって曲がった空間を与える方程式 (空間の計量を与える方程式) です。アインシュタイン方程式は考察からの推測であって、仮定です。ここでは物質のない空間の場合を扱います。

まずは、ニュートンの重力理論との対応として、非相対論的な極限で計量から重力ポテンシャルが出てくることを見ます。このとき、空間はほぼ平坦になっているとして、空間の計量はミンコフスキー計量に小さな寄与を加えたものを使います。

ミンコフスキー計量を $\eta_{\mu\nu}$ とし、時間に依存しない寄与を加えた

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\epsilon\gamma_{\mu\nu}$$

という計量を考えます。$\gamma_{\mu\nu}$ は時間依存を持たなく、ϵ は微小な定数です。これによって、平坦な空間が少し曲がった状況になります。$\epsilon\gamma_{\mu\nu}$ がニュートンの運動方程式における重力として出てくるかを確かめます。そのために、光速 c に比べて速度 v が小さいとする非相対論的な極限 $v\ll c$ ($\beta=v/c\ll 1$) を考えます。

この計量による線素は

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+\epsilon\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

これを $dt=dx^0/c$ で割って

$$\begin{aligned}(\frac{ds}{dt})^2&=c^2-v^2+\epsilon\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\\&=c^2(1-\beta^2+\epsilon\gamma_{\mu\nu}\frac{1}{c^2}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt})\\&=c^2(1-\beta^2+\epsilon\gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0})\end{aligned}$$

非相対論的な極限として、β は微小として β^2 を無視します。微分部分は $\mu,\nu=0$ なので

$$(\frac{ds}{dt})^2\simeq c^2(1+\epsilon\gamma_{00}) \tag{1}$$

となります。

今度は測地線方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\left\{\begin{array}{c}\alpha\\ \mu\ \nu\end{array}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0$$

を近似します。クリストッフェル記号は

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\} = g^{\alpha\beta}[\mu\nu,\beta] = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}})$$

で与えられており、ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は定数なのでクリストッフェル記号からは ϵ を係数にした項が出てきます。

測地線方程式の第二項の微分部分は (1) から

$$\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}(\frac{dt}{ds})^2 = \frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})}$$

時間微分は速度 v^{μ} として

$$\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})} = \frac{v^{\mu}}{c}\frac{v^{\nu}}{c}\frac{1}{(1+\epsilon\gamma_{00})}$$

$\mu,\nu \neq 0$ では、ローマ文字は $i = 1,2,3$ として

$$\frac{dx^{i}}{dt}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})} = \frac{v^{i}}{c}\frac{v^{j}}{c}\frac{1}{(1+\epsilon\gamma_{00})}$$

$v^i v^j/c^2$ なので、これは β^2 のオーダを持ちます。$\mu = 0, \nu \neq 0$ となっている場合では

$$\frac{dx^{0}}{dt}\frac{dx^{k}}{dt}\frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})} = \frac{cdt}{dt}v^k\frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})} = \frac{v^{\nu}}{c}\frac{1}{(1+\epsilon\gamma_{00})}$$

となるので β のオーダです。なので

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\ \nu \end{array} \right\}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}$$

の部分は $\mu,\nu = 0$ でないなら、$\epsilon\beta^2$ か $\epsilon\beta$ の項になります。ϵ,β はどちらも微小にしているので、$\mu,\nu = 0$ 以外は無視します。

よって、測地線方程式は

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\}(\frac{dx^0}{ds})^2 = 0$$

と近似できます。これを $\gamma_{\mu\nu}$ は時間依存性を持たないことと (1) を使って第一項を変形すれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} (\frac{dx^0}{ds})^2 \\
&= \frac{d^2x^\alpha}{dt^2}(\frac{dt}{ds})^2 + c^2 \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} (\frac{dt}{ds})^2 \\
&= \frac{1}{c^2(1+\epsilon\gamma_{00})}\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} \frac{1}{1+\epsilon\gamma_{00}} \\
&= \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + c^2 \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\}
\end{aligned}
$$

このクリストッフェル記号をさらに見ていきます。

クリストッフェル記号は

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = g^{\alpha\beta}[00,\beta] = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\frac{\partial g_{0\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{0\beta|0} + g_{\beta 0|0} - g_{00|\beta})
$$

計量は時間に依存していないので

$$
g_{\mu\nu|0} = 0
$$

そして、ミンコフスキー計量は定数なので $\eta_{\mu\nu|\lambda} = 0$ となっています。よって、x^0 による微分部分 $g_{0\beta|0}$, $g_{\beta 0|0}$ は消え、ミンコフスキー計量は消えるので

$$
[00,\beta] = -\frac{1}{2}g_{00|\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon\gamma_{00|\beta}
$$

第二種クリストッフェル記号に戻せば

$$
\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\epsilon\gamma_{00|\beta} = -\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} + \epsilon\gamma^{\alpha\beta})\epsilon\gamma_{00|\beta} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\epsilon\gamma_{00|\beta}
$$

$\gamma_{\mu\nu}$ は時間依存しないとしているので、時間成分 $\alpha, \beta = 0$ では 0 となることから (ミンコフスキー計量は $\alpha = \beta$ のときだけ 0 でない)、

$$
\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = 0
$$

と分かります。よって、測地線方程式

$$
\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + c^2 \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = 0
$$

での $\alpha = 0$ は成立しています。重力とは関係ないですが、これから分かることがあります。この測地線方程式は $v/c \ll 1$ の近似によって出てきて、計量が時間依存しないときに成立しています。このことから、$v/c \ll 1$ と時間依存しないという 2 つの条件は、片方の条件がもう片方の条件を要求する関係になっています。

今度は空間成分 $\alpha = i = 1, 2, 3$ を見ていきます。このときのクリストッフェル記号は

$$\left\{ \begin{array}{c} i \\ 0\ 0 \end{array} \right\} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{i\beta}\epsilon\gamma_{00|\beta} = \frac{1}{2}\epsilon\gamma_{00|i}$$

なので

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + c^2 \left\{ \begin{array}{c} i \\ 0\ 0 \end{array} \right\} = 0$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\epsilon\gamma_{00|i}$$

これは 3 次元ベクトルの式なので、力学に似せるために 3 次元ラプラシアン ∇ を使って書けば

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\epsilon\nabla\gamma_{00}$$

右辺の $c^2\epsilon\gamma_{00}/2$ を重力によるスカラーポテンシャル ϕ と思えば

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\nabla\phi$$

となって、重量に対するニュートンの運動方程式になります。このとき、$\epsilon\gamma_{00} = 2\phi/c^2$ なので、計量の g_{00} は

$$g_{00} = 1 + \epsilon\gamma_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}\phi \tag{2}$$

よって、ミンコフスキー計量に重力ポテンシャルが加わった形になり、平坦な空間を少し曲げる寄与は重力ポテンシャルに対応していると言えます。また、測地線方程式は非相対論的な極限によってニュートンの運動方程式になることも分かります。

相対論が理論として正しいかどうかを確かめる足がかりの 1 つは、今のように非相対論的な極限でニュートンの重力理論との対応が取れるかです。また、非相対論的な極限とニュートンの重力理論との対応は、シュバルツシルト解で出てくる任意な量を決めるためにも使われます。

重力ポテンシャルが出てきたところで、重力ポテンシャルの方程式を見ていきます。重力ポテンシャルに対するラプラス方程式は

$$\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^{3}\phi_{|i|i} = 0$$

ここでは、物質のない空間 (真空) の場合を考えるのでポアソン方程式でなく、ラプラス方程式を使います。

重力ポテンシャルは (2) から

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

$$\phi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1)$$

これをラプラス方程式に入れれば、非相対論的な極限を取った場合での計量の式として

$$\sum_{i=1}^{3} g_{00|i|i} = 0$$

これは i の縮約を持っています。なので、相対論的な方程式でも縮約が生じるだろうと予想でき、それはリーマンテンソルの縮約と考えます。

また、ラプラス方程式は 2 階微分によって構成されている式で、それにポテンシャルを計量で表したものを入れることで計量の 2 階微分が出てきました。なので、相対論的な方程式も計量の 2 階微分によって構成されていることを要求します。ついでに、準線形であることも要求します (これは偏微分方程式としての要求)。この場合の準線形は 2 階微分部分が線形で、1 階微分による項が線形でないことです。

計量の方程式を作るために、曲がった空間での情報を持っているリーマンテンソルを使います。例えば、ミンコフスキー計量はリーマンテンソルが $R_{\alpha\beta\gamma\rho} = 0$ のときの計量です。また、相対論では解としてミンコフスキー計量を持たなければいけないので、$R_{\alpha\beta\gamma\rho} = 0$ をより一般的にしたものと考えられます。

というわけで、リーマンテンソル $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ の縮約を取ったもので方程式を作ります。すでに、「リッチテンソル」で求めたように、リーマンテンソルの縮約で意味のあるのはリッチテンソルだけなので

$$R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\rho} = R_{\beta\rho}$$

を使います。よって、今の考え方から、真空における重力の場の方程式は

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\}_{|\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\}_{|\nu} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\ \nu \end{matrix} \right\} = 0$$

とします。これが真空でのアインシュタイン方程式で、クリストッフェル記号を計量で書けば計量の 2 階偏微分方程式です。これにはミンコフスキー計量が解の 1 つとして含まれていて、2 階微分と 1 階微分によって構成されていて準線形です。準線形なのは、第一項と第二項から出てくる計量の 2 階微分は線形で、第三項と第四項から 1 階微分の非線形な項が出てくるからです。

注意ですが、リッチテンソルが 0 になったからといって空間が平坦であるとは言えません。平坦になるのはリーマンテンソルの全ての成分が 0 になるときです。

というわけで、一般相対性理論はアインシュタイン方程式を解くことで重力による空間の性質を調べ、その空間上での運動を測地線方程式から求めるということをします。