Abstract index notation

ここでは微分幾何学や一般相対論で使われる表記法を説明します。特に断らない限り、ここで説明する表記法は他のところで使いません。

微分幾何学において、座標系とは無関係にテンソルは定義されます。そのとき、テンソルはベクトル空間 V とその双対である V^* をくっつけていくことで作られます。そうすると、(r,s) 階のテンソルを書こうとすると

$$T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_s^*$$

こんな書き方をすることになります。こんな書き方は明らかに煩わしいので右辺を

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \otimes V_1^* \otimes \cdots \otimes V_s^* \ \Rightarrow \ V^{a_1} \cdots V^{a_r} V_{b_1} \cdots V_{b_s}$$

と書いてしまい、これにともなってテンソルも

$$T^{a_1 \cdots a_r}_{b_1 \cdots b_s}$$

と書いてしまおうというのが abstract index notation です。この表記の利点は基底をまったく導入していない点です。つまり、座標系への依存性がないです。そのため、必要なときに好きな基底を選ぶことができます。このように書かれた添え字に対する対称、反対称も通常と同じように定義されます。また、テンソルの写像は

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = T_{abc} X^a Y^b Z^c$$

このようにも書けます。

注意すべきなのは、abstract(抽象的) と言っているように、ここでの添え字は通常計算の対象となるものではないことです。この添え字はベクトル空間を区別しているのであって、テンソルの成分を表してはいません。そのため、たとえ同じ添え字があったとしても和はとりません。縮約は

$$T^{ca_1}_{b_1 c b_2}$$

のように書き、$(1,2)$ 階のテンソルとなります。計量も同じように書くことができて

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_{\ c}$$

のようになり、計量で添え字の上げ下げができます。

abstract index notation を使う時には、ローマ文字に対しては abstract index notation を使い、ギリシャ文字が成分を表わすことにします。

簡単な例として、1-形式 $\boldsymbol{\omega}$ による接ベクトル $\boldsymbol{X}$ の写像 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})$ は

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) = < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > = \omega_a X^a$$

このようになり、基底を使った成分表示は

$$\omega_a X^a = \omega_\mu e^\mu_a X^\nu e^a_\nu = \omega_\mu X^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu X^\mu$$

基底を区別するようにローマ文字の添え字をつけ、同じ添え字であれば潰して成分の添え字によるクロネッカーデルタを作ります。これを見て分かるように添え字を成分によるものに変えるだけで変更されることが分かり、これは内積に当たります (成分を表わすギリシャ文字に対しては和を取る)。これも abstract index notation の利点です。そのため、何も気にせずに abstract index notation で書かれたものを成分だと思ってもほとんど内容が変わることがないです。abstract index notation の添え字が潰されきれていない時は、基底が最後まで残ります。

abstract index notation を使ったときの共変微分を求めてみます。共変微分を ∇_a と書き、テンソルへの作用を $\nabla_a T^{b_1\cdots b_r}_{c_1\cdots c_s}$ とします。これは (r,s) 階のテンソルを $(r,s+1)$ 階にする写像になります。性質として（添え字で見づらくなりそうなので、テンソルを A,B と書きます)

- 線形性

$$\nabla_a(\alpha A+\beta B) = \alpha\nabla_a A + \beta\nabla_a B \quad (A,B \text{ は } (r,s) \text{ 階、} \alpha,\beta \text{ は実数 })$$

- ライプニッツ則

$$\nabla_a(AB) = (\nabla_a A)B + A(\nabla_a B) \quad (A:(r,s) \text{ 階、} B:(r',s') \text{ 階 })$$

- 縮約があるとき

$$\nabla_a(T^{b_1\cdots d\cdots b_r}_{c_1\cdots d\cdots c_s}) = \nabla_a T^{b_1\cdots d\cdots b_r}_{c_1\cdots d\cdots c_s}$$

- 接ベクトルの方向微分としての性質

$$t(f) = t^a\nabla_a f \quad (t^a \text{ は接ベクトル空間のベクトル、} f \text{ は滑らかなスカラー関数 })$$

この 4 つを持たせます。さらに一般相対論では、ねじれがない (torsion free) という条件

$$\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$$

を加えます。この 5 つの条件は通常の偏微分で満たすことができます。しかし、偏微分は座標基底を取ったときに現れるために、今のように座標系によらないで話を進めるのには使えません。

なので、二つの共変微分 $\nabla_a, \overline{\nabla}_a$ を用意してみます。1-形式 ω_a とスカラー関数の積に作用させると

$$\nabla_a(f\omega_b) = (\nabla_a f)\omega_b + (\nabla_a\omega_b)f$$

$$\overline{\nabla}_a(f\omega_b) = (\overline{\nabla}_a f)\omega_b + (\overline{\nabla}_a\omega_b)f$$

$\nabla_a, \overline{\nabla}_a$ は両方とも同じようにスカラー関数へは方向微分としてかかるので

$$\overline{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) = (\overline{\nabla}_a\omega_b)f - (\nabla_a\omega_b)f = f(\overline{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b)$$

$\overline{\nabla}_a$ と ∇_a の作用の仕方は、ω_b による $\overline{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ の差に依存することになります。そして、$\overline{\nabla}_a, \nabla_a$ は 1-形式を $(0,2)$ 階のテンソルへ移す線形写像なので、$\overline{\nabla}_a - \nabla_a$ は

$$C^c_{ab}\omega_c$$

このように作用すると考えられます。このことから、この差は $(1,2)$ 階のテンソル C^c_{ab} を使って

$$\overline{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b = C^c_{ab}\omega_c$$

と書けるはずです。よって

$$\nabla_a\omega_b = \overline{\nabla}_a\omega_b - C^c_{ab}\omega_c$$

よく見る共変微分の式に似ているのがわかると思います。これは、そのまま一般のテンソルにも拡張されます。$\overline{\nabla}_a$ を通常の偏微分としてしまえ、C^c_{ab} はクリストッフェル記号になります。また、C^c_{ab} は $\omega_b = \nabla_b f = \overline{\nabla}_b f$ とすれば

$$\nabla_a\nabla_b f = \overline{\nabla}_a\overline{\nabla}_b f - C^c_{ab}\nabla_c f$$

ねじれなしという制限から

$$C^c_{ab} = C^c_{ba}$$

となります。

共変微分の使用例として平行移動を見てみます。平行移動の式は

$$t^b\nabla_b v^a = 0 \tag{1}$$

後でこれが平行移動であることを簡単に示しています。通常の形の共変微分とすれば

$$t^b\nabla_b v^a = t^b(\partial_b v^a + \Gamma^a_{bc}v^c) = 0$$

これを成分表示にもっていきます。単純にローマ文字をギリシャ文字に変えればいいだけなんですが、一応まじめに変更させます。

$t^b\nabla_b$ は、「ベクトル、1-形式、テンソル」での記号に合わせれば、$\nabla_{\boldsymbol{X}}$ に相当します。これはアフィン接続 ∇ は $\nabla(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ という写像であることに対応します。というわけで、これの成分表示は

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}Y^\alpha + Y^\lambda\boldsymbol{\omega}^\alpha_\lambda(\boldsymbol{X}))\boldsymbol{e}_\alpha$$

座標基底を取ることで

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (X^\beta \partial_\beta Y^\alpha + X^\beta Y^\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\lambda})\boldsymbol{e}_\alpha$$

今の表記に合わせると

$$\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{v} = (t^\beta \partial_\beta v^\alpha + t^\beta v^\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\lambda})\boldsymbol{e}_\alpha$$

そして、abstract index notation を使えば

$$t^b \nabla_b v^a = (t^\beta \partial_\beta v^\alpha + t^\beta v^\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\lambda})e^a_\alpha$$

これで

$$t^b \nabla_b v^a = t^b(\partial_b v^a + \Gamma^a_{bc} v^c) = t^\beta(\partial_\beta v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} v^\lambda)e^a_\alpha$$

となって、実際にギリシャ文字に変えることで対応が取れることが分かり、平行移動の式は座標基底で

$$t^\beta(\partial_\beta v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} v^\lambda) = 0 \tag{2}$$

となります。(2) の t^β は接ベクトルの成分ということから、第一項は

$$t^\beta(\partial_\beta v^\alpha) = \frac{dx^\beta}{dt}\partial_\beta v^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dt}$$

と変形できるので

$$\frac{dv^\alpha}{dt} + t^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} v^\lambda = 0 \tag{3}$$

t は曲線のパラメータです。また、ベクトル v^μ を t^μ とした時 (3) は

$$t^\beta \nabla_\beta t^\alpha = \frac{dt^\alpha}{dt} + t^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} t^\lambda = \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

これは測地線方程式です (測地線方程式を出すには接ベクトルを平行移動させるというのを今の場合に当てはめただけ)。

(1) が平行移動の式であるのは、「ベクトル、1-形式、テンソル」で言ったように平行移動は

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = 0$$

で表現されることから分かります。別の見方からも (1) が平行移動に対応していることをみておきます。

曲線 $\lambda(t)$ 上のベクトル $\boldsymbol{v}(\lambda(t))$ を微小移動させたときの差は基底を使った成分表示で

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}(\lambda(t)) &= \boldsymbol{v}(\lambda(t+\Delta t)) - \boldsymbol{v}(\lambda(t))\\ &= v^\mu(\lambda(t+\Delta t))\boldsymbol{e}_\mu(\lambda(t+\Delta t)) - v^\mu(\lambda(t))\boldsymbol{e}_\mu(\lambda(t))\end{aligned}$$

$\Delta\boldsymbol{v}(\lambda(t)) = 0$ で平行移動になります。局所座標系 $x^\mu(\lambda(t))$ を使えば、基底の微分はなくなるので、Δt のオーダまでを拾うと

$$\Delta v^\mu(x) = \frac{dx^\nu}{dt}\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}\Delta t = \frac{dx^\nu}{dt}\partial_\nu v^\mu \Delta t$$

dx^ν/dt は接ベクトル t^ν になります。これの偏微分を共変微分に一般化することで (基底の微分項が消えない場合)

$$0 = \frac{dx^\nu}{dt}\nabla_\nu v^\mu = t^\nu \nabla_\nu v^\mu$$

となって、(1) の形になります。「ベクトル、1-形式、テンソル」で示したように基底の微分はクリストッフェル記号を導きます。

ついでにリーマンテンソルの場合も示しておきます。リーマンテンソルは共変微分を 2 回行った時の差から作ることが出来るので、共変微分を 2 回作用させてみます

$$\begin{aligned}\nabla_a\nabla_b(f\omega_c &= \nabla_a(\nabla_b f)\omega_c + \nabla_a f(\nabla_b\omega_c)\\ &= (\nabla_a\nabla_b f)\omega_c + (\nabla_b f)(\nabla_a\omega_c) + (\nabla_a f)(\nabla_b\omega_c) + (\nabla_a\nabla_b\omega_c)f\end{aligned}$$

∇_a, ∇_b の順番をひっくり返せば

$$\begin{aligned}\nabla_b\nabla_a(f\omega_c) &= \nabla_b(\nabla_a f)\omega_c + \nabla_b f(\nabla_a\omega_c)\\ &= (\nabla_b\nabla_a f)\omega_c + (\nabla_a f)(\nabla_b\omega_c) + (\nabla_b f)(\nabla_a\omega_c) + f(\nabla_b\nabla_a\omega_c)\end{aligned}$$

この二つの差をとると、共変微分の性質から f に作用している項は消えて

$$\begin{aligned}\nabla_a\nabla_b(f\omega_c) - \nabla_b\nabla_a(f\omega_c) &= (\nabla_a\nabla_b\omega_c)f - f(\nabla_b\nabla_a\omega_c)\\ &= f(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c\end{aligned}$$

となります。$\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ は共変微分が 2 回作用することから ω_c を $(0,3)$ 階のテンソルに変えるので、$(1,3)$ 階のテンソルになります。よって、$(1,3)$ 階のテンソル $R_{abd}{}^c$ によって

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d$$

と書けることになり、$R_{abc}{}^d$ がリーマンテンソルです。ここでも添え字に対する対称性は通常の場合と同じです。当然、リッチテンソルも

$$R_{ac} = R_{abc}{}^{b}$$

によって作られます。