# トライアドによる ADM 形式

テトラッドを使った例として、ADM 形式をテトラッドによる表現に書き換えます。書き換えを行うだけなので、物理的な意味については触れてません。
ここで出てくる記号は「ハミルトニアン密度」、「正準方程式」で定義しているので、そっちを見てください。ギリシャ文字は 0 ～ 4、ローマ文字の添え字は 1 ～ 3 とします。後半でトライアドの添え字が出てきますが、それは括弧をつけて区別します。
計量 (一般化座標)$g_{\mu\nu}, h_{ij}, q^{ij}, Q^{ij}$ の行列式は $g, h, q, Q$ のように書いていますが、その共役量を添え字なしで書いているときはトレースです

最初に ADM 形式を正準変換して、その後にテトラッドによる表現に書き換えます。正準変換する必要性は特にないんですが、ADM 形式の書き換え例として簡単に示します。また、テトラッドと言っていますが、ADM 形式は 3 次元なので、テトラッドの 3 次元版であるトライアドを使うことになります。

ADM 形式のラグランジアンを違う変数によって書き換えてみます (Faddeev と Popove によって導入された変換)。詳細は省いて簡単に見ていきます。まず 4 次元計量 $g^{\mu\nu}$ から $g'^{\mu\nu}$ を

$$g'^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \quad (g = \det g_{\mu\nu})$$

として

$$q^{ik} = (g'^{0i}g'^{k0} - g'^{00}g'^{ik})$$

というのを定義します。$g$ は $g_{\mu\nu}$ の行列式、$i, k = 1, 2, 3$ です。時間一定とした超曲面上での 3 次元計量 $h_{ij}$ と 4 次元計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$h_{ij} = g_{ij}$$

となっています。上付きの場合は、$h^{ij}$ と 4 次元計量 $g^{\mu\nu}$ が

$$h^{ik}h_{kj} = \delta^i_j \ , \ g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$$

と定義されているために、この二つは

$$h^{ik} = g^{ik} - \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}} \tag{1}$$

という関係を持ちます。なぜなら

$$
\begin{aligned}
h^{ik}h_{kj} &= g^{ik}h_{kj} - \frac{g^{0i}g^{0k}h_{kj}}{g^{00}} \\
&= g^{ik}g_{kj} - \frac{g^{0i}g^{0k}g_{kj}}{g^{00}} \\
&= g^{i\mu}g_{\mu j} - g^{i0}g_{0j} - \frac{g^{0i}(g^{0\mu}g_{\mu j} - g^{00}g_{0j})}{g^{00}} \\
&= \delta^i_j - g^{i0}g_{0j} - \frac{g^{0i}(\delta^0_j - g^{00}g_{0j})}{g^{00}} \\
&= \delta^i_j - g^{i0}g_{0j} + g^{0i}g_{0j} \\
&= \delta^i_j
\end{aligned}
$$

となるからです。$g^{00} = h/g$ を使って ($h = \det h_{ij}$)、$q^{ik}$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
q^{ik} &= -g(g^{0i}g^{k0} - g^{00}g^{ik}) \\
&= -\frac{h}{g^{00}}(g^{0i}g^{k0} - g^{00}g^{ik}) \\
&= h(g^{ik} - \frac{g^{0i}g^{k0}}{g^{00}})
\end{aligned}
$$

これと (1) を比べれば

$$
q^{ik} = hh^{ik} \tag{2}
$$

と書けることが分かります。$q^{ik}$ の行列式 $q = \det q^{ik}$ はこの式から

$$
q = \det(hh^{ik})
$$

$\det h^{ik}$ は

$$
\begin{aligned}
\det(h^{ik}h_{kj}) &= \det \delta^i_j \\
\det h^{ik} \det h_{kj} &= 1 \\
h \det h^{ik} &= 1 \\
\det h^{ik} &= h^{-1}
\end{aligned}
$$

となっているので

$$
q = h^3h^{-1} = h^2
$$

これより、$h^{ik}$ を $q^{ik}$ を使って書けて

$$h^{ik} = \frac{1}{\sqrt{q}} q^{ik}$$

のようになっています。

新しい変数 $q^{ik}$ を一般化座標として、その共役量を求めます。$q^{ik}$ の導入で ADM 形式の正準関係が壊れては変更する意味がないので、(2) が正準変換になっているるようにします。つまり、変分に対して

$$p_{ik}\delta q^{ik} = \pi^{ik}\delta h_{ik}$$

という関係になることを要請します ($p_{ik}$ は $q^{ik}$ の共役量、$\pi^{ik}$ は $h_{ik}$ の共役量)。導出は省きますが、この関係を満たすような $p_{ik}$ は

$$p_{ik} = \frac{1}{h}(\frac{1}{2}h_{ik}h_{ab} - h_{ia}h_{kb})\pi^{ab} \tag{3a}$$

$$\pi^{ab} = \frac{1}{\sqrt{q}}(q^{ik}q^{ab} - q^{ai}q^{bk})p_{ik} \tag{3b}$$

となっています。これによって、$p_{ik}$ と $\dot{q}^{ik}$ は $\pi^{ik}\dot{h}_{ik}$ と

$$p_{ik}\dot{q}^{ik} = \pi^{ik}\dot{h}_{ik}$$

このような関係になります。正準変換なので、当然ポアソン括弧も変更されなく

$$\{q^{ik}(x_1), p_{ab}(x_2)\}_P = \frac{1}{2}(\delta^i_a\delta^k_b + \delta^i_b\delta^k_a)\delta(x_1 - x_2)$$

$$\{q^{ik}(x_1), q^{ab}(x_2)\}_P = \{p_{ik}(x_1), p_{ab}(x_2)\}_P = 0$$

ADM 形式での作用は

$$I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y\mathcal{L} = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y(\pi^{ab}\dot{h}_{ab} - NS - N_aV^a)$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{h}[-{}^{(3)}R + \frac{1}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2})] \quad (\pi = \pi^a{}_a) \\ V^a &= -2\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab})_{:b} \end{aligned}$$

これを今の場合に書き換えれば

$$I=\int dt\int_{\Sigma_t}d^3y\mathcal{L}=\int dt\int_{\Sigma_t}d^3y(p_{ab}\dot{q}^{ab}-NS-N^aV_a)$$

リーマンテンソルも $q^{ik}$ によって表現されます。拘束条件 $S$ は (3a),(3b) を使うことで

$$\begin{aligned}
S&=\sqrt{h}\big[-{}^{(3)}R+\frac{1}{h}(\pi_{ab}\pi^{ab}-\frac{\pi^2}{2})\big]\\
&=\sqrt{h}\big[-{}^{(3)}R+\frac{1}{h}\big(h_{ia}h_{jb}\pi^{ij}\pi^{ab}-\frac{1}{2}(h_{ij}h_{ab}\pi^{ij}\pi^{ab})\big)\big]\\
&=\sqrt{h}\big[-{}^{(3)}R+\frac{1}{h}(-\frac{1}{2}h_{ij}h_{ab}+h_{ia}h_{jb})\pi^{ij}\pi^{ab}\big]\\
&=\sqrt{h}[-{}^{(3)}R-\pi^{ij}p_{ij}]\\
&=\sqrt{h}\big[-{}^{(3)}R-\frac{1}{\sqrt{q}}(q^{ab}q^{ij}-q^{ia}q^{jb})p_{ab}p_{ij}\big]\\
&=q^{1/4}\big[-{}^{(3)}R+\frac{1}{\sqrt{q}}(q^{ia}q^{jb}-q^{ab}q^{ij})p_{ab}p_{ij}\big]
\end{aligned}$$

$V_a$ は (2),(3b) を使って

$$\begin{aligned}
V_a=&\ -2h_{ia}\sqrt{h}(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ib})_{:b}\\
=&\ -2q^{1/4}h_{ia}(\frac{1}{q^{1/4}}\pi^{ib})_{:b}\\
=&\ -2q^{1/4}h_{ia}\Big(\frac{1}{q^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{q}}(q^{mn}q^{ib}-q^{im}q^{bn})p_{mn}\Big)_{:b}\\
=&\ -2q^{1/4}h_{ia}\Big(\frac{1}{q^{1/4}}\frac{h^2}{\sqrt{q}}(q^{mn}q^{ib}-q^{im}q^{bn})p_{mn}\Big)_{:b}\\
=&\ -2q^{1/4}h_{ia}\big(q^{1/4}(h^{mn}h^{ib}p_{mn}-h^{im}h^{bn}p_{mn})\big)_{:b}\\
=&\ -2q^{1/4}h_{ia}\big[(q^{1/4}h^{mn}h^{ib}p_{mn})_{:b}-(q^{1/4}h^{im}h^{bn}p_{mn})_{:b}\big]\\
=&\ -2q^{1/4}\big[h^{mn}(q^{1/4}p_{mn})_{:a}-h^{bn}(q^{1/4}p_{an})_{:b}\big]\\
=&\ -2q^{1/4}\big[h^{bn}(q^{1/4}p_{bn})_{:a}-h^{bn}(q^{1/4}p_{an})_{:b}\big]\\
=&\ 2q^{1/4}\frac{q^{bi}}{\sqrt{q}}\big[(q^{1/4}p_{ai})_{:b}-(q^{1/4}p_{bi})_{:a}\big]\\
=&\ 2q^{-1/4}q^{bi}\big[(q^{1/4}p_{ai})_{:b}-(q^{1/4}p_{bi})_{:a}\big]
\end{aligned}$$

$V^a$ は下付きのほうが綺麗に書けるので、下付きに変更しています。

このように書き換えられた ADM 形式をテトラッドで表現します。3 次元なので、テトラッドの 3 次元版であるトライアド (triad) を使います。トライアドの定義はテトラッドを超曲面上の 3 次元にするだけなので、トライアド $e^{(a)}_i(a=1,2,3)$ は

$$e^{(a)}_ie^j_{(a)}=\delta^j_i\ ,\ e^{(a)}_ie^{(a)}_j=h_{ij}\ ,\ e^i_{(a)}e^j_{(a)}=h^{ij}\ ,\ e^{(a)}_ie^i_{(c)}=\delta^{(a)}_{(c)}$$

と定義できます。括弧付きの添え字がトライアドの添え字です。そして、時間一定での超曲面での話なので、テトラッドでの $e^{\mu}_{(\lambda)}$ は

$$e^{\mu}_{(0)} = n^{\mu}$$

という制限がかかります ($n^{\mu}$ は超曲面に対する単位法線ベクトル)。トライアドの行列式 $e = \det e_i^{(a)}$ は

$$\begin{aligned}
\det h_{ij} =&\ \det(e_i^{(a)} e_j^{(a)}) \\
=&\ \det(e_i^{(a)} e_j^{(b)} \delta^{(a)}_{(b)}) \\
=&\ \det(e_i^{(a)}) \det(e_j^{(b)}) \det(\delta^{(a)}_{(b)}) \\
h =&\ (\det(e_i^{(a)}))^2 \\
h =&\ e^2
\end{aligned}$$

$\det(e^i_{(a)})$ は $e^i_{(a)} e_j^{(a)} = \delta^i_j$ なので、$\det(e^i_{(a)}) = e^{-1}$ です。このことから、新しく

$$Q^i_{(a)} = e e^i_{(a)} = \sqrt{h} e^i_{(a)} \tag{4}$$

という変数を導入し

$$Q^i_{(a)} Q_j^{(a)} = \delta^i_j$$

となっているとします。なので、$Q_j^{(a)}$ は

$$Q^i_{(a)} Q_j^{(a)} = \sqrt{h} e^i_{(a)} Q_j^{(a)} = \delta^i_j$$

より

$$Q_j^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{h}} e_j^{(a)} \tag{5}$$

$Q^i_{(a)}$ の行列式は

$$Q = \det Q^i_{(a)} = \det(e e^i_{(a)}) = e^3 e^{-1} = h$$

この $Q^i_{(a)}$ を使って正準量 $q^{ij}$ と $p_{ij}$ を書き換えていきます。
　$q^{ij}$ は簡単に

$$q^{ij} = h h^{ij} = h e^i_{(a)} e^j_{(a)} = Q^i_{(a)} Q^j_{(a)} \tag{6}$$

となっていることが分かります。トライアドの計量は $\delta_{(a)(b)}$ になっているために、添え字の上付きと下付きの差がなくなっています。$p_{ij}$ は、$Q^i_{(a)}$ の共役量 $P^{(a)}_i$ を定義することで

$$p_{ij}\dot{q}^{ij} = p_{ij}\frac{\partial}{\partial t}(Q^i_{(a)}Q^i_{(a)}) = 2p_{ij}Q^j_{(a)}\frac{\partial Q^i_{(a)}}{\partial t}$$

から

$$P^{(a)}_i = 2p_{ij}Q^j_{(a)} \tag{7a}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2}P^{(a)}_i Q^{(a)}_j \tag{7b}$$

これでトライアドによって正準量を表現できました。ここで一つ重要な性質が現れます。$p_{ij}$ は当然 $p_{ij} = p_{ji}$ なので

$$p_{ij} = \frac{1}{2}P^{(a)}_i Q^{(a)}_j = \frac{1}{2}P^{(a)}_j Q^{(a)}_i$$

となっています。そのため

$$Q^{(a)}_i P^{(a)}_j - P^{(a)}_i Q^{(a)}_j = 0$$

という関係が現れ、これは正準量間の関係式となっているために、拘束条件になります。反対称な $\epsilon^{(a)(b)(c)}(\epsilon^{123} = 1)$ を使えば、(7a) の関係から

$$\epsilon^{(a)(b)(c)}Q^{i(b)}P^{(c)}_i = 0$$

とも書けます。これを拘束条件 $\Phi^{(a)}$ とすることで、トライアドによる作用は

$$I = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y\mathcal{L} = \int dt \int_{\Sigma_t} d^3y(P^{(a)}_i \dot{Q}^i_{(a)} - NS - N^iV_i - \lambda^{(a)}\Phi^{(a)})$$

拘束条件 $S$ は (6)(7b) を使って

$$\begin{aligned}
S &= q^{1/4}\big[-{}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}}(q^{im}q^{jn} - q^{mn}q^{ij})p_{mn}p_{ij}\big] \\
&= q^{1/4}\big[-{}^{(3)}R + \frac{1}{\sqrt{q}}\big(Q^i_{(c)}Q^m_{(c)}Q^j_{(d)}Q^n_{(d)} - Q^m_{(e)}Q^n_{(e)}Q^i_{(f)}Q^j_{(f)}\big)\frac{1}{4}P^{(a)}_m Q^{(a)}_n P^{(b)}_i Q^{(b)}_j\big] \\
&= \sqrt{Q}\big[-{}^{(3)}R + \frac{1}{4Q}(Q^i_{(c)}Q^m_{(c)}P^{(b)}_m P^{(b)}_i - Q^m_{(a)}Q^i_{(b)}P^{(a)}_m P^{(b)}_i\big]
\end{aligned}$$

$V_i$ は (4),(5),(7b) を使って

$$
\begin{aligned}
V_i &= 2q^{-1/4}q^{jk}\big[(q^{1/4}p_{ij})_{:k} - (q^{1/4}p_{kj})_{:i}\big] \\
&= 2\frac{1}{\sqrt{Q}}Q^j_{(c)}Q^k_{(c)}\big[(\sqrt{Q}\frac{1}{2}P^{(a)}_i Q^{(a)}_j)_{:k} - (\sqrt{Q}P^{(b)}_k Q^{(b)}_j)_{:i}\big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{Q}}Q^j_{(c)}Q^k_{(c)}\big[e^{(a)}_j(\sqrt{Q}\frac{1}{\sqrt{Q}}P^{(a)}_i)_{:k} - e^{(b)}_j(\sqrt{Q}\frac{1}{\sqrt{Q}}P^{(b)}_k)_{:i}\big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{Q}}\big[\sqrt{Q}Q^k_{(c)}e^j_{(c)}e^{(a)}_j(P^{(a)}_i)_{:k} - \sqrt{Q}Q^k_{(c)}e^j_{(c)}e^{(b)}_j(P^{(b)}_k)_{:i}\big] \\
&= Q^k_{(a)}(P^{(a)}_i)_{:k} - Q^k_{(b)}(P^{(b)}_k)_{:i} \\
&= Q^k_{(a)}\big[(P^{(a)}_i)_{:k} - (P^{(a)}_k)_{:i}\big]
\end{aligned}
$$

トライアドは共変微分で 0 になることを使っています。このように ADM 形式をトライアドで表現することで、いろいろと扱いやすくなります。量子化を考えるときにはトライアドによる表現が使われます。