重力崩壊

ロバートソン・ウォーカー計量の宇宙論以外での使用例として、簡単な重力崩壊のモデルを見ていきます。
地平面とかの面倒なことは考えずに単に、星の物質が重力によって自由落下していくという状況を考えます。

星が細かい物質 (ダスト、dust。圧力のない物質) の集まりとして簡単なモデルを考えます (星と言わずにダストボールと言ったりします)。空間は一様で等方な球対称とし、球体内部に分布している物質による共動座標を取ります。そして、一様、等方に分布している物質は重力によって自由落下しているとして、圧力は無視します。この設定は「ロバートソン・ウォーカー解」でのものと同じなので、計量はロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = c^2d\tau^2 - a^2(\tau)(\frac{1}{1-ku^2}du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2))$$

になります。これは星の内部の空間に対する計量なので、星の外部の計量も設定しておく必要があります。星の外部は単純にシュバルツシルト計量

$$ds^2 = (1-\frac{2m}{r})(cdt)^2 - (1-\frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

を使います (バーコフの定理から時間依存をつけてもシュバルツシルト計量になる)。重要なのは、各計量による星の表面の動径の位置 u_d, r_d でロバートソン・ウォーカー計量とシュバルツシルト計量が対応しなくてはいけない点です。ロバートソン・ウォーカー計量の形をシュバルツシルト計量の形に近づけて比較することで確かめることもできますが、単純にはロバートソン・ウォーカー計量とシュバルツシルト計量の角度部分が

$$r(t) = a(\tau)u$$

で一致しているために、r_d と u_d は

$$r_d(t) = a(\tau)u_d$$

となっていると予想できます。これは後で実際に確かめます (もしくは、計量の時間成分も適当に座標変換して比較すると、これで一致することが確かめられる)。u_d は共動座標を取っているために時間に依存しません。また、r と au はそれぞれの計量での半径のように扱われることからもこのようになっているのは予想できます。
物質分布は「ロバートソン・ウォーカー解」でのものと同じにすることで、$a(\tau)$ に対する微分方程式の基本的なものは

$$\frac{3}{c^2}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)} + \frac{3k}{a^2(\tau)} = \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \tag{1}$$

$$\frac{2}{c^2}\frac{a''(\tau)}{a(\tau)} + \frac{1}{c^2}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)} + \frac{k}{a^2(\tau)} = -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{p}{c^2} \tag{2}$$

$$\frac{3}{c^2}\frac{a''(\tau)}{a(\tau)} = -\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\rho + \frac{3p}{c^2}) \tag{3}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{a''(\tau)}{a(\tau)} - \frac{1}{c^2}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)} - \frac{k}{a^2(\tau)} = -\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2} + \rho) \tag{4}$$

「$'$」は τ 微分、ρ は物質密度、p は圧力です (宇宙定数は 0 にしています)。下 2 つは上 2 つの式から出てくるものです。星の大きさが変化する過程を見ていくので、ρ は τ に依存しています。圧力は 0 とするので、これらの $p=0$ としたものを使います。

準備できたので、星内部でのダストの動きを求めます。必要なのは $a(\tau)$ なので、$a(\tau)$ の微分方程式を解きます。ρ を消すように (1) と (3) を合わせると

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{6}{c^2}\frac{a''(\tau)}{a(\tau)} + \frac{3}{c^2}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)} + \frac{3k}{a^2(\tau)} \\
&= 2a(\tau)a''(\tau) + a'^2(\tau) + kc^2 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

これをさらに変形させると

$$
\begin{aligned}
0 &= 2a(\tau)a'(\tau)a''(\tau) + a'^3(\tau) + kc^2 a'(\tau) \\
&= (a(\tau)a'^2(\tau))' + kc^2 a'(\tau)
\end{aligned}
$$

この形から、$a'^2(\tau)$ は

$$
a'^2(\tau) = \frac{A}{a(\tau)}c^2 - kc^2 \qquad (6)
$$

となっていればいいことが分かります (A は定数。c^2 は A を長さの次元にするために入れてます)。これを (5) に入れると

$$
\begin{aligned}
0 &= 2a(\tau)a''(\tau) + \frac{A}{a(\tau)}c^2 - kc^2 + kc^2 \\
&= 2a^2(\tau)a''(\tau) + Ac^2 \\
a''(\tau) &= -\frac{Ac^2}{2a^2(\tau)}
\end{aligned}
$$

さらに、(3) にこれを入れると

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{c^2}\frac{Ac^2}{a^3(\tau)} &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\rho \\
A &= \frac{8\pi\kappa}{3c^2}a^3\rho
\end{aligned}
$$

となって A が決定できます。

ここに $\tau = 0$ での条件を与えるために、エネルギー・運動量テンソルの保存

$$
T^{\mu}{}_{\nu||\mu} = 0
$$

を持ち出します。$T^0_{\ 0}=\rho$ で、他の成分は 0 なので

$$0=T^\mu_{\ 0||\mu}=\frac{\partial}{\partial x^0}T^0_{\ 0}+\Gamma^\mu_{\alpha\mu}T^\alpha_{\ 0}-\Gamma^\alpha_{0\mu}T^\mu_{\ \alpha}=\frac{\partial}{\partial x^0}\rho+\Gamma^\mu_{0\mu}\rho=\frac{\partial}{\partial x^0}\rho+\frac{3}{2}G'(x_0)\rho$$

「ロバートソン・ウォーカー解」で求めたクリストッフェル記号の成分を使っています。これを変形すると

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial x^0}\rho+\frac{3}{2}G'(x_0)\rho\\&=e^{3G/2}\frac{\partial}{\partial x^0}\rho+\frac{3}{2}e^{3G/2}G'(x_0)\rho\\&=\frac{\partial}{\partial x^0}(\rho e^{3G/2})\\&=\frac{\partial}{\partial x^0}(\rho a^3(\tau))\end{aligned}$$

これから、$\rho a^3(\tau)$ は定数と分かります (「ロバートソン・ウォーカー解」では $a^2(\tau)=r_0^2e^{G(x_0)}$ と定義しましたが、r_0 は定数なので省きました)。ちなみに、同じ結果は (1) を τ 微分した

$$\begin{aligned}\frac{3}{c^2}\frac{d}{d\tau}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)}+3k\frac{d}{d\tau}\frac{1}{a^2(\tau)}&=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho\\\frac{3}{c^2}(\frac{2a'(\tau)a''(\tau)}{a^2(\tau)}-\frac{2a'^3(\tau)}{a^3(\tau)})-6k\frac{a'(\tau)}{a^3(\tau)}&=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho\\\frac{6}{c^2}\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}(\frac{a''(\tau)}{a(\tau)}-\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)})-6k\frac{a'(\tau)}{a^3(\tau)}&=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho\\\frac{6}{c^2}\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\frac{d}{d\tau}(\frac{a'(\tau)}{a(\tau)})-6k\frac{a'(\tau)}{a^3(\tau)}&=\frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho\end{aligned}$$

これに (4) を変形した (p を消さないで行っておきます)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{a''(\tau)}{a(\tau)}-\frac{1}{c^2}\frac{a'^2(\tau)}{a^2(\tau)}-\frac{k}{a^2(\tau)}&=-\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2}+\rho)\\\frac{1}{c^2}\frac{d}{d\tau}(\frac{a'(\tau)}{a(\tau)})&=\frac{k}{a^2(\tau)}-\frac{4\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2}+\rho)\end{aligned}$$

を入れると

$$
\begin{aligned}
\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\frac{6k}{a^2(\tau)}-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\frac{24\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2}+\rho)-\frac{6k}{a^3(\tau)}a'(\tau) &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho \\
-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\frac{24\pi\kappa}{c^2}(\frac{p}{c^2}+\rho) &= \frac{8\pi\kappa}{c^2}\frac{d}{d\tau}\rho \\
-3\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\frac{p}{c^2} &= \frac{d}{d\tau}\rho+3\frac{a'(\tau)}{a(\tau)}\rho \\
-3a^2(\tau)a'(\tau)\frac{p}{c^2} &= a^3(\tau)\frac{d}{d\tau}\rho+3a^2(\tau)a'(\tau)\rho \\
-\frac{p}{c^2}\frac{da^3(\tau)}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}(\rho a^3)
\end{aligned}
$$

よって、$p=0$ では ρa^3 が定数になります。

$\rho(\tau)a^3(\tau)$ が定数であることを利用して $\rho(\tau)a^3(\tau)=\alpha_0=$ 定数、とすれば

$$
\rho(\tau)=\alpha_0 a^{-3}(\tau)
$$

この条件によって (6) は

$$
\begin{aligned}
a'^2(\tau) &= \frac{Ac^2}{a(\tau)}-kc^2 \\
&= \frac{8\pi\kappa}{3}\rho(\tau)a^2(\tau)-kc^2 \\
&= \frac{8\pi\kappa}{3}\alpha_0 a^{-1}(\tau)-kc^2
\end{aligned}
$$

さらに $\tau=0$ で静止していると考えて、$a'(\tau=0)=0$ とすれば

$$
k=\frac{8\pi\kappa}{3c^2}\alpha_0 a_0^{-1}\quad (a_0=a(\tau=0))
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
a'^2(\tau) &= \frac{8\pi\kappa}{3}\alpha_0 a^{-1}(\tau)-\frac{8\pi\kappa}{3}\alpha_0 a^{-1}(0) \\
&= \frac{8\pi\kappa}{3}\alpha_0 a_0^{-1}(a_0 a^{-1}(\tau)-1) \\
&= kc^2(a_0 a^{-1}(\tau)-1)
\end{aligned}
$$

この微分方程式は半径 r の円によるサイクロイドの微分方程式

$$
(\frac{dy}{dx})^2=\frac{2r}{y}-1\qquad (\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})
$$

$$
x=r(\theta-\sin\theta)\ ,\ y=r(1-\cos\theta)
$$

に対応しているので (ちなみに、位相が π ずれた場合とすると三角関数の符号が反転する)、この形に変換することで

$$
\begin{aligned}
(\frac{da}{d\tau})^2 &= kc^2(a_0a^{-1}(\tau)-1)\\
(\frac{d\overline{a}}{d\tau})^2 &= \frac{a_0}{\sqrt{kc^2}}\overline{a}^{-1}-1 \quad (\sqrt{kc^2}\overline{a}=a)
\end{aligned}
$$

なので、解は

$$
\tau=\frac{a_0}{2\sqrt{kc^2}}(\theta-\sin\theta)\ ,\ a=\sqrt{kc^2}\overline{a}=\frac{a_0}{2}(1-\cos\theta)
$$

となります。この解から、$\theta=2\pi$ のとき、$\tau=a_0\pi/\sqrt{kv^2}$ の有限の時間で $a=0$ になることが分かります。つまり、有限の時間でダストは $a=0$ に到達できるために、星が崩壊することが可能になっています。というわけで、これは重力崩壊の簡単なモデルとなっています。崩壊が完全に行われた後はシュバルツシルト計量による空間 $(0<r<\infty)$ になるので、シュバルツシル空間での話になります。

次に、星の表面 r_d, u_d で 2 つの計量が接続されていることを見ます。簡単にみるために、$k\neq 0$ でなく $k=0$ とします。$k=0$ での微分方程式は (6) から

$$
a'^2(\tau)=\frac{A}{a(\tau)}c^2 \tag{7}
$$

この形から、$a(\tau)$ が無限大のときにしか $a'(\tau)$ は 0 にならないことが分かります。このため、上で設定したように $a'(\tau=0)=0$ のような条件によって静止した状態を作るためには、無限大の過去において $a(\tau)$ が無限大になっていると仮定する必要があります。これは現実的にはおかしな仮定ですが、ここでは問題がないので気にせず進めます。

解自体は簡単に出てくるので、先に定数 A を見ておきます。$k=0$ でのロバートソン・ウォーカー計量での体積要素 dV は

$$
dV=\sqrt{-g}dud\theta d\varphi=a^3u^2\sin\theta dud\theta d\varphi
$$

なので、星の表面までの半径 u_d を使って、星の質量 M を求めてみると

$$
M=\rho V=\int_0^{u_d}\rho dV=\rho\int_0^{u_d}a^3u^2\sin\theta dud\theta d\varphi=\rho a^3\frac{4\pi}{3}u_d^3
$$

これと A を比較してみると

$$
\frac{2\kappa}{c^2}M=u_d^3A
$$

そして、シュバルツシルト半径 $r_s=2m=2\kappa M/c^2$ を持ち出すと

$$
2m=u_d^3A \tag{8}
$$

と書けます。これによって、シュバルツシルトとロバートソン・ウォーカーでの物理量による接続ができます。
　これを踏まえて (7) を解いてみると

$$\begin{aligned}(u_d a'(\tau))^2 &= \frac{A}{a(\tau)}u_d^2c^2 \\ D'^2 &= \frac{A}{D}u_d^3c^2 \qquad (D = u_d a) \\ D' &= \pm\sqrt{\frac{u_d^3A}{D}}c \\ \int D^{1/2}dD &= \pm\int\sqrt{u_d^3A}cd\tau \\ \frac{2}{3}D^{3/2} &= C \pm \sqrt{u_d^3A}c\tau \\ (u_d a)^{3/2} &= C \pm \frac{3}{2}\sqrt{u_d^3A}c\tau\end{aligned}$$

$\tau = 0$ で $C = u_d a(0)$ となるとして

$$(u_d a)^{3/2} = (u_d a(0))^{3/2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{u_d^3A}c\tau$$

$\pm$ の 2 つの解が出てきていますが、プラスでは τ の増加によって明らかに膨張していくので、マイナスの方を使います。これに (8) を入れると

$$(u_d a)^{3/2} = (u_d a(0))^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{2m}\tau$$

となります。
　今度はシュバルツシルトでの r_d の変化を見ます。これは「近日点」で出てきた

$$1 = (1-\frac{2m}{r})^{-1}c^2l^2 - (1-\frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}$$

これを使えばすぐに分かります (τ と区別するために s 微分をドットにしています)。動径方向のみとして $h = 0$ とすれば、r_d は

$$c^2l^2 - \dot{r}_d^2 = 1 - \frac{2m}{r_d}$$

r_d が無限大で $\dot{r}_d$ が 0 になるようにするために、$l^2 = 1/c^2$ と取れば

$$\dot{r}_d^2 = \frac{2m}{r_d}$$

この方程式は (7) に (8) を入れた

$$(u_d a'(\tau))^2 = \frac{2m}{u_d a(\tau)}c^2$$

と $r_d = u_d a(\tau)$ で同形になります。そして、τ 微分を $c\tau$ に置き換えれば完全に一致するので、$c\tau$ は固有時間である s に対応することも分かります (星の表面の内側と外側で同じ軌道を描く)。