完全流体

完全流体で成立している関係を求めます。記号の区別をそれほどはっきりとさせていないので、混乱しないようにしてください。
最後の話では電磁気の知識を持ち込んでいます。

先にここで出てくるものの定義を与えておきます。まず、循環 (circulation) を定義します。これは流体中の閉曲線 C に沿った速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の線積分のことで

$$\Gamma = \oint_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \oint_C ds\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{q}$$

と定義されます。s は閉曲線の弧長、$\boldsymbol{q}$ は閉曲線の単位接ベクトルです。また曲線を位置ベクトル $\boldsymbol{x}(s)$ で表現するなら

$$\Gamma = \oint_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} \quad\ (\boldsymbol{q} = \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s})$$

となります (数学の「ベクトルの微分、積分」参照)。$\boldsymbol{x}$ は時間 t にも依存させるので s での偏微分です ($\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,s)$)。弧長で微分しているために単位接ベクトルになっていることに注意してください (曲線のパラメータの微分は一般的には接ベクトルであって、単位接ベクトルにはならない)。

次に渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ から渦線 (vortex line) を定義します。これは速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を接ベクトルとする線を流線としたのと同様に、渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を接ベクトルとする線を渦線と定義します。そして、閉曲線 C 上の各点を渦線が通過しているとすれば、渦線は管状の面を作ります (例えば、閉曲線を円として xy 平面上に置いて、その円周上を z 軸方向に通る渦線は円筒の側面を作る)。この管状の面を渦管 (vortex tube) と言います。ちなみに、流線で作られる管状の面を流管 (stream tube) と言います。

閉曲線 C_1 と C_2 が渦管の閉曲線になっているとし、渦管の面を σ、閉曲線 C_1 による面を σ_1、C_2 による面を σ_2 とします (円筒で言えば、側面が σ、底面が σ_1、上面が σ_2)。この 3 つの面による面 Σ によって囲まれる部分を D とすれば、$\boldsymbol{\omega}$ に対してガウスの発散定理を使えば

$$\int_D dV\ \nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = \int_\Sigma dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{1}$$

左辺は領域 D の体積積分、右辺は面 Σ の面積分です。$\boldsymbol{n}$ は面 Σ(領域 D) の外側を向いた単位法線ベクトルです。右辺は

$$\int_\Sigma dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = \int_\sigma dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) + \int_{\sigma_1} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) + \int_{\sigma_2} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n})$$

において、σ 上では $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{n}$ は直交していることから (渦管は $\boldsymbol{\omega}$ を接ベクトルにしている) 第 1 項は 0 です ($\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}=0$)。そして、左辺では、$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ はベクトルの関係から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}) = 0$$

なので、(1) から

$$\int_{\sigma_1} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) + \int_{\sigma_2} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$$

という関係が出て来ます。これは σ_1, σ_2 のどちらかの法線ベクトルの方向に $\boldsymbol{n}$ を揃えれば (片方の法線ベクトルの方向を領域 D の内側に向かうようにする)

$$\int_{\sigma_1} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = \int_{\sigma_2} dS\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n})$$

と書けます。そして、両辺に対してストークスの定理を使うと

$$\int_{\sigma_1} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = \oint_{C_1} d\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\omega}) = \oint_{C_1} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$$
$$\int_{\sigma_2} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = \oint_{C_2} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$$

なので

$$\oint_{C_1} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} = \oint_{C_2} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$$

$d\boldsymbol{x}$ は σ_1, σ_2 を囲む閉曲線 C_1, C_2 の微小領域です。C_1, C_2 は渦管を 1 周する任意の閉曲線なので、この結果から渦管を 1 周する閉曲線 C による循環

$$\Gamma = \oint_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$$

は渦管における不変量であることが分かります。この渦管上の循環のことを渦管の強さ (instensity of the vortex tube) と呼びます。

ここから完全流体を扱っていきます。完全流体は運動していても接線応力がない流体のことです。これは粘性が 0 に対応します。なので、完全流体が従うのはナビエ・ストークス方程式において粘性を 0 とした

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \ \rho\boldsymbol{f} - \nabla P$$

という方程式になり、オイラー (Euler) 方程式と言います。ρ は密度、$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル、$\boldsymbol{f}$ は単位質量あたりの体積力、P は圧力です。

オイラー方程式は別の形で書かれることもあります。ベクトルの関係

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

を使えば

$$\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

なので、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ は

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

と書き換えられます。これの右辺の第 2 項は渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ によって

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$$

これをオイラー方程式に入れれば

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}+\rho\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla P$$
$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=\rho\boldsymbol{f}-\frac{1}{2}\rho\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\nabla P$$

となります。この形は Lamb 形式、もしくは Gromeko-Lamb 形式と呼ばれます。また、$\boldsymbol{f}$ が保存力だとすればポテンシャル U から

$$\boldsymbol{f}=-\nabla U$$

で与えられるので、保存力のとき

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=-\rho\nabla(U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\nabla P \tag{2}$$

となります。

完全流体での循環の関係であるケルビンの循環定理を求めます。時間 t_0 での流体中の閉曲線 C_0 上にいる流体粒子を追いかけることを考えます。流体粒子を追いかけるので閉曲線 C_0 は時間変化し、時間 t でそれらの流体粒子がいる閉曲線は C になるとします。このときの循環 $\Gamma(t)$ の時間変化がどうなるのかを求めます。

時間変化が知りたいので $\Gamma(t)$ を物質微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\Gamma(t)=\frac{D}{Dt}\oint_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}&=\frac{D}{Dt}\oint_C\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s}ds\\&=\oint_C\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}ds+\oint_C\boldsymbol{v}\cdot\frac{D}{Dt}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s}ds\\&=\oint_C\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}ds+\oint_C\boldsymbol{v}\cdot\frac{D}{Dt}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s}ds\end{aligned}$$

左辺は $d\Gamma(t)/dt$ と同じ意味です。$\boldsymbol{v}=D\boldsymbol{x}/Dt$ なので第 2 項は

$$\oint_C\boldsymbol{v}\cdot\frac{D}{Dt}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s}ds=\oint_C\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial s}ds=\frac{1}{2}\oint_C\frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})ds=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\big|_{s=P_2}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\big|_{s=P_1}$$

弧長 $s=P_2$ と $s=P_1$ は閉曲線なので同じです。なので

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\big|_{s=P_2}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\big|_{s=P_1}=0$$

このため

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t)=\oint_C\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}ds \tag{3}$$

$\boldsymbol{v}$ の物質微分 $D\boldsymbol{v}/Dt$ はオイラー方程式から

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}+\rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{f}-\nabla P\\ \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla P\end{aligned}$$

となっています。ここで、$\boldsymbol{f}$ は保存力として、ポテンシャル U によって

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}=-\nabla(U+\frac{1}{\rho}P)$$

これを (3) に入れれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Gamma(t)=&-\oint_C\nabla(U+\frac{1}{\rho}P)\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}ds\\ =&-\oint_C\nabla(U+\frac{1}{\rho}P)\cdot d\boldsymbol{x}\\ =&-\oint_C(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3)\quad (G=U+\frac{1}{\rho}P)\\ =&-\oint_C dG\quad (dG=\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\phi}{\partial x_3}dx_3)\end{aligned}$$

閉曲線の線積分なので、始点と終点が同じになることから 0 になります。よって

$$\frac{d}{dt}\Gamma=0$$

これは $\boldsymbol{f}$ が保存力のときの完全流体の運動に対して Γ は定数であることを言っています。これをケルビンの循環定理 (Kelvin's circulation theorem) と呼びます。

ケルビンの循環定理から、完全流体においてはどこかの時間で渦度ベクトルが 0 であれば、それ以降も渦度ベクトルは 0 になることが分かります。まず、時間 t_0 で速度ベクトルが $\boldsymbol{v}=0$ であるとします。t_0 では当然 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ です。そうすると、t_0 で閉曲線 C_0 において循環は

$$\Gamma(C_0)=\oint_{C_0}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

時間 t_0 から時間経過した後の閉曲線 C においてもケルビンの循環定理から

$$\Gamma(C) = \oint_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \int_{\Sigma(C)} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$$

時間経過後に閉曲線 C がどうなっていてもこれは成立しているので、任意の面での面積分が 0 だと言えることから $\boldsymbol{\omega}=0$ となります。よって、時間経過後も $\boldsymbol{\omega}=0$ のままです。逆に言えば、$\boldsymbol{\omega}\neq 0$ であれば時間経過後も $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ であることになります。これは完全流体の特徴的な性質です。また、この結果は時間 t_0 で速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が定数だとしても同じように出て来ます ($\boldsymbol{v}$ が定数なら、$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}=0$、閉曲線の線積分は 0)。

また、同じような話から渦管上の面は時間経過しても渦管上の面であることも分かります。渦管上の面を Σ とします (例えば、円筒の側面上の適当な面)。この面 Σ の閉曲線を C とします。そうすると、ストークスの定理から

$$\Gamma(C) = \oint_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \oint_C d\boldsymbol{s}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \int_{\Sigma(C)} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n})$$

$\boldsymbol{n}$ は面 Σ の単位法線ベクトルです。このため $\boldsymbol{\omega}$ と直交するので (渦管は $\boldsymbol{\omega}$ を接ベクトルにするから)、

$$\Gamma(C) = \oint_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \int_{\Sigma(C)} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$$

ケルビンの循環定理から Γ の値は時間変化しないので、面 $\Sigma(C)$ が時間経過後に別の閉曲線 C' による面 $\Sigma(C')$ になったとしても

$$\Gamma(C') = \oint_{C'} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \int_{\Sigma(C')} dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}') = 0$$

渦管があるとしているので $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ から、これが成立するためには面 $\Sigma(C')$ 上で $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}'=0$ でなければいけないです。よって、面 $\Sigma(C')$ の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{\omega}$ と直交するので、面 $\Sigma(C')$ は渦管上にいることになります。

循環に関する話は終わりにして、速度ベクトルに関する話を見ていきます。流体の速度ベクトルは $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ として

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$$

このとき定常流 (steady flow) と呼ばれます。定常流では速度ベクトルの時間の偏微分が 0 であるために、流線 (速度ベクトルを接ベクトルにする線) は時間変化しません。

定常流での関係を導きます。保存力での Lamb 形式 (2) を定常流として

$$\rho(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) = -\rho\nabla(U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - \nabla P$$

これを使います。流線の単位接ベクトルを $\boldsymbol{q}$ とします。流線の定義から速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{q}$ は同じ方向を向いているので、$\boldsymbol{v}$ に直交するベクトルと $\boldsymbol{q}$ の内積は 0 です。そして、$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$ は $\boldsymbol{v}$ に直交しているので

$$\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) = 0$$

となります。これから

$$\begin{aligned}\rho\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}) &= -\rho\boldsymbol{q}\cdot\nabla(U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}\cdot\nabla P \\ 0 &= -\rho\boldsymbol{q}\cdot\nabla(U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{q}\cdot\nabla P \\ &= -\boldsymbol{q}\cdot\nabla(U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}P)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{q}\cdot\nabla$ は流線の単位接ベクトルとナブラの内積 (流線の接ベクトルの方向の微分。方向微分) なので、括弧内が流線上では定数になっていればいいです (下の補足参照)。

というわけで、括弧内は流線 l 上において定数 α_l になっていればいいので

$$U+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}P=\alpha_l \tag{4}$$

となります。∇ は位置の微分なので α_l には時間依存性を持たせられるように思えますが、定常流であるために流線は時間変化しないことから α_l は時間依存性を持つ必要がないです。定常流で $\boldsymbol{f}$ が保存力のときの完全流体でのこの関係は、ベルヌーイ (Bernoulli) の定理と呼ばれます (流線上でのみ成立している)。流線 l での定数 α_l としているのは、異なる流線ごとに異なった定数を持てるという意味からです (流線 l_1 なら α_1、流線 l_2 なら α_2、$\cdots$)。

今度は定常流とせずに $\boldsymbol{\omega}=0$ としてみます。このとき、$\boldsymbol{\omega}=0$ は $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ のことなので、ベクトルの関係

$$\nabla\times(\nabla A)=0$$

から

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla\phi)=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{v}=\nabla\phi$$

となるスカラー関数 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ が存在します。$\phi(\boldsymbol{x},t)$ のことを速度ポテンシャルと言います。これは単純に言えば保存力のポテンシャルが $\boldsymbol{f}=-\nabla U$ と書けることに対応しています。速度ポテンシャルがあるときの流体の流れはポテンシャル流 (potential flow) と呼ばれます。

$\boldsymbol{\omega}=0$ と速度ポテンシャル ϕ を使ってオイラー方程式を書き換えてみると

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} &= \rho\boldsymbol{f}-\frac{1}{2}\rho\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})-\nabla P \\ \rho\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi+\nabla P &= \rho\boldsymbol{f}-\frac{1}{2}\rho\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{f}$ は保存力として $\boldsymbol{f}=-\nabla U$ とすれば

$$\rho\nabla(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+U+P)=0$$

と書けます。これが成立するためには時間に依存する関数 $F(t)$ によって (定常流ではないので時間依存がある)

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+U+P=F(t) \tag{5}$$

となっていればいいです。これは一般化されたベルヌーイの定理と呼ばれ、この場合は流線上でなくても成立しています。(4) は定常流の場合、(5) は定常流ではなく $\boldsymbol{\omega}=0$ の場合です。

ここからは速度ポテンシャルを見ていきます。速度ポテンシャル ϕ がある時間 t において

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=const \tag{6}$$

となっているとき、この式は 3 次元空間上の面を与えることになり、その面を等ポテンシャル面と言います。等ポテンシャル面の法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N}=\nabla\phi$$

で求められます (数学の「ベクトルの微分、積分」参照)。このため、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ が面の法線方向になるので、速度ベクトルは等ポテンシャル面と直交しています。

速度ポテンシャルは $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ で定義していますが、積分形で与えることもできて

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

となります (両辺を積分しただけ)。$\boldsymbol{x}_0$ は適当な基準となる位置です。これは積分経路の両端だけで決まっていて、途中の経路に依存しません。実際に、途中の経路に依存していないことを示します。そのために、始点 P_1 と終点 P_2 に向かう任意の曲線を C として

$$\phi_C(\boldsymbol{x},t)=\int_C d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

とします。そして、終点 P_2 から始点 P_1 に向かう任意の曲線を C' とし

$$\phi_{C'}(\boldsymbol{x},t)=\int_{C'} d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

この 2 つの差をとれば

$$\phi_C(\boldsymbol{x},t)-\phi_{C'}(\boldsymbol{x},t)=\int_C d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)-\int_{C'} d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

C と C' は両方とも P_1,P_2 から出ている曲線なので右辺は

$$\int_C d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)-\int_{C'} d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)=\oint_{C''} d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

として、閉曲線 C'' に対する積分にできます。これに対してストークスの定理を使えば

$$\oint_{C''} d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)=\int_{S''}dS(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}=\int_{S''}dS(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n})$$

S'' は C'' によって囲まれている面、$\boldsymbol{n}$ はその単位法線ベクトルです。今は $\boldsymbol{\omega}=0$ にしているので、これは 0 になります。よって

$$\phi_C(\boldsymbol{x},t)-\phi_{C'}(\boldsymbol{x},t)=0$$

となり、$\phi_C(\boldsymbol{x},t)=\phi_{C'}(\boldsymbol{x},t)$ となります。これから、$\phi_C(\boldsymbol{x},t)$ は積分経路に依存していないことが分かります。

というわけで、積分経路は無視して始点と終点だけを決めた

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

として問題ありません。次に、これの終点を $d\boldsymbol{x}$ ずらした

$$\phi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x},t)=\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

というのを作り、差を取ると

$$\phi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x},t)-\phi(\boldsymbol{x},t)=\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)-\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)=\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$$

左辺は $d\boldsymbol{x}$ の 1 次までで

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x},t)-\phi(\boldsymbol{x},t)&\simeq\phi(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_3}dx_3-\phi(\boldsymbol{x},t)\\&=\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

最右辺は、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)$ は微小な領域 $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ において $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ で一定だと十分近似できるなら

$$\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}',t)\simeq\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}$$

よって

$$\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}$$
$$\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$$

となります。

具体的な速度ポテンシャルの例を見ます。速度ポテンシャルが存在するとして、連続の方程式

$$\frac{D}{Dt}\rho+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=0$$

に入れれば

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla^2\phi = 0$$

これの第 1 項が 0 になるなら、速度ポテンシャルは

$$\nabla^2\phi = 0$$

というラプラス方程式に従うことになります。ρ の物質微分を 0 にするためには

- $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$
- $\rho = const$

これらのどちらかの条件を与えればいいです。密度を一定 $\rho = const$ とした流体を非圧縮流体 (incompressible fluid) と呼びます。非圧縮は密度の変化がないために、圧縮が起きないことからです (圧力が作用しても密度が変わらない)。ここではラプラス方程式に従う速度ポテンシャルを求めます。

速度ポテンシャル ϕ がラプラス方程式に従っているとき、電磁気でのラプラス方程式に従う電位の結果を流用できます。なので、球対称な解を電磁気との対応から作ります。

電磁気との対応で言えば、速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は電場 $\boldsymbol{E}$、速度ポテンシャル ϕ は電位 φ です。原点に点電荷 $e > 0$ が置かれているとき、位置 $\boldsymbol{x}$ の電場と電位は単位系を SI として

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\ ,\ \varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\quad (\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi\ ,\ \nabla^2\varphi = 0)$$

と与えられます (ラプラス方程式の球対称な解)。これから、速度ポテンシャルがラプラス方程式に従っているとき、点電荷に対応するものを $\lambda > 0$ として、速度ベクトルと速度ポテンシャルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\ ,\ \phi = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\quad (\boldsymbol{v} = \nabla\phi\ ,\ \nabla^2\phi = 0)$$

と与えることが出来ます。これが球対称な速度ポテンシャルとそれに対応する速度ベクトルです。簡単のために原点を中心にしていますが、$\boldsymbol{x}_0$ にいるなら $|\boldsymbol{x}|$ は $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ に変わります。$\lambda/4\pi$ は 2 階微分方程式の一般解の 2 つの任意定数の内の 1 つに対応しています。なので、4π は外してもいいです。もう 1 つの定数は電位では無限遠で 0 という境界条件から消えます。しかし、この定数は意味のある寄与をしないので、単純に無視しても問題ないです。

ϕ は原点を中心に半径 $|\boldsymbol{x}|$ の球 (同心球面) を描き、それは等ポテンシャル面なので $\boldsymbol{v}$ はその球面に直交しています。なので、$\boldsymbol{v}$ は原点を中心に原点から外向きの放射状になっています (流線が原点から放射状に伸びている)。そうすると、λ のいる原点を中心に流体が外向きに流れていることになります。このため、$\lambda > 0$ ではわき出し (source)、$\lambda < 0$ では吸い込み (sink) と呼ばれます。

また、原点に電荷を置いたとき、原点から放射状に伸びている電気力線 (電気力線の接ベクトルは電場) が書けます。この対応からも、流線 (流線の接ベクトルは速度ベクトル) は原点から放射状に伸びていることが分かります。

極座標 (r,θ,ψ) にすれば $\boldsymbol{v}$ は r 成分しか持たないので (放射状に伸びているから)

$$v_r = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r^2}\ ,\ \phi = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r}$$

実際に、ϕ も r の依存性しか持たないことから、極座標 (r,θ,ψ) のナブラ

$$
\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\boldsymbol{e}_\psi
$$

を使えば ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\psi$ は極座標の単位ベクトル)

$$
v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r^2}
$$

となっています。また、ϕ の微分方程式として見たとき

$$
\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r^2}
$$

となりますが、右辺は r の依存性しかないので単純に r で積分すればよくて

$$
\phi = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + C
$$

C は積分定数で、上で触れたように ϕ の境界条件で決まりますが、意味のある寄与をしないので無視します。

これで球対称な速度ポテンシャル ϕ の形が求まりました。これの簡単な応用として電気双極子に対応する双極子を作ります。この双極子はわき出しと吸い出しによるものです。なので、重ね合わせの原理から

$$
\phi = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \Delta\boldsymbol{r}|}
$$

とします。電気双極子では $\pm e$ の電荷を微小距離 $\Delta\boldsymbol{r}$ だけ離れたところに置くのと同様にしています。ここから行う計算も同じです。まず $|\boldsymbol{r} - \Delta\boldsymbol{r}|$ を展開して

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r} - \Delta\boldsymbol{r}| &= \sqrt{(x_1 - \Delta x_1)^2 + (x_2 - \Delta x_2)^2 + (x_3 - \Delta x_3)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1\Delta x_1 - 2x_2\Delta x_2 - 2x_3\Delta x_3 + \cdots} \\
&= \sqrt{r^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r} + \cdots} \\
&= r\ \sqrt{1 - 2\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}/r^2 + \cdots} \\
&\simeq r(1 - \frac{1}{2}\frac{2\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}}{r^2})
\end{aligned}
$$

これを速度ポテンシャルに入れれば

$$
\begin{aligned}
\phi \simeq & -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{1}{1-\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}/r^2} \\
\simeq & -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r^2}(1+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}}{r^2}) \\
= & -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} + \frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}}{r^2} \\
= & \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}}{r^3} \\
= & \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{m}}{r^3} \qquad (\boldsymbol{m}=\lambda\Delta\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

となり、電気双極子モーメントに対応する $\boldsymbol{m}$ が定義されます。というわけで、電気双極子モーメントに対応する電場 $\boldsymbol{E}$ の電気力線と同じように、この双極子による速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の流線が書けます。

・補足

$\boldsymbol{q}\cdot\nabla$ の意味を数学的な側面を無視して簡単に示します。まず必要な性質は、単位ベクトルと任意のベクトルとの内積は任意のベクトルを単位ベクトルの方向に向けることと、適当なスカラー関数 $A(\boldsymbol{x})$ による ∇A は A の空間上の変化を表すことです。この 2 つの性質から単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ との内積 $\boldsymbol{e}\cdot\nabla A$ は単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ の方向を向いた A の空間上の変化になります。

次に、曲線の接ベクトルを持ち込みます。曲線 C を用意し、曲線のパラメータを λ とします。曲線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(\lambda)$ としたとき、曲線の接ベクトル $\boldsymbol{q}'$ は

$$
\boldsymbol{q}' = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\boldsymbol{x}(\lambda+\Delta\lambda)-\boldsymbol{x}(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\lambda}
$$

と定義されます。これから分かるように接ベクトルは曲線の変化する方向を向いています。

よって、曲線の単位接ベクトル $\boldsymbol{q}$ と ∇A の内積 $\boldsymbol{q}\cdot\nabla A$ は曲線が変化する方向の A の変化になります。言い換えれば、A が曲線上を動くときどのように変化するかということです。このことから、$\boldsymbol{q}'\cdot\nabla A=0$ は曲線上で A は変化しない、つまり曲線上で A は定数となります。