表記と定義

表記と基本的な記号の定義をまとめています。よく使う関係もいくつか載せています。
余計な混乱を招かないように、添え字は全て 4 次元 (0 ∼ 3) だとしてしまいます。

- 計量の符号は $(+, -, -, -,)$
- 4 次元時空とせずに 4 次元空間と言っていきます
- **変換則** (「テンソル解析」)
    - 反変ベクトルの変換則

$$\overline{V}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} V^j$$

    - 共変ベクトルの変換測

$$\overline{V}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} V_j$$

    - テンソルの変換測

$$\overline{T}^{k_1 \cdots k_a}_{l_1 \cdots l_b} = (\frac{\partial \overline{x}^{k_1}}{\partial x^{m_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{k_a}}{\partial x^{m_a}})(\frac{\partial x^{n_1}}{\partial \overline{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{n_b}}{\partial \overline{x}^{l_b}}) T^{m_1 \cdots m_a}_{n_1 \cdots n_b}$$

- **テンソル密度** (「テンソル解析」)
  テンソル密度はテンソル $T^{ab\cdots}_{cd\cdots}$ によって

$$t^{ab\cdots}_{cd\cdots} = \sqrt{-g} T^{ab\cdots}_{cd\cdots}$$

  テンソル密度の変換則

$$\overline{t}^{ij}_{mn} = \sqrt{-g} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^a} \frac{\overline{x}^j}{\partial x^b} \cdots \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^d}{\partial \overline{x}^n} \cdots t^{ab\cdots}_{cd\cdots}$$

- **計量テンソル** (「テンソル解析」)
  計量は g_{ik} とし、線素 ds は

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

  行列式と計量の微分

$$g = \det g_{ik}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} g^{jk} = -g_{ij} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^a}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} = g^{ik} \ , \ \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g^{ik}} = -g_{ik}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^k}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}$$

最後の二つは「共変微分」参照

- **クリストッフェル記号** (「アフィン接続と平行移動」)
  - 第一種

$$[ik, l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)$$

  - 第二種

$$\left\{ \begin{array}{c} j \\ i\ k \end{array} \right\} = \Gamma^j_{ik} = g^{jl}[ik, l] = \frac{1}{2} g^{jl}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)$$

下 2 つの文字に関して対称

$$\left\{ \begin{array}{c} j \\ i\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} j \\ k\ i \end{array} \right\} \ , \ \Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$$

  - 変換則

$$\overline{\Gamma}^c_{ab} = \frac{\partial \overline{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial^2 \overline{x}^c}{\partial x^k \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b} = \frac{\partial \overline{x}^c}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b}\Gamma^i_{kj} + \frac{\partial \overline{x}^c}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b}$$

  - 関係

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{il}\Gamma^l_{jk} + g_{jl}\Gamma^l_{ik}$$

$$\Gamma^k_{jk} = \frac{1}{2} g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^l}\log\sqrt{-g}$$

2 番目の式の最右辺は「共変微分」。

- 平行移動

$$d\xi^i = -\Gamma^j_{ik} dx^\alpha \xi^\beta$$

- **共変微分 (リーマン空間)**(「共変微分」)
  - スカラー

$$\phi_{||i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \phi_{|i} \quad ((A_i B^i)_{||k} = (A_i B^i)_{|k})$$

  - 反変ベクトル

$$A^i_{||k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} A^l = A^i_{|k} + \Gamma^i_{kl} A^l$$

  - 共変ベクトル

$$A_{i||k} = A_{i|k} - \Gamma^l_{ik} A_l$$

  - テンソル

$$T^{ij}{}_{k||l} = T^{ij}{}_{k|l} + \Gamma^i_{lm} T^{mj}{}_k + \Gamma^j_{lm} T^{mi}{}_k - \Gamma^m_{lk} T^{ij}{}_m$$

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{a_1 a_2 \cdots a_n ||k} = T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{a_1 a_2 \cdots a_n |k} + \sum_{s=1}^{m} \Gamma^{i_s}_{kl} T^{i_1 \cdots i_{s-1} l i_{s+1} \cdots i_m}_{a_1 a_2 \cdots a_n} - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^l_{k a_s} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{a_1 \cdots a_{s-1} l a_{s+1} \cdots a_n}$$

  - テンソル密度

$$\mathcal{V}^i_{||a} == \mathcal{V}^i_{|a} + \Gamma^i_{aj} \mathcal{V}^j - W \Gamma^j_{ja} \mathcal{V}^i$$

$$\mathcal{T}^{ij}_{||a} == \mathcal{T}^{ij}_{|a} + \Gamma^i_{ak} \mathcal{T}^{kj} + \Gamma^j_{ak} \mathcal{T}^{ik} - W \Gamma^j_{ja} \mathcal{T}^{ij}$$

  - 計量テンソル、クロネッカーデルタ、レヴィ・チビタテンソル密度

$$g_{ab||i} = 0$$

$$\delta^a_{b||i} = 0$$

$$\epsilon^{abcd}_{||i} = 0$$

- 発散

$$\xi^i_{||i} = \mathrm{div}\boldsymbol{\xi} = \xi^i_{|i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ i\ k \end{matrix} \right\} \xi^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\xi^i \sqrt{-g}]_{|i}$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k\ l \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^l} \log \sqrt{-g}$$

- ラプラシアン

$$\nabla^2 f = \mathrm{div}(g^{ik} f_{|k}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} [g^{ik} f_{|k} \sqrt{-g}]_{|i}$$

- 回転

$$A_{i||k} - A_{k||i} = A_{i|k} - A_{k|i}$$

- **不変体積要素**（「共変微分」）

$$\sqrt{-g} d^4 x = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

- **リー微分**（「共変微分」）

t^i 方向のリー微分 $\mathfrak{L}_t$

・スカラー

$$\mathfrak{L}_t \phi = \phi_{|i} t^i = \phi_{||i} t^i$$

・反変ベクトル

$$\mathfrak{L}_t A^i = A^i_{||j} t^j - t^i_{||j} A^j$$

・共変ベクトル

$$\mathfrak{L}_t A_i = A_{i||j} t^j + t^j_{||i} A_j$$

・テンソル

$$\mathfrak{L}_t T^{ij} = T^{ij}_{||k} t^k - T^{kj} t^i_{||k} - T^{ik} t^j_{||k}$$

$$\mathfrak{L}_t T_{ij} = T_{ij||k} t^k + T_{kj} t^k_{||i} + T_{ik} t^k_{||j}$$

$$\mathfrak{L}_t T^i{}_j = T^i{}_{j||k} t^k - T^k{}_j t^i_{||k} + T^i{}_k t^k_{||j}$$

・計量

$$\mathfrak{L}_t g_{ij} = t_{i||j} + t_{j||i}$$

・スカラー密度 $s = \sqrt{-g} S$

$$\mathfrak{L}_t s = t^i s_{:i} + s t^i_{:i}$$

- **テンソルの対称**

$$T_{ikl} = T_{kil} = T_{lik}$$

- **テンソルの反対称**

$$T_{ikl} = -T_{kil} = T_{lik}$$

- **対称化・反対称化**

・対称化

$$(T_{ikl}) = T_{(ikl)} = \frac{1}{3!}(T_{ikl} + T_{kil} + T_{kli} + T_{ilk} + T_{lik} + T_{lki})$$

・反対称化

$$\{T_{ikl}\} = T_{\{ikl\}} = \frac{1}{3!}(T_{ikl} - T_{kil} + T_{kli} - T_{ilk} + T_{lik} - T_{lki})$$

- **リーマン曲率テンソル**

$$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta\ \gamma \end{array} \right\}_{|\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta\ \beta \end{array} \right\}_{|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \eta\ \beta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\ \mu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \eta\ \gamma \end{array} \right\}$$

独立成分は 20 個

・対称性

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma} = -R_{\eta\alpha\beta\gamma}$$

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma} = -R_{\alpha\eta\gamma\beta}$$

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\eta}$$

$$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma}\}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = 0$$

- **ビアンキの恒等式**

$$R_{\alpha\eta\beta\gamma||\delta} + R_{\alpha\eta\delta\beta||\gamma} + R_{\alpha\eta\gamma\delta||\beta} = 0$$

- **キリング方程式**

$$\mathfrak{L}_t g_{\mu\nu} = 0$$

$$t_{\sigma||\rho} + t_{\rho||\sigma} = 0$$

t_σ はキリングベクトル

- **測地線方程式**

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j\ k \end{array} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$