変形速度テンソル

流体でも基本的な定式化は変わらないですが、ゆがみを表すときに変位を速度ベクトルに変えるのでそれを見ていきます。

連続体の力学の中で液体と気体を扱う分野を流体力学 (fluid mechanics) と言い、液体と気体はまとめて流体 (fluid) と言います。なので、連続体の力学の対象は固体と流体に区分されます。流体の特徴は簡単に形を変えるこでです。

流跡線と流線の定義を与えておきます。連続体の力学では物体に含まれる点 (微小領域) を物質粒子 (物質点) と呼びますが、流体力学では流体粒子 (fluid particle) と呼ばれます。流体粒子の軌道を描いた曲線を流跡線 (particle path, pathline) と言います。同じような単語として、流線 (streamline) と呼ばれるものがあります。流線は空間表示 (オイラーの方法) において、ある時間での速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ を繋げた曲線のことです。言い換えれば、ある時間に曲線 C があり、この曲線の接ベクトルが速度ベクトルであるなら C は流線です (曲線上の点の接ベクトルが速度ベクトル)。流線と流跡線の違いは、流線は時間が固定されているのに対して、流跡線は時間に依存して描かれる点です。

3 次元空間において、ある時間 t_0 での流体粒子の位置を $\boldsymbol{X}$、時間 t での位置を $\boldsymbol{x}$ としたとき

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)\ ,\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t=0)=\boldsymbol{X}$$

として、物質表示と空間表示を与えるのは連続体の力学と同じです。右辺での変換の関数として $\boldsymbol{x}$ を使うのがいやなら、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},t)$ とでもすればいいです。軌道 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)$ が初期位置 $\boldsymbol{X}$ を通る流体粒子の流跡線となります。例えば、$t=0$ で $\boldsymbol{X}$ とし、時間 t では x 軸方向に at だけ動いているとすれば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+at\boldsymbol{e}_x$ となります ($\boldsymbol{e}_x$ は x 軸方向の単位ベクトル)。

流体を扱うときは速度ベクトルが使われるので、速度ベクトルによって変形がどう書かれるのかを見ていきます。流体中の点 P_1 と点 P_2 を取り、同じ時間 t において位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}'(t)$ で与えられているとします。変形は 2 点間の距離が変わることなので「ひずみテンソル」では変位を使ってひずみを表現しましたが、それを微小な時間 Δt 経過したときの 2 点間の差を 2 点の速度差によって書きます。

時間 t での 2 点間の差を $\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}'(t)-\boldsymbol{x}(t)$ とします。2 つの点はそれぞれが $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$ で動いているので、微小な Δt 経過した後ではそれぞれ $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\Delta t,\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)\Delta t$ だけ動いたとできます。そうすると、$\Delta\boldsymbol{x}(t+\Delta t)$ との差は

$$\Delta\boldsymbol{x}(t+\Delta t)-\Delta\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t))\Delta t$$

これは Δt で割って、$\Delta t\to 0$ にすれば左辺は微分になるので

$$\frac{d\Delta\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$$

と書けます。右辺は $\Delta\boldsymbol{x}$ の 1 次までで展開すれば

$$\Delta v_i=v_i(\boldsymbol{x}',t)-v_i(\boldsymbol{x},t)=v_i(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t)-v_i(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

そうすると

$$\frac{d}{dt}|\Delta \boldsymbol{x}| = \frac{d}{dt}(\Delta \boldsymbol{x}\cdot\Delta \boldsymbol{x})^{1/2} = (\Delta \boldsymbol{x}\cdot\Delta \boldsymbol{x})^{-1/2}\Delta \boldsymbol{x}\cdot\frac{d\Delta \boldsymbol{x}}{dt} = \frac{1}{|\Delta \boldsymbol{x}|}\Delta x_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

添え字の書き換えで

$$\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Delta x_j\Delta x_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

となるので

$$2\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \Delta x_j\Delta x_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \Delta x_i\Delta x_j(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

よって

$$\frac{d}{dt}|\Delta \boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}\frac{\Delta x_i\Delta x_j}{|\Delta \boldsymbol{x}|}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

$$\frac{1}{|\Delta \boldsymbol{x}|}\frac{d}{dt}|\Delta \boldsymbol{x}| = \frac{1}{2}\frac{\Delta x_i}{|\Delta \boldsymbol{x}|}\frac{\Delta x_j}{|\Delta \boldsymbol{x}|}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \tag{1}$$

これは距離の差 $|\Delta \boldsymbol{x}|$ の時間変化です。このとき、右辺の括弧部分が変化量を決めていて、変形速度テンソル (rate of strain tensor)、他にもひずみ速度テンソルやひずみ率テンソルと呼ばれ

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

と定義されます。ひずみと言えるのは、長さの変化分をもとの長さで割ることで出てきているからです ((1) に Δt をかければ変化した長さになる)。e_{ij} は見て分かるように対称 $e_{ij} = e_{ji}$ で、e_{ij} のトレース e_{ii} は

$$e_{ii} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

となっています。

2 点の速度の差に変形速度テンソルが入ってきます。ある時間 t での位置 $\boldsymbol{x}$ とそこからから微小な $\Delta \boldsymbol{x}$ 離れた位置を考えます。このとき、速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}, t)$ は、$\Delta \boldsymbol{x}$ の 1 次までで

$$v_i(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}, t) \simeq v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j \tag{2}$$

と展開できます (時間は固定されていることに注意)。これから、2 点での速度の違いは

$$\Delta v_i = v_i(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}, t) - v_i(\boldsymbol{x}, t) \simeq \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

これは

$$\Delta v_i \simeq \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j$$

と変形でき、変形速度テンソルが出てきます。Δv_i は、第 2 項を w_{ij} として

$$\Delta v_i = e_{ij}\Delta x_j + w_{ij}\Delta x_j \tag{3}$$

と書くことにします。e_{ij} は対称 $e_{ij} = e_{ji}$、w_{ij} は反対称 $w_{ij} = -w_{ji}$ です。反対称であるので、対角成分 $i = j$ は 0 です。例えば $w_{1j}\Delta x_j$ は

$$\begin{aligned} w_{1j}\Delta x_j = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_1})\Delta x_j &= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3 \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3 \end{aligned}$$

となっています。このように速度の差は対称な項と反対称な項の和で書けます。

2 点間の距離が変わるときに現れる e_{ij} がどのような変形を起こしているのかを確かめます。時間 t で原点から微小な α だけ離れた x_1 軸上の点 A ($x_1 = \alpha,\ x_2 = x_3 = 0$) を考え、原点から A までの長さを考えます。上の記号に合わせれば、原点と A との距離 α が $|\Delta \boldsymbol{x}|$ のことなので、$\Delta \boldsymbol{x}$ は $\Delta x_1 = \alpha, \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 0$ です。そして、e_{ij} の影響を見たいので $w_{ij} = 0$ とし、速度は $v_i = e_{ij}\Delta x_j$ で与えることにします。

原点は固定されているので、点 A の速度 (原点と点 A の速度差) は (3) から

$$v_1 = e_{1j}\Delta x_j = e_{11}\Delta x_1 = e_{11}\alpha\ ,\ v_2 = e_{21}\alpha\ ,\ v_3 = e_{31}\alpha$$

そうすると、微小な時間 Δt 後の点 A の位置は $x_1 = \alpha,\ x_2 = x_3 = 0$ から

$$x_1 = \alpha + v_1\Delta t = \alpha + e_{11}\alpha\Delta t\ ,\ x_2 = e_{21}\alpha\Delta t\ ,\ x_3 = e_{31}\alpha\Delta t$$

と動きます。x_1 を見ると、x_1 軸上の α にいた点 A の位置が x_1 軸上の $\alpha + e_{11}\alpha\Delta t$ に動いていることが分かります。つまり、$e_{11}\alpha\Delta t$ だけ x_1 軸方向に伸びています。これから、e_{11} は x_1 軸方向への伸縮を表すことになります ($e_{11} > 0$ なら伸び、$e_{11} < 0$ なら縮む)。

x_2, x_3 は $x_2 = x_3 = 0$ から動いていますが伸縮の形になっていないので、別の変形を起こしています。それが何か見ます。まず、原点と位置 A の距離がどうなっているのかを求めて、長さの変化に寄与していないことを確かめます。Δt 経過後の位置 A の原点からの距離は

$$l(t + \Delta t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \alpha\sqrt{(1 + e_{11}\Delta t)^2 + (e_{21}\Delta t)^2 + (e_{31}\Delta t)^2}$$

これともとの距離 $l(t) = \alpha$ との差は、Δt の 1 次までで

$$
\begin{aligned}
\Delta l &= l(t+\Delta t) - l(t) \\
&= \alpha\sqrt{1+2e_{11}\Delta t + e_{11}^2(\Delta t)^2 + e_{21}^2(\Delta t)^2 + e_{31}^2(\Delta t)^2} - \alpha \\
&\simeq \frac{1}{2}\alpha(1+2e_{11}\Delta t) - \alpha \\
&= e_{11}\alpha\Delta t \\
\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta l}{\Delta t} &= e_{11}
\end{aligned}
$$

左辺は (1) に合わせれば

$$
\frac{d}{dt}|\Delta \boldsymbol{x}| \ \Rightarrow \ \frac{|\Delta \boldsymbol{x}(t+\Delta t)| - |\Delta \boldsymbol{x}(t)|}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t}
$$

なので、(1) と同じになります ($\Delta x_i = \alpha,\ |\Delta \boldsymbol{x}| = \alpha$)。これから、長さの変化に e_{21}, e_{31} は関与していないことが分かります。

どのような寄与になっているかは、x_1 と x_2, x_3 の位置を三角関数で書くと分かります。tan で表せば、Δt 経過後に x_1 軸から、x_2 軸方向と x_3 軸方向に角度は

$$
\begin{aligned}
\theta_{x_1x_2} &= \arctan\frac{x_2}{x_1} = \arctan\frac{e_{21}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t} \\
\theta_{x_1x_3} &= \arctan\frac{x_3}{x_1} = \arctan\frac{e_{31}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t}
\end{aligned}
$$

だけ動いています。Δt を微小とすれば

$$
\theta_{x_1x_2} = \arctan\frac{e_{21}\Delta t}{(1+e_{11}\Delta t)} \simeq \frac{e_{21}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t} \simeq e_{21}\Delta t
$$

このように、e_{21}, e_{31} は点 A の位置の角度 (原点から A までの線の角度) をずらしています (距離には寄与せずに)。

今は原点から x_1 軸上の点 A への線だけを見ているので、角度のズレによる変形の意味が分かりづらいですが、もう 1 つ x_2 軸上の点 B も考えれば変形の動きが見やすくなります (平面上で言えば、長方形がひし形になる)。

このように変形速度テンソルは距離の伸縮と角度のずれを含んでいます。同様のことが他の成分で言えるので、対角成分 $e_{ij}(i=j)$ は x_1, x_2, x_3 軸方向の伸縮、非対角成分 $e_{ij}(i \neq j)$ は角度のズレを起こします。

成分そのものではないですが、e_{ij} のトレースは体積の時間変化に対応します。これは体積の時間変化を見てみれば直接分かります。微小な体積を $\Delta V(t) = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ とし、Δt 経った後に $\Delta V(t+\Delta t) = \Delta x_1' \Delta x_2' \Delta x_3'$ になるとします ($\Delta x_i' = \Delta x_i(t+\Delta t)$)。$\Delta x_i$ は 2 点間の差なので、Δt 経過後の $\Delta x_i'$ は 2 点間の速度差 Δv_i によって

$$
\Delta x_i' = \Delta x_i(t+\Delta t) = \Delta x_i + \Delta v_i \Delta t = \Delta x_i + e_{ij}\Delta x_j \Delta t
$$

と書けます ($w_{ij} = 0$ として)。これから

$$
\Delta V(t+\Delta t) = \Delta x_1' \Delta x_2' \Delta x_3' = (\Delta x_1 + e_{1j}\Delta x_j \Delta t)(\Delta x_2 + e_{2j}\Delta x_j \Delta t)(\Delta x_3 + e_{3j}\Delta x_j \Delta t)
$$

e_{ij} の対角成分の寄与だけが知りたいので、非対角成分は $e_{ij}=0$ $(i\neq j)$ として、$\Delta V(t+\Delta t)$ は Δt の 1 次までを拾って

$$\begin{aligned}\Delta V(t+\Delta t)&=(\Delta x_1+e_{11}\Delta x_1\Delta t)(\Delta x_2+e_{22}\Delta x_2\Delta t)(\Delta x_3+e_{33}\Delta x_3\Delta t)\\&=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3(1+e_{11}x_1\Delta t)(1+e_{22}\Delta t)(1+e_{33}\Delta t)\\&\simeq\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3(1+e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t)\\&=\Delta V(t)(1+e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t)\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V(t+\Delta t)-\Delta V(t)}{\Delta t}&=\Delta V(t)\frac{e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t}{\Delta t}\\\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta V(t)}\frac{\Delta V(t+\Delta t)-\Delta V(t)}{\Delta t}&=e_{11}+e_{22}+e_{33}\\\frac{1}{\Delta V(t)}\frac{d\Delta V(t)}{dt}&=\sum_{i=1}^{3}e_{ii}\end{aligned}$$

よって、体積の時間変化の割合がトレースになります (紛らわしいので和の記号を書いています)。

このように変形速度テンソルの成分の性質はゆがみテンソルと同じです。違いは変位が速度ベクトルになっているというだけです。

残っている w_{ij} が何かも見ていきます。そのために、剛体 (2 点間の差が変わらない物体) の回転の話を持ち込みます。剛体での点 (物質点) の速度は $\boldsymbol{v}$ で与えられるとし、位置ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$ の 2 つの点を考えます。$\boldsymbol{x}'$ の点の速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$ は、$\boldsymbol{x}$ の点を通る軸の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ とその点での速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ によって

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})$$

と書けます (下の補足参照)。角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は剛体中のどの点でも同じです。2 点の間は $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$ とします。成分で書けば

$$\begin{aligned}v_1(\boldsymbol{x}',t)&=v_1(\boldsymbol{x},t)+\Omega_2\Delta x_3-\Omega_3\Delta x_2\\v_2(\boldsymbol{x}',t)&=v_2(\boldsymbol{x},t)+\Omega_3\Delta x_1-\Omega_1\Delta x_3\\v_3(\boldsymbol{x}',t)&=v_3(\boldsymbol{x},t)+\Omega_1\Delta x_2-\Omega_2\Delta x_1\end{aligned}$$

ここで速度ベクトルの回転を

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3})\boldsymbol{e}_1+(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1})\boldsymbol{e}_2+(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2})\boldsymbol{e}_3$$

と定義します。速度ベクトルの回転である $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトル (vorticity vector) と呼ばれます。$\boldsymbol{\Omega}$ は位置の微分に引っかからないので

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 2\Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + 2\Omega_2 \boldsymbol{e}_2 + 2\Omega_3 \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{\Omega}$$

となり、渦度 $|\boldsymbol{\omega}|$ は角速度ベクトル $|\boldsymbol{\Omega}|$ の 2 倍です。この関係から分かるように、渦度は回転の強さの度合いと言えます。これを使って書き換えれば

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{\Omega} \times \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x}$$

となり、成分で書けば

$$v_i(\boldsymbol{x}', t) = v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \Delta \boldsymbol{x})_i = v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j \Delta x_k = v_i(\boldsymbol{x}, t) + v_i^{boby}(\boldsymbol{x}, t) \tag{4}$$

途中でベクトル積をレヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{ijk}(\epsilon_{123} = 1)$ を使って書き換えています。成分を分けて書けば

$$v_1(\boldsymbol{x}', t) = v_1(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\omega_3 \Delta x_2 + \frac{1}{2}\omega_2 \Delta x_3 = v_1(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3 \tag{5a}$$

$$v_2(\boldsymbol{x}', t) = v_2(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\omega_3 \Delta x_1 - \frac{1}{2}\omega_1 \Delta x_3 = v_2(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2})\Delta x_3 \tag{5b}$$

$$v_3(\boldsymbol{x}', t) = v_3(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\omega_2 \Delta x_1 + \frac{1}{2}\omega_1 \Delta x_2 = v_3(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})\Delta x_2 \tag{5c}$$

となります。

これが剛体の場合の話です。これと剛体としない場合での Δv_i とを比べます。流体での $v_i(\boldsymbol{x}', t)$ は (2) と (3) から

$$\begin{aligned}
v_i(\boldsymbol{x}', t) &= v_i(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}, t) = v_i(\boldsymbol{x}, t) + \Delta v_i \\
&= v_i(\boldsymbol{x}, t) + e_{ij}\Delta x_j + w_{ij}\Delta x_j \\
&= v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j
\end{aligned}$$

第 3 項と ω_i の成分

$$\omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\ ,\ \omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\ ,\ \omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

を比べれば

$$w_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k \tag{6}$$

と分かります。なので

$$w_{ij}\Delta x_j = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k \Delta x_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ikj}\omega_k \Delta x_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j \Delta x_k$$

よって、渦度 ω_i によって

$$v_i(\boldsymbol{x}',t)=v_i(\boldsymbol{x},t)+e_{ij}\Delta x_j+\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j\Delta x_k$$

そして、これは (4) から

$$v_i(\boldsymbol{x}',t)=v_i(\boldsymbol{x},t)+e_{ij}\Delta x_j+v_i^{boby}(\boldsymbol{x},t)\quad(\Delta v_i=e_{ij}\Delta x_j+v_i^{boby}(\boldsymbol{x},t))$$

と書けます。成分を具体的に見ておけば、例えば $i=1$ では

$$\begin{aligned}v_1(\boldsymbol{x}',t)=\ &v_1(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2})\Delta x_2+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3})\Delta x_3\\&+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3\end{aligned}$$

となって、(5a) の第 2 項と第 3 項が出てきています。このように、回転する剛体からは v_i^{boby} しか出てこないことと、(6) から w_{ij} は角速度ベクトルと関係することから、w_{ij} は回転の影響を表します。つまり、$w_{ij}\Delta x_j$ は、回転によって $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ での速度の差がどうなるのかを表しています (回転による Δv_i への寄与)。そして、形を変えないという性質 (2 点間の距離が変わらない) を持つ剛体では現れない $e_{ij}\Delta x_j$ は、形を変える寄与なのだと確認できます。

というわけで、Δv_i は、伸縮 (角度のズレを含む) の寄与 e_{ij}、回転の寄与 w_{ij} によって構成されています。そして、

$$v_i(\boldsymbol{x}')=v_i(\boldsymbol{x})+\Delta v_i$$

での $v_i(\boldsymbol{x})$ を平行移動による寄与とします (補足 1 の話から平行移動と見える)。これらから、動いている流体の変形はこの 3 つの組み合わせだと言う事ができます。

・補足

回転や剛体についての細かい話は省いて、剛体において速度が

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}',t)+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

となることを示します。

剛体における 2 つの点 P,P' を考え、P' を通る軸を回転軸にして回転しているとします。まず、P' を原点にした座標系 A' で見ます。P' は P を原点としたときの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にあるとします。剛体なので、P と P' の間の距離は一定です ($|\boldsymbol{r}|=$ 定数)。なので、P' から見て P は円運動しています。そうすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ によって、P の速度 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

と書けます。今度は固定された座標系 A に移ります。この座標に対して P' は速度 $\boldsymbol{v}'$ で動いているとします。そうすると、P の速度は A' での速度に $\boldsymbol{v}'$ を足したものなので、座標系 A において P の速度は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

となります。$\boldsymbol{r}$ は P と P' の間のベクトルなので、座標系 A での P の位置を $\boldsymbol{x}$、P' の位置を $\boldsymbol{x}'$ とすれば

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$$

なので、位置 $\boldsymbol{x}$ の点 P の速度は $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$、位置 $\boldsymbol{x}'$ の点 P' の速度は $d\boldsymbol{x}'/dt = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}', t)$ として

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}', t) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \quad (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r})$$

となります。$\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{x}$ とは無関係に決まっています。これは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r}$ の時間微分なので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

となり、今してきた話からも分かるように、P' に対する P の相対速度です。