応力テンソル

ここでは応力の概観を見ていきます。最初に流体力学で使われるいくつかの言葉と記号の説明をしています。
応力は具体的な流体を扱っているうちに感覚的に身につくので、ここでの話は知らなくてもどうにかなります。なので、応力テンソルの定義さえ分かれば後は飛ばしていいです。

応力の話の前に記号と言葉の説明をしておきます。ここで定義された記号は他のところでも断りなしで使います。

- アインシュタインの和の規約

  添え字に対して和を取るとき

$$\sum_{i=1}^{3} A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

と書きますが、Σ を省いて

$$A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

と書くことにします。つまり、同じ添え字があるとき、それは和を取るようにします。これはアインシュタインの和の規約と呼ばれます。行列 M_{ij} に対しても

$$\sum_{j=1}^{3} M_{ij}A_j = M_{ij}A_j = M_{i1}A_1 + M_{i2}A_2 + M_{i3}A_3$$

とします。

和を取る添え字の文字は任意なので

$$A_iB_i = A_jB_j \quad (\sum_{i=1}^{3} A_iB_i = \sum_{j=1}^{3} A_jB_j)$$

としてもいいことから

$$M_{ij}A_iB_j = M_{ji}A_jB_i \quad (\sum_{i,j=1}^{3} A_iM_{ij}B_j = \sum_{i,j=1}^{3} A_jM_{ji}B_i)$$

といった添え字の書き換えがよく行われます。

以降はアインシュタインの規約を使います。

- クロネッカーデルタ

　クロネッカーデルタ δ_{ij} は

$$\delta_{ij}=1\ (i=j)\ ,\ \delta_{ij}=0\ (i\neq j)$$

と定義され、行列で言えば単位行列 I に対応します。これによって、微分が

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1}=1\ ,\ \frac{\partial x_2}{\partial x_2}=1\ ,\ \frac{\partial x_3}{\partial x_3}=1\ ,\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2}=0\ ,\dots$$

のようになっているなら

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$$

と書けます。

- レヴィ・チビタ記号

　レヴィ・チビタ記号 ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{123}=\epsilon_{312}=\epsilon_{231}=+1\ ,\ \epsilon_{213}=\epsilon_{132}=\epsilon_{321}=-1\quad(\epsilon_{ijk}=\epsilon_{kij}=\epsilon_{jki}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{ikj}=-\epsilon_{kji})$$

と与えられていて、他の添え字の組み合わせは 0 です ($\epsilon_{112}=\epsilon_{212}=\cdots=0$)。レヴィ・チビタ記号を使うとベクトルの外積は

$$(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})_i=\epsilon_{ijk}X_jY_k$$

と書けます（アインシュタインの規約を使用)。

- ベクトル

　基本的に 3 次元直交座標を使っていきます。直交座標の基底を $\boldsymbol{e}_i$ とすれば任意のベクトルは

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$$

と書けます。A_1,A_2,A_3 がベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分です。大きさが 1 に規格化 (正規化) されている直交基底の内積は

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1\ ,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0$$

なので、規格化されている直交基底 (正規直交基底) はクロネッカーデルタによって $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ となります。この i, j は基底の区別であって、ベクトルの成分ではないことに注意してください。基底と言ったときは基本的に規格化されているとします。外積は右手系を取っているなら

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \ , \ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \ , \ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$$

となり、レヴィ・チビタ記号を使えば $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$ と書けます。

直交座標での基底は位置に依存しないので (時間にも依存しない)、位置の微分に引っかかりません (例えば、極座標に変換すれば基底は位置に依存する)。

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の微分は

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \ , \ V_i = \frac{dA_i}{dt} \quad \left(\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{e}_i A_i}{dt} = \boldsymbol{e}_i\frac{dA_i}{dt} = \boldsymbol{e}_i V_i\right)$$

ナブラ ∇ は関数 $F(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\begin{aligned}
&\nabla F = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial F}{\partial x_i} \\
&\boldsymbol{A}\cdot\nabla F(\boldsymbol{x}) = A_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial x_j}F(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}A_i\frac{\partial}{\partial x_j}F(\boldsymbol{x}) = A_i\frac{\partial}{\partial x_i}F(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

- 連続体

流体は液体と気体に対して使われる言葉です。流体は形が簡単に変わる塊だとでも思えばいいです。そんな流体の性質を定式化していくのかが流体力学です。そして、流体力学は連続体の力学に含まれる分野です。なので、連続体の概念が必要になります。まずは、連続体として扱うための条件を入れます。これは流体における点に作用している力を考える必要があるからです。

密度の定義は質量を体積で割ったものなので、質量を m、体積を V とすれば密度 ρ は $\rho = m/V$ と与えられます。これを流体中のある点 P での密度を表すようにします。つまり、密度を連続な関数 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ として与えるようにします ($\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル、t は時間)。そのために、点 P を含むように流体の一部分を抜き出します。この抜き出した領域 D の体積を δV、この領域の質量を δM とします。そうすると、流体の密度 (平均的な密度) は

$$\rho = \frac{\delta M}{\delta V}$$

となり、これは領域が微小であれば近似的に $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ と見なせます。この近似をよくするためには領域を小さくして点 P に近づければいいです。

ここで、他の尺度として長さ L の物体 B を導入し、これは領域 D より大きいとします。領域 D の長さを δl として、δl が L 程度の大きさがあるなら、領域 D の流体は物体 B による影響を受けるはずなので、密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ は物体 B に依存します (巨視的な影響)。ここから、物体 B の影響を受けない程度まで δl を小さくしていき、流体を構成する粒子程度の長さにまでしたとします。そうすると、密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ は今度は粒子の影響を受け出します (微視的な影響)。これが言いたいことは、領域 D の大きさによって、密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ が

変わるということです ($\rho(\boldsymbol{x},t)$ は δl に依存している)。加えて、領域 D をどのような形に取るかでも $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は変わります。

これをどうにかするために、δl は L より十分小さいが、流体を構成する粒子 (原子や分子) の影響を受けない程度の大きさは持つという範囲に制限します。粒子の影響を受けないというのを、粒子同士の衝突がないと言い換えることにすれば、平均自由行程 (粒子が他の粒子と衝突しない平均距離)λ より大きければいいと考えられます。つまり、δl は

$$\lambda \ll \delta l \ll L$$

であるとします。このように制限された δl なら、微視的、巨視的両方からの影響が極端に作用することはないとして、密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は δl に対してほぼ一定値を取ると考えます。つまり、δl が a から b ($\lambda \ll a, b \ll L$) の値を持つとき、$\rho(\boldsymbol{x},t)$ は δl に対して一定だとします。このように領域 D の大きさに下限と上限を与えることで近似は意味を持てます。

点 P を含む体積 δV の領域 D における近似的な密度を作りましたが、これを点 P の密度とするには $\delta V \to 0$ の極限を取ることになります。つまり、点 P での密度の連続関数 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta M}{\delta V} \tag{1}$$

と定義されます。このとき、この極限が存在するのかという問題が出てきます。例えば、δV を粒子程度の大きさにすると粒子の大きさが無視できなくなるために、$\rho(\boldsymbol{x},t)$ が連続な関数ではなくなります。なので、$\delta V \to 0$ の極限が存在するのかははっきりしません。しかし、この極限は取れると仮定します。さらに、$\rho(\boldsymbol{x},t)$ は δl が a から b のとき一定としましたが、この a を 0 まで取れると仮定します (continuum hypothesis)。この仮定のもとで平均密度 (1) を与えるのが連続体で、対象を連続体として扱うことを連続体近似と言います。流体はこの連続体として扱われます。

連続体であるかのどうかの判断にはクヌーセン数 (Knudsen number)Kn が使われます。クヌーセン数は

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

と定義されてい、今の話から分かるように $Kn \ll 1$ なら連続体として扱えます。

- 体積力、面積力

流体を扱うときの力は 2 種類に分類されます。これは体積力 (body force) と面積力 (surface force) と呼ばれます。これらは名前の通りで、体積力は体積に比例する力 (重力とか)、面積力は面に作用し面積に比例する力です。面積力は流体を構成する原子や分子の相互作用によって起こる力とされます。なので、流体があれば勝手に生じる力です。また、流体を構成する粒子による力なので遠距離まで届かない力として扱われます。例えば、逆方向に流れている 2 つの流体が接しているとき、2 つの流体の境界面では摩擦が生じることになり (各流体を構成する粒子が境界面で衝突して減速する)、それによる力が面積力に分類されます。

体積力を考えるとき、単位質量あたりの体積力を扱うと便利です。流体中の領域を考え、これに作用している体積力を $\boldsymbol{F}_V$、領域の体積を δV、密度を ρ として

$$\boldsymbol{F}_V = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\rho\delta V$$

のように単位質量あたりの体積力 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ を定義します。より細かくは、領域内の点への極限を取るために、領域の長さ δl の $\delta l \to 0$ の極限によって

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{\delta l\to 0}\frac{\boldsymbol{F}_V}{\delta M} = \lim_{\delta V\to 0}\frac{\boldsymbol{F}_V}{\rho\delta V} \tag{2}$$

と定義されます。δM は領域の質量です。

ここから応力の話をしていきます。

面積力の単位面積あたりの力を応力 (stress) と呼びます。適当な面 S を考え、この面上での点 P を含む微小な領域に面積力 $\Delta\boldsymbol{P}$ が作用しているとします。応力は面に作用する力なので、方向を持つことからベクトルです。微小な領域の面積を ΔS とすれば、応力 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta S}$$

となります。そして、これを点 P での応力とするには $\Delta S \to 0$ にすればいいので

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta S}$$

これだけだと、面に対して $\boldsymbol{p}$ はどちらの方向を向いているのかを定義していません。そのために、面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向いている方を面の表側 ($\boldsymbol{n}$ の向いている側)、逆を面の裏側 ($-\boldsymbol{n}$ の向いている側) と定義します。これによって、$\boldsymbol{p}$ は面の表側から裏側に作用する力だとします (表側の流体が裏側の流体に作用する力)。言葉の言い回しからの注意ですが、応力は面の表側から裏側に作用する力としますが、表側から裏側に向かう力とは言っていないことに注意してください。例えば、xy 平面上に面 S を置き、法線ベクトルが z 軸の正の方向を向いているとします。このとき、面の表側の流体が裏側の流体を表側に引っ張るように力が作用しているなら、応力のベクトルの向きは z 軸の正方向になります。

面 S 上の点 P での応力 $\boldsymbol{p}$ は点 P での法線方向と接線方向に分解でき、それぞれを法線応力 (normal stress)、接線応力 (tangential stress) と言います (例えば、xy 平面から出ているベクトルは z 軸方向のベクトルと xy 平面上のベクトルに分解できる)。接線応力はせん断応力 (shear stress) とも呼ばれます。

力学での作用・反作用の法則が成立しているなら、点 P には $\boldsymbol{p}$ の反作用 $-\boldsymbol{p}$ が働きます ($-\boldsymbol{n}$ 方向の力)。$\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{p}$ の関係は

$$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$$

となります。

任意の面上の点に作用している応力 $\boldsymbol{p}$ が持っている関係を導きます。そのために、$\boldsymbol{p}$ が作用している任意の面上の点を大きくしていき、a, b, c 軸による直交座標での微小な四面体の 1 つの面に作用しているようにします (図 1)。この四面体での応力の関係を運動方程式によって与え、それを四面体の大きさを 0 にした極限に持っていくことで、任意の面に作用している応力の関係を求めます。

なので、この四面体の 4 つの面 S, A, B, C にそれぞれ応力 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_a, \boldsymbol{p}_b, \boldsymbol{p}_c$ が作用しているとします。面積力はそれぞれの面の面積を $\Delta S, \Delta A, \Delta B, \Delta C$ として

$$S:\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\Delta S\ ,\ A:\ \boldsymbol{p}_a(-\boldsymbol{a})\Delta A\ ,\ B:\ \boldsymbol{p}_b(-\boldsymbol{b})\Delta B\ ,\ C:\ \boldsymbol{p}_c(-\boldsymbol{c})\Delta C$$

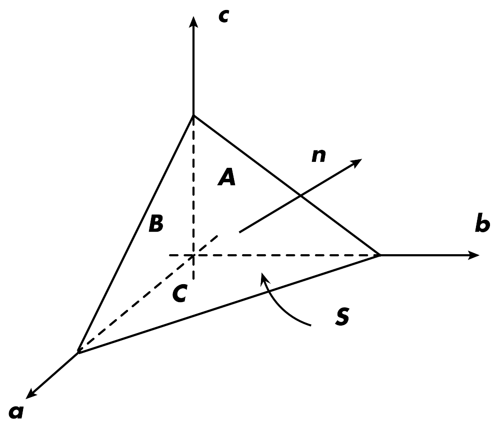

図 1

となります。$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はそれぞれの面の単位法線ベクトルで、$\boldsymbol{n}$ は四面体の外側を向いているとし、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は a, b, c 軸の正方向の単位ベクトルです。なので、S, A, B, C の面での応力は四面体の外側を向いています。

　ここで運動方程式を考えます。この四面体における密度を ρ、体積を ΔV、速度を $\boldsymbol{v}$ とすれば、運動方程式は

$$\rho V \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

と与えられます。流体では $\boldsymbol{F}$ は体積力と面積力に分解できると考えているので、四面体において

$$\rho \Delta V \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} \rho \Delta V + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \Delta S + \boldsymbol{p}_a(-\boldsymbol{a}) \Delta A + \boldsymbol{p}_b(-\boldsymbol{b}) \Delta B + \boldsymbol{p}_c(-\boldsymbol{c}) \Delta C$$

と書けるはずです。この運動方程式は、体積 ΔV を含む項と面積 $\Delta S, \Delta A, \Delta B, \Delta C$ を含む項によって構成されています。

　四面体の形を変えずに小さくしていくと、一辺の長さはどれも Δl 程度だと見なせるので、$\Delta V \simeq (\Delta l)^3,\ \Delta S \simeq \Delta A \simeq \cdots \simeq (\Delta l)^2$ と近似できます。そうすると、四面体を原点まで小さくするために、$\Delta l \to 0$ の極限を取ったとき、ΔV の項の方が速く 0 となります。よって、$\Delta l \to 0$ の極限において運動方程式は

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \Delta S + \boldsymbol{p}_a(-\boldsymbol{a}) \Delta A + \boldsymbol{p}_b(-\boldsymbol{b}) \Delta B + \boldsymbol{p}_c(-\boldsymbol{c}) \Delta C = 0$$

となります。

　これを変形させるために四面体の面積の関係を使います。今のように面 A, B, C がそれぞれ直交しているとき、面積は

$$\Delta A = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S\ ,\ \Delta B = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S\ ,\ \Delta C = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S$$

となっています。これはすぐに求められます。四面体の c 軸上の頂点の位置を h とします。面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ との間の角度は

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{c}||\boldsymbol{n}| \cos\theta = \cos\theta$$

なので、面 S からの四面体の高さは

$$h\cos\theta = h(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

この四面体の体積は底面積 $\times$ 高さ /3 なので

$$\frac{1}{3}\Delta Sh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

そして、面 C を底面とすれば体積は

$$\frac{1}{3}\Delta Ch$$

よって

$$\Delta S(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}) = \Delta C$$

となります。他の面でも同様です。
　この関係と、$\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ を使うことで

$$(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{p}_b(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{p}_c(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}))\Delta S = 0$$

となるので、応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{p}_b(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{p}_c(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

また、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は各軸の方向を向いた単位ベクトルなので

$$\boldsymbol{n} = n_a\boldsymbol{a} + n_b\boldsymbol{b} + n_c\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1\ ,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \cdots = 0$$

となることから

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = n_a\ ,\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} = n_b\ ,\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} = n_c \quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = n_a\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + n_b\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + n_c\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = n_a)$$

これを使えば

$$\Delta A = n_a\Delta S\ ,\ \Delta B = n_b\Delta S\ ,\ \Delta C = n_c\Delta S$$

となるので

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})n_a + \boldsymbol{p}_b(\boldsymbol{b})n_b + \boldsymbol{p}_c(\boldsymbol{c})n_c$$

とも書けます。これの右辺は添え字が重なってますが和は取らないです ($\boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{a})$ は法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ によって方向付けられた応力、n_a は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の a 成分)。このように任意の面に作用する応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は、座標軸に直交する 3 つの面に作用している応力によって書くことができます (任意の面上の応力は ab 平面,ac 平面,bc 平面に作用している応力で書ける)。

この結果の成分は添え字を、a 成分を 1、b 成分を 2、c 成分を 3 と書き直すことにして (ここでは添え字を $1, 2, 3$ にしますが、1 を x、2 を y、3 を z にしている場合が多い)

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = (p_1(\boldsymbol{n}), p_2(\boldsymbol{n}), p_3(\boldsymbol{n}))$$

$$\boldsymbol{p}_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13})\ ,\ \boldsymbol{p}_2 = (p_{21}, p_{22}, p_{23})\ ,\ \boldsymbol{p}_3 = (p_{31}, p_{32}, p_{33})$$

のようにすれば

$$p_1(\boldsymbol{n}) = n_1 p_{11} + n_2 p_{12} + n_3 p_{13}$$

$$p_2(\boldsymbol{n}) = n_1 p_{21} + n_2 p_{22} + n_3 p_{23}$$

$$p_3(\boldsymbol{n}) = n_1 p_{31} + n_2 p_{32} + n_3 p_{33}$$

右辺で $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の成分を p_{i1}, p_{i2}, p_{i3} と書くのは、i によって区別されるベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の $1, 2, 3$ 成分だからです (扱いやすさより区別の明確さを強くしたいなら $\boldsymbol{p}_1 = ((p_1)_1, (p_1)_2, (p_1)_3)$ や $\boldsymbol{p}_1 = (h_1, h_2, h_3), \boldsymbol{p}_2 = (k_1, k_2, k_3), \boldsymbol{p}_3 = (q_1, q_2, q_3)$ のように書けばいいです)。p_{11}, p_{22}, p_{33} は $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ の法線応力、残りはそれぞれの接線応力です。成分がこのように書けることから、$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ の成分は 3×3 行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

を使って

$$p_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij} n_j$$

と書けます。この σ_{ij} は応力テンソル (stress tensor) と呼ばれます。$\boldsymbol{p}_i$ は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とは無関係なので、σ_{ij} も法線ベクトルとは無関係に決まっている量です。応力テンソルの対角成分は法線応力、非対角成分は接線応力です (座標軸に直交している 3 つの面における)。また、応力テンソルは、基底を $\boldsymbol{e}_i$ $(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij})$ としたとき

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \quad \left(\sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j\right)$$

によって与えられる $\boldsymbol{\sigma}$ のことで (これはテンソルの簡易的な定義)、σ_{ij} はその成分です (右辺の $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ は内積でないことに注意)。実際に $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積をベクトルの規則に従って行うと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} &= \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot(n_l\boldsymbol{e}_l)\\
&= \sigma_{ij}n_l\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l\\
&= \sigma_{ij}n_l\boldsymbol{e}_i\delta_{jl}\\
&= \sigma_{ij}n_j\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
$$

なので

$$
\boldsymbol{e}_ip_i(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{e}_i\sigma_{ij}n_j
$$

$$
\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}
$$

と書けます。ただし、テンソルであることを気にする必要がほとんどないので、σ_{ij} は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に独立な 3×3 行列だと思っていればいいです。

応力は考えている流体の状況に合わせて設定されます。例えば、流体が静止しているなら、流体に作用する面積力は接線方向を持たず、流体の内側に向かう法線方向のみのはずです (外側に向かっている力だけが作用しているなら流体は分離してしまう)。流体の位置が他の位置に対して動いているなら接線応力は現れます (接線応力が働くと流体の形が変化するので静止した状態でなくなる)。なので、応力の方向は面の法線方向のみで、圧力 P だと設定します (流体中の適当な立方体を取り出したとき、全ての方向から内側に向かって同じ圧力がかかっていないと形が変わり、静止しなくなる)。これは圧力によって力のつり合いを取っているとも言えます。例えば、x_1,x_2,x_3 軸方向へ圧力が P_1,P_2,P_3 と作用しているとき、P は任意の点で $P=P_1=P_2=P_3$ という意味です (下の補足参照)。

このため、応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ の成分は考えている領域の面の法線ベクトルに比例する

$$
p_i(\boldsymbol{n}) = -Pn_i
$$

となります。この応力は hydrostatic と呼ばれます。マイナスを付けているのは流体の内側に向かうように圧力を作用させるようにしてるからです。P は $P=P(x_1,x_2,x_3)$ のように位置の依存性は持っています。この場合の応力テンソル σ_{ij} は

$$
\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (\sigma_{ij} = -P\delta_{ij})
$$

流体の入門的な話ではこの応力が使われます。

応力テンソルは角運動量が保存されているとき $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ となってることを示します。流体中の任意の領域 D を用意し、角運動量は保存しているとします。つまり、トルク (力のモーメント) が 0 になっているとします。トルク $\boldsymbol{T}$ は力 $\boldsymbol{F}$ と力が作用している点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ によって

$$
\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{3}
$$

と定義されています。この $\boldsymbol{F}$ を面積力と体積力に分解します。

領域 D における点の応力は、面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として

$$p_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij} n_j$$

で与えられます。そうすると、これによるトルクは点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$$

となります。これを領域 D の面全体にするには領域 D の面で積分すればいいので

$$\int dS\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$$

積分の範囲は領域 D の面です。レヴィ・チビタ記号で書くと

$$\int dS\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = \int dS\ \epsilon_{ijk} r_j p_k(\boldsymbol{n}) = \int dS\ \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l$$

この積分は n_l は面の法線ベクトルなので、

$$\int dS\ \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l = \int dS\ n_l A_l = \int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A}$$

という形になっていることから、ガウスの発散定理

$$\int dV\ \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \int dS\ n_l A_l \quad \Big(\int dV\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A} \Big)$$

によって体積積分にできます (面 S で囲まれる領域の体積積分)。そうすると

$$\begin{aligned}
\int dS\ \epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl} n_l &= \int_D dV \frac{\partial}{\partial r_l} (\epsilon_{ijk} r_j \sigma_{kl}) \\
&= \int_D dV \Big(\epsilon_{ijk} \frac{\partial r_j}{\partial r_l} \sigma_{kl} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \Big) \\
&= \int_D dV \Big(\epsilon_{ijk} \sigma_{kl} \delta_{jl} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \Big) \\
&= \int_D dV \Big(\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} + \epsilon_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial r_l} \Big)
\end{aligned}$$

積分についている D は領域 D の体積積分であることを表しています (今は位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ にしているので r_i で偏微分)。
領域 D に作用している体積力 $\boldsymbol{F_V}$ は、(2) から $\rho \boldsymbol{f}$ を体積積分したものなので

$$\int_D dV\ \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) = \int_D dV\ \rho \epsilon_{ijk} r_j f_k$$

よって、角運動量が保存されるとき (3) が 0 なので

$$\int_D dV(\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} + \epsilon_{ijk}r_j\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial r_l} + \rho\epsilon_{ijk}r_jf_k) = 0$$

となっていればいいです。これの第一項と第二項は面積力による項なので、体積積分による V の現れ方は第一項では V、第二項では $V^{4/3}$(r_j がいるので $V^{1/3}V = V^{4/3}$) となっていると考えられます。第三項は V が十分小さければ、ρ は領域の大きさに依存しなくなり、f_k も領域の大きさに依存しなくなると考えることで、ρ, f は体積積分に引っかからなくなります。なので、第三項は $V^{4/3}$ に比例すると考えられます。そうすると、領域の形を変えずに $V \to 0$ の極限にすれば、第一項より第二項と第三項の方が先に 0 になるので、第一項だけが残り

$$\int_D dV\ \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$$

となります。これが成立するためには

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$$

であればいいです。そうすると、例えば $i = 1$ のとき、レヴィ・チビタ記号は同じ添え字が 2 つ以上あると 0 になることから

$$0 = \epsilon_{1jk}\sigma_{kj} = \epsilon_{123}\sigma_{32} + \epsilon_{132}\sigma_{23} = \epsilon_{123}\sigma_{32} - \epsilon_{123}\sigma_{23} = \sigma_{32} - \sigma_{23} \quad (\epsilon_{132} = -\epsilon_{123})$$

つまり、応力テンソルは $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ という関係を持ちます。他の場合も同様にしていくことで $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ が成立しているのが分かります。このように角運動量が保存されているとき、応力テンソルは対称テンソル (添え字を入れ替えても符号が変わらない) となります。

　また、和を取る添え字の文字は任意なので

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = -\epsilon_{ikj}\sigma_{kj} = -\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}$$

から、$0 = \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = -\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}$ であるためには $0 = \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} = -\epsilon_{ijk}\sigma_{kj}$ でなければいけないということから言うこともできます。

　応力テンソルが対称行列であるなら、応力テンソルを対角成分のみ (非対角成分は 0) にできる座標軸を設定することができます。これは固有値、固有ベクトルの話を知っていればすぐに分かります。固有値、固有ベクトルの説明は省きます。

　任意の対称な応力テンソル $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (成分は実数とする) と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を持つ面があるとします。このとき $\sigma_{ij}n_j$ は固有値問題として

$$\sigma_{ij}n_j = \lambda n_i \tag{4}$$

を持つとします (3 × 3 行列と 3 成分ベクトルによる固有値問題)。これは

$$p_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij}n_j = \lambda n_i$$

なので、法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の面に作用している応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は法線ベクトルの方向を向いていることに対応しています (法線応力しか作用していない)。

固有値問題の話から分かることを羅列していきます。固有値 λ は

$$\det[\sigma_{ij} - \delta_{ij}\lambda] = 0$$

によって求められます。σ_{ij} は 3×3 行列 (実数) なので、これの解は 3 つあります。そして、解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が存在し、この 3 つのベクトルは線形独立です。ここでは σ_{ij} は対称行列としているので、固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は直交します。

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の成分 u_i, v_i, w_i による

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

という行列は直交行列になります。直交行列なので、U の転置 U^T は逆行列 U^{-1} です ($U^T = U^{-1}$)。U によって σ_{ij} を

$$\sigma'_{ij} = (U^T)_{ia}\sigma_{ab}U_{bj}$$

と変換したとき (行列の積の形で書けば $\sigma' = U^T\sigma U$)、σ'_{ij} は対角成分 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のみを持ち

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となり対角化された形になります。しかし、これだと σ_{ij} の対角化の手続きを行っただけで、どういう状況なのかが分かりません。なので、$\boldsymbol{n}$ の基底を見てみます。$\boldsymbol{n}$ の成分 n_i は基底として $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0),\ \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ を使ったものだとします。

U^T を (4) に作用させて $UU^{-1} = I$ ($U_{ia}(U^{-1})_{aj} = \delta_{ij}$) を使えば

$$\begin{aligned}
(U^T)_{ia}\sigma_{ab}n_b &= (U^T)_{ia}\lambda n_a \\
(U^T)_{ia}\sigma_{ab}U_{bc}(U^{-1})_{cd}n_d &= \lambda(U^{-1})_{ia}n_a \\
\sigma'_{ic}n'_c &= \lambda n'_i \qquad (n'_i = (U^{-1})_{ia}n_a)
\end{aligned}$$

となり、変換されても式の形は変わりません。このときの、法線ベクトルの変換は $n_j = U_{ji}n'_i$ から

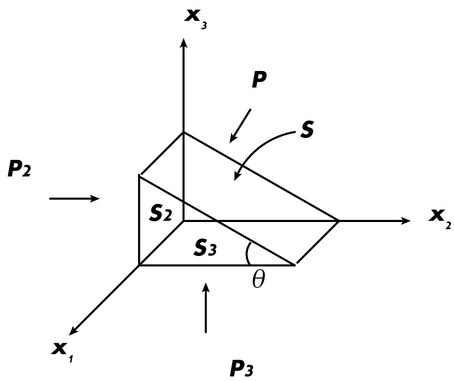

図 2

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix} \\
&= Un'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Un'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Un'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= n'_1 U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n'_2 U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n'_3 U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= n'_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + n'_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + n'_3 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\
&= n'_1\boldsymbol{u} + n'_2\boldsymbol{v} + n'_3\boldsymbol{w}
\end{aligned}
$$

なので、n'_i は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を基底にしたときの法線ベクトルの成分です。つまり、基底を $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ と選んだときに σ_{ij} は対角化されていることになります。言い換えれば、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を座標軸に選んでいる状況です (3 つは直交している)。このような固有ベクトルによる座標軸は応力テンソルの主軸 (principal axes of stress tensor) と呼ばれ、$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は主応力 (principal stress) と呼ばれます。座標軸を固有ベクトルに選んで行列を対角化するというのはよく使われる方法です。

・補足

$P = P_1 = P_2 = P_3$ を、よくある例を使って示します。三角柱の面に作用している圧力のつり合いを考えます。三角柱には図 2 のように圧力 P, P_2, P_3 が面に対して垂直に作用して、つり合いが取れているとします (面 S に圧力が作用しているとき、つり合いを取るために x_1 軸方向に圧力を作用させる必要はない)。面 S の面積 A は

$$A = dx_2 ds$$

と与えます (ds は面 S の辺の長さ)。x_1 軸上の長さを dx_1, x_2 軸上の長さを dx_2、x_3 軸上の長さを dx_3 とします。そうすると、この面に作用している力は

$$F = Pdx_2ds$$

面 S_3 に作用している力は $dx_1 = ds\cos\theta$ なので

$$F_3 = P_3dx_1dx_2 = P_3dx_2ds\cos\theta$$

面 S_1 では $dx_3 = ds\sin\theta$ なので

$$F_2 = P_2dx_2dx_3 = P_2dx_2ds\sin\theta$$

そして、力のつり合いを取るためには

$$F\sin\theta = F_2\ ,\ F\cos\theta = F_3$$

であればいいことから

$$Pdx_2ds\sin\theta = P_2dx_2ds\sin\theta\ ,\ Pdx_2ds\cos\theta = P_3dx_2ds\cos\theta$$

よって、$P = P_2 = P_3$ となります。これは dx_1, dx_2, dx_3 を 0 の極限に持って行くことで三角柱を点に近づけることで、点において $P = P_2 = P_3$ が成立することになります。これは例えば重力が x_3 軸の負方向に作用していたとしても関係ありません。応力による力が dx_2ds に比例するのに対して、重力は体積力なので $dx_1dx_2dx_3$ に比例するために微小な極限を取ったときに先に 0 になるからです。

もっと単純には三角形の各辺に圧力が作用しているとすればいいです (三角柱の側面に圧力が作用しているとしても、高さは共通なので三角形だけみればいい)。辺を l_1, l_2, l_3、辺に作用している圧力を P_1, P_2, P_3 とします。l_1 と l_3 の間の角度を θ、l_2 と l_3 の間の角度を ϕ、l_1 と l_2 の間の角度を ψ とします。そうすると、l_3 に平行な方向 (P_3 に垂直な方向) への圧力は $P_1l_1\sin\theta - P_2l_2\sin\phi$ なので、つり合いは

$$P_1l_1\sin\theta - P_2l_2\sin\phi = 0$$

で取れます。P_1 と P_2 は逆向きなので P_2 の項をマイナスにしています。l_1 と l_2 の関係は

$$l_1\sin\theta = l_2\sin\phi$$

なので、つり合いの式から

$$P_1l_2\sin\phi - P_2l_2\sin\phi = 0$$
$$P_1 = P_2$$

同様のことを、l_1 に平行な方向、l_2 に平行な方向で行えば

$$P_1 = P_2 = P_3$$

が言えます。