ナビエ・ストークス方程式

流体の運動を記述する基本的な方程式であるナビエ・ストークス方程式を導出します。
最初に変形速度テンソルの話をしてから、応力テンソルの形を与えます。応力テンソルの形を与えることでナビエ・ストークス方程式が求められます。なので、ほとんどが変形速度テンソルと応力テンソルの話です。
力学の剛体についての話は知っているものとしています。

静止している流体での応力テンソルは、法線方向にのみ圧力 P が作用している形として

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$$

が与えられます。これは流体が変形しないことを要求した形です。しかし、流体は簡単に形を変えるという性質を持っているために、流体が動いていれば形を変えます。なので、変形による影響を加えて

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{1}$$

とします。τ_{ij} を偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor) と言います。この τ_{ij} を決めないと流体の運動は記述できないので、τ_{ij} の形を与えます。

まずは、変形をどう表現するのかを見ていきます。形が変わることは 2 点間の距離が変わることに対応するので、この変化を考えます。

流体中の点 P_1 と点 P_2 を取り、同じ時間 t において位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}'(t)$ で与えられているとします。2 つの差は $\boldsymbol{x}'(t) - \boldsymbol{x}(t) = \Delta\boldsymbol{x}(t)$ とします。この 2 点が剛体の点であれば、時間の経過に対して 2 つの間の距離は固定されたままです (例えば剛体を回転させても距離は変わらない)。しかし、流体では距離が変わってもいいとします。つまり、微小な時間 Δt 経過したとき 2 点間の差は、2 点の速度差によって書けるとします。なので、流体の速度を $\boldsymbol{v}$ とすれば

$$\Delta\boldsymbol{x}(t+\Delta t) - \Delta\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t))\Delta t$$

となっているとします。これは Δt で割って、$\Delta t \to 0$ にすれば左辺は微分になるので

$$\frac{d\Delta\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$$

と書けます。右辺は $\Delta\boldsymbol{x}$ の一次までで

$$\Delta v_i = v_i(\boldsymbol{x}', t) - v_i(\boldsymbol{x}, t) = v_i(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, t) - v_i(\boldsymbol{x},) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

そうすると

$$\frac{d}{dt}|\Delta\boldsymbol{x}| = \frac{d}{dt}(\Delta\boldsymbol{x}\cdot\Delta\boldsymbol{x})^{1/2} = (\Delta\boldsymbol{x}\cdot\Delta\boldsymbol{x})^{-1/2}\Delta\boldsymbol{x}\cdot\frac{d\Delta\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{1}{|\boldsymbol{\Delta x}|}\Delta x_i\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

となります。添え字の書き換えで

$$\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Delta x_j\Delta x_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

となるので

$$2\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\Delta x_i\Delta x_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\Delta x_j\Delta x_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=\Delta x_i\Delta x_j(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

よって

$$\frac{d}{dt}|\Delta\boldsymbol{x}|=\frac{1}{2}\frac{\Delta x_i\Delta x_j}{|\Delta\boldsymbol{x}|}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

$$\frac{1}{|\Delta\boldsymbol{x}|}\frac{d}{dt}|\Delta\boldsymbol{x}|=\frac{1}{2}\frac{\Delta x_i}{|\Delta\boldsymbol{x}|}\frac{\Delta x_j}{|\Delta\boldsymbol{x}|}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \tag{2}$$

というように、距離の差 $|\Delta\boldsymbol{x}|$ の時間変化の割合が求まります。このとき、右辺の括弧部分が変化量を決めていて、変形速度テンソル (rate of strain tensor) やひずみ速度テンソルやひずみ率テンソルと呼ばれ

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

と定義されます。ひずみと言っているのは、ひずみの定義が長さの変化分を元の長さで割ったものだからです ((2) に dt をかければ変化した長さになる)。e_{ij} は見て分かるように対称 $e_{ij}=e_{ji}$ で、e_{ij} のトレース e_{ii} は

$$e_{ii}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

となっています。

2 点間の距離が変わることは、すでに見たように 2 点での速度に差があることなので、速度の変化についても見ておきます。ある時間 t での、位置 $\boldsymbol{x}$ とそこからから微小な $\Delta\boldsymbol{x}$ 離れた位置を考えます。このとき、速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t)$ は、$\Delta\boldsymbol{x}$ の 1 次までで

$$v_i(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t)=v_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j \tag{3}$$

と展開できます (時間は固定されていることに注意)。これから、2 点での速度の違いは、すでに求めているように

$$\Delta v_i=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta x_j$$

となります。これは

$$\Delta v_i=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j$$

と変形でき、変形速度テンソルが入ってきます。Δv_i は、第二項を w_{ij} として

$$\Delta v_i=e_{ij}\Delta x_j+w_{ij}\Delta x_j \tag{4}$$

と書くことにします。e_{ij} は対称 $e_{ij}=e_{ji}$ で、w_{ij} は反対称 $w_{ij}=-w_{ji}$ です。反対称であるので、対角成分 $i=j$ は 0 です。例えば $w_{1j}\Delta x_j$ は

$$
\begin{aligned}
w_{1j}\Delta x_j = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_1})\Delta x_j &= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3
\end{aligned}
$$

となっています。このように速度の差は対称な項と反対称な項の和で書けます。

2 点間の距離が変わるときに現れる e_{ij} がどのような変形を起こしているのかを確かめます。時間 t で原点から微小な α だけ離れた x_1 軸上の点 A ($x_1 = \alpha,\ x_2 = x_3 = 0$) を考え、原点から A までの長さを考えます。上の記号に合わせれば、原点と A との距離 α が $\Delta \boldsymbol{x}$ のことなので、$\Delta \boldsymbol{x}$ は $\Delta x_1 = \alpha, \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 0$ です。そして、速度は e_{ij} の影響を見たいので $w_{ij} = 0$ だとし、$v_i = e_{ij}\Delta x_j$ で与えることにします。原点は固定されているので、点 A の速度 (原点と点 A の速度差) は (4) から

$$
v_1 = e_{1j}\Delta x_j = e_{11}\Delta x_1 = e_{11}\alpha\ ,\ v_2 = e_{21}\alpha\ ,\ v_3 = e_{31}\alpha
$$

そうすると、微小な時間 Δt 後の点 A の位置は $x_1 = \alpha,\ x_2 = x_3 = 0$ から

$$
x_1 = \alpha + v_1\Delta t = \alpha + e_{11}\alpha\Delta t\ ,\ x_2 = e_{21}\alpha\Delta t\ ,\ x_3 = e_{31}\alpha\Delta t
$$

と動きます。x_1 を見てみれば、x_1 軸上の α にいた点 A の位置が x_1 軸上の $\alpha + e_{11}\alpha\Delta t$ に動いていることが分かります。つまり、$e_{11}\alpha\Delta t$ だけ x_1 軸方向に伸びています。これから、e_{11} は x_1 軸方向への伸縮を表すことになります ($e_{11} > 0$ なら伸び、$e_{11} < 0$ なら縮む)。

x_2, x_3 は $x_2 = x_3 = 0$ から動いていますが伸縮の形になっていないので、別の変形を起こしています。それが何か見ます。まず、原点と位置 A の距離がどうなっているのかを求めて、長さの変化に寄与していないことを確かめます。Δt 経過後の位置 A の原点からの距離は

$$
l(t+\Delta t) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \alpha\sqrt{(1 + e_{11}\Delta t)^2 + (e_{21}\Delta t)^2 + (e_{31}\Delta t)^2}
$$

これと元の距離 $l(t) = \alpha$ との差は、Δt の 1 次までで

$$
\begin{aligned}
\Delta l = l(t+\Delta t) - l(t) &= \alpha\sqrt{1 + 2e_{11}\Delta t + e_{11}^2(\Delta t)^2 + e_{21}^2(\Delta t)^2 + e_{31}^2(\Delta t)^2} - \alpha \\
&\simeq \frac{1}{2}\alpha(1 + 2e_{11}\Delta t) - \alpha \\
&= e_{11}\alpha\Delta t \\
\frac{1}{\alpha}\frac{\Delta l}{\Delta t} &= e_{11}
\end{aligned}
$$

左辺は (2) に合わせれば

$$
\frac{d}{dt}|\Delta \boldsymbol{x}| = \frac{|\Delta \boldsymbol{x}(t+\Delta t)| - |\Delta \boldsymbol{x}(t)|}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\Delta t}
$$

なので、(2) と同じになります ($\Delta x_i = \alpha\ ,\ |\Delta \boldsymbol{x}| = \alpha$)。これから、長さの変化に e_{21}, e_{31} は関与していないことが分かります。それではどのような寄与になっているかは、x_1 と x_2, x_3 の位置を三角関数で表現すれば分かります。つまり、t 経過後に x_1 軸から、x_2 軸方向と x_3 軸方向に角度

$$\theta_{x_1x_2} = \arctan\frac{x_2}{x_1} = \arctan\frac{e_{21}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t}$$

$$\theta_{x_1x_3} = \arctan\frac{x_3}{x_1} = \arctan\frac{e_{31}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t}$$

だけ動いています。Δt が微小だとすれば

$$\theta_{x_1x_2} = \arctan\frac{e_{21}\Delta t}{(1+e_{11}\Delta t)} \simeq \frac{e_{21}\Delta t}{1+e_{11}\Delta t} \simeq e_{21}\Delta t$$

となります。このように、e_{21}, e_{31} は点 A の位置の角度 (原点から A までの線の角度) をずらしています (距離には寄与せずに)。

今は原点から x_1 軸上の点 A への線だけを見ているので、角度のずれによる変形の意味が分かりづらいですが、もう 1 つ x_2 軸上の点 B も考えれば変形の動きが見やすくなります (平面上で言えば、長方形がひし形になる)。

このように変形速度テンソルは距離の伸縮と角度のずれを含んでいます。同様のことが他の成分で言えるので、対角成分 $e_{ij}(i=j)$ は x_1,x_2,x_3 軸方向の伸縮、非対角成分 $e_{ij}(i\neq j)$ は角度のずれを起こします。トレース e_{ii} は体積の時間変化に対応します。これは体積の時間変化を見てみれば直接分かります。微小な体積を $\Delta V(t)=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ とし、Δt 経った後に $\Delta V(t+\Delta t)=\Delta x_1'\Delta x_2'\Delta x_3'$ になるとします ($\Delta x_i' = \Delta x_i(t+\Delta t)$)。$\Delta x_i$ は 2 点間の差なので、Δt 経過後の $\Delta x_i'$ は 2 点間の速度差 Δv_i によって

$$\Delta x_i' = \Delta x_i(t+\Delta t) = \Delta x_i + \Delta v_i\Delta t = \Delta x_i + e_{ij}\Delta x_j\Delta t$$

と書けます ($w_{ij}=0$ として)。これから

$$\Delta V(t+\Delta t) = \Delta x_1'\Delta x_2'\Delta x_3' = (\Delta x_1 + e_{1j}\Delta x_j\Delta t)(\Delta x_2 + e_{2j}\Delta x_j\Delta t)(\Delta x_3 + e_{3j}\Delta x_j\Delta t)$$

e_{ij} の対角成分の寄与だけが知りたいので、非対角成分は $e_{ij}=0\ (i\neq j)$ として、$\Delta V(t+\Delta t)$ は Δt の 1 次までを拾って

$$\begin{aligned}
\Delta V(t+\Delta t) &= (\Delta x_1 + e_{11}\Delta x_1\Delta t)(\Delta x_2 + e_{22}\Delta x_2\Delta t)(\Delta x_3 + e_{33}\Delta x_3\Delta t)\\
&= \Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3(1+e_{11}x_1\Delta t)(1+e_{22}\Delta t)(1+e_{33}\Delta t)\\
&\simeq \Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3(1+e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t)\\
&= \Delta V(t)(1+e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t)
\end{aligned}$$

これから

$$\frac{\Delta V(t+\Delta t)-\Delta V(t)}{\Delta t} = \Delta V(t)\frac{e_{11}\Delta t+e_{22}\Delta t+e_{33}\Delta t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta V(t)}\frac{\Delta V(t+\Delta t)-\Delta V(t)}{\Delta t} = e_{11}+e_{22}+e_{33}$$

$$\frac{1}{\Delta V(t)}\frac{d\Delta V(t)}{dt} = e_{ii}$$

よって、体積の時間変化の割合がトレース e_{ii} になります。

というわけで、速度差の変化に現れる対称な e_{ij} は、2 点間の距離の伸縮と角度のずれを作ります。残っている w_{ij} は、ナビエ・ストークス方程式の導出には直接関係しませんが、どんな変形を起こすのかを示しておきます。

そのために、剛体の回転の場合を見ます。剛体での点の速度は $\boldsymbol{v}$ で与えられるとします。このとき、位置ベクトル $\boldsymbol{x}'$ の点での速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t)$ は、位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ の点を通る軸の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ とその点での速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ によって

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})$$

と書けます (下の補足 1 参照)。角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は剛体中のどの点でも同じです。2 点の間は $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$ とします。成分で書けば

$$\begin{aligned}
v_1(\boldsymbol{x}', t) &= v_1(\boldsymbol{x}, t) + \Omega_2 \Delta x_3 - \Omega_3 \Delta x_2 \\
v_2(\boldsymbol{x}', t) &= v_2(\boldsymbol{x}, t) + \Omega_3 \Delta x_1 - \Omega_1 \Delta x_3 \\
v_3(\boldsymbol{x}', t) &= v_3(\boldsymbol{x}, t) + \Omega_1 \Delta x_2 - \Omega_2 \Delta x_1
\end{aligned}$$

ここで速度ベクトルの回転を

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} = (\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})\boldsymbol{e}_1 + (\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\boldsymbol{e}_2 + (\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})\boldsymbol{e}_3$$

と定義します。速度ベクトルの回転である $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトル (vorticity vector) と呼ばれます。$\boldsymbol{\Omega}$ は位置の微分に引っかからないので

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 2\Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + 2\Omega_2 \boldsymbol{e}_2 + 2\Omega_3 \boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{\Omega}$$

となり、渦度 $|\boldsymbol{\omega}|$ は角速度ベクトル $|\boldsymbol{\Omega}|$ の 2 倍です。この関係から分かるように、渦度は回転の強さの度合いと言えます。これを使って書き換えれば

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}', t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{\Omega} \times \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \Delta\boldsymbol{x}$$

となり、成分で書けば

$$v_i(\boldsymbol{x}', t) = v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \Delta\boldsymbol{x})_i = v_i(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j \Delta x_k = v_i(\boldsymbol{x}, t) + v_i^{boby}(\boldsymbol{x}, t) \tag{5}$$

途中で外積をレヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{ijk}(\epsilon_{123} = 1)$ を使って書き換えています。成分を分けて書けば

$$v_1(\boldsymbol{x}', t) = v_1(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\omega_3 \Delta x_2 + \frac{1}{2}\omega_2 \Delta x_3 = v_1(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3 \tag{6a}$$

$$v_2(\boldsymbol{x}', t) = v_2(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}\omega_3 \Delta x_1 - \frac{1}{2}\omega_1 \Delta x_3 = v_2(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2})\Delta x_3 \tag{6b}$$

$$v_3(\boldsymbol{x}', t) = v_3(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{2}\omega_2 \Delta x_1 + \frac{1}{2}\omega_1 \Delta x_2 = v_3(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3})\Delta x_1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3})\Delta x_2 \tag{6c}$$

となります。

これが剛体の場合の話です。これと剛体としていない場合での Δv_i とを比べます。そうすると、$v_1(\boldsymbol{x}', t)$ は (3) と (4) から

$$
\begin{aligned}
v_i(\boldsymbol{x}',t) &= v_i(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t) = v_i(\boldsymbol{x},t)+\Delta v_i \\
&= v_i(\boldsymbol{x},t)+e_{ij}\Delta x_j + w_{ij}\Delta x_j \\
&= v_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j
\end{aligned}
$$

第三項と ω_i の成分

$$
\omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\ ,\ \omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\ ,\ \omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}
$$

を比べてみれば

$$
w_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k \tag{7}
$$

であることが分かります。なので

$$
w_{ij}\Delta x_j = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k\Delta x_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ikj}\omega_k\Delta x_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j\Delta x_k
$$

よって、渦度 ω_i によって

$$
v_i(\boldsymbol{x}',t) = v_i(\boldsymbol{x},t)+e_{ij}\Delta x_j+\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_j\Delta x_k
$$

そして、これは (5) から

$$
v_i(\boldsymbol{x}',t) = v_i(\boldsymbol{x},t)+e_{ij}\Delta x_j+v_i^{boby}(\boldsymbol{x},t) \quad (\Delta v_i = e_{ij}\Delta x_j + v_i^{boby}(\boldsymbol{x},t))
$$

と書けます。成分を具体的に見ておけば、例えば $i=1$ では

$$
\begin{aligned}
v_1(\boldsymbol{x}',t) = \ & v_1(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2})\Delta x_2+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3})\Delta x_3 \\
&+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1})\Delta x_2+\frac{1}{2}(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1})\Delta x_3
\end{aligned}
$$

となって、(6a) の第二項と第三項が出てきています。このように、回転する剛体からは v_i^{boby} しか出てこないことと、(7) から w_{ij} は角速度ベクトルと関係することから、w_{ij} は回転の影響を表します。つまり、$w_{ij}\Delta x_j$ は、回転によって $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ での速度の差がどうなるのかを表しています (回転による Δv_i への寄与)。そして、形を変えないという性質 (2 点間の距離が変わらない) を持つ剛体では現れない $e_{ij}\Delta x_j$ は、形を変える寄与なのだと確認できます。

　というわけで、Δv_i は、伸縮 (角度のズレを含む) の寄与 e_{ij}、回転の寄与 w_{ij} によって構成されています。そして、

$$
v_i(\boldsymbol{x}') = v_i(\boldsymbol{x})+\Delta v_i
$$

での $v_i(\boldsymbol{x})$ を平行移動による寄与とします (補足 1 の話から平行移動と見える)。これらから、動いている流体の変形はこの 3 つの組み合わせだと言う事ができます。

話を応力テンソルに戻します。これまでの話から、流体の変形には e_{ij} と w_{ij} が関わっています。そして、e_{ij} と w_{ij} は $\partial v_i/\partial x_j$ で構成されています。なので、形が変わるときは $\partial v_i/\partial x_j$ の項がいると考えられます。そうすると、問題になるのが、どのような形で応力テンソルに入ってくるのかです。これは現実の流体を説明できるような仮定を組み込むしかないです (現実の現象を説明できるモデルを作る)。というわけで

(i) 応力テンソルは変形速度テンソルの 1 次までを含む関数で書ける。

(ii) 流体において、応力テンソルと変形速度テンソルによる関係はどこでも同じ。

(iii) 流体において、応力テンソルと変形速度テンソルによる関係は座標軸の方向とは無関係。

(iv) 変形速度テンソルが $e_{ij}=0$ なら $\tau_{ij}=0$。

という仮定を入れます。これらの仮定による流体ををニュートン流体 (Newtonian fluid) と言い、例えば水の性質を上手く説明できます。細かくは (i) は熱力学変数も含みます。(ii) のとき流体は均一的 (homogeneous) と言い、(iii) のとき流体は等方的 (isotropy) と言います。(ii) は応力テンソルは $\boldsymbol{x}$ にあらわに (陽に) 依存しないことを (例えば $\partial v_i/\partial x_j$ を通して $\boldsymbol{x}$ に依存する)、(iii) は流体中には特別な方向がないことを意味します。(iv) は応力テンソルは流体が静止していれば $\tau_{ij}=0$ ということです。ここではニュートン流体を使います。

ニュートン流体とし、応力テンソルを

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

としたとき、偏差応力テンソル τ_{ij} は (i) から

$$\tau_{ij}(e_{kl}) = M_{ijkl}e_{kl} \tag{8}$$

と書けます。M_{ijkl} は 4 階のテンソルです。変形速度テンソルと偏差応力テンソルの関係を与えるこの式を構成方程式 (constitutive equation) と呼びます。構成方程式と「流体の運動」での質量、運動量、エネルギー保存による方程式とを合わせて基礎方程式と呼びます。

ここで問題になるのが M_{ijkl} は何なのかです。これは (iii) での等方性から形が決まります。(iii) は座標軸を回転させても (8) の形が保たれることを要求しているので、回転後も

$$\overline{\tau}_{ij} = M_{ijkl}\overline{e}_{kl}$$

という形を維持しなくてはいけません ((8) での式の $\boldsymbol{x}$ を新しい座標軸での $\overline{\boldsymbol{x}}$ に置き換えただけのものが成立する)。そうすると、M_{ijkl} は座標軸の回転で不変な 4 階テンソル、言い換えれば、等方的な 4 階テンソルであればいいです。等方的な 4 階テンソルの一般形は

$$M_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}$$

で与えることができます (下の補足 2 参照)。これを使うことで応力テンソルは、変形速度テンソルは対称 $e_{ij}=e_{ji}$ なので

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} =& -P\delta_{ij} + (a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl} \\
=& -P\delta_{ij} + (a_1\delta_{ij}e_{kk} + a_2e_{ij} + a_3e_{ji}) \\
=& (-P + a_1\tau_{kk})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)e_{ij} \\
=& (-P + a_1\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
=& (-P + a_1\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
=& -P\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}
$$

となります ($\lambda = a_1, \mu = a_2 + a_3$)。これがニュートン流体としたときの応力テンソルです。$\partial v_k/\partial x_k$ は変形速度テンソルのトレース e_{kk} で、第三項は変形速度テンソル e_{ij} そのものなので

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{9}$$

と書けます。μ, λ は流体の変形に関連する係数で、粘性 (viscosity) と呼ばれます。粘性は変形に対する抵抗です。μ を粘性率、λ を第二粘性率と言ったりします。

粘性を変形に対する抵抗と言えることは簡単な例から分かります。2 次元で考えて、$x_2 = 0$ と $x_2 = h$ に面積 S の板を x_1 軸に平行におき、その間に静止している流体が挟まれているとします。これに対して、下側の板は固定して、上側の板を x_1 軸方向に定数の速度 V で動かして、流体の運動が固定されるまで待ちます。安定したときの流体は蛇行したりせずに x 軸方向に平行に流れているとします。

板と流体の間に抵抗があるとします (抵抗がなければ板が流体の面をすべるだけ)。このとき、板と接している流体の面に作用している力 F は、速度と板の面積に比例するはずです。加えて、流体の幅 h を小さくすれば、流体に作用する力は増えるはずなので、適当な比例定数 μ によって

$$F = \mu\frac{SV}{h}$$

となります。これを面積 S で割れば接線応力 (流体に沿って板を動かすので接線方向に力は作用している) になって

$$p = \mu\frac{V}{h}$$

この μ が粘性です。このように作用する力への抵抗として粘性が現れます。このような関係が流体の速度 v_1(x_1 軸方向の流体の速度) でも成立すると考えて

$$p = \mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

としたものをニュートンの粘性の法則 (Newton's law of viscosity) と言います。これは τ_{ij} の非対角成分 (接線応力) にいます。ニュートンの粘性の法則は例えば

$$v_1 = \frac{x_2}{h}V \ , \ p = \mu\frac{v_1}{x_2}$$

のように、動いている板から離れるほど流体の速度は遅くなり、p は v_1 と x_2 の比率によるという関係を、速度勾配（x_2 による速度の変化)$\partial v_1/\partial x_2$ で書いたものです。ニュートンの粘性の法則を応力テンソルにしたものが (9) です。

今度は等方的なテンソルの形を使わずに、別の方向からニュートン流体の応力テンソルを求めます。そのために、変形速度テンソルが対角化されている座標軸 (変形速度テンソルの主軸) を選ぶことにし (後で任意の座標軸に戻す)、対角化された変形速度テンソルの成分を ϵ_{ij} で書くことにします。なので

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

として、ϵ_{ij} はこの座標軸において

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

となります。同じ x_i を使いますが、これは変形速度テンソルの主軸によるもので、ここから座標軸を任意だとするまでは添え字 i は変形速度テンソルの主軸によるものです。

4 階テンソルを使わずに話を進めるので、(i) から、対角化された変形速度テンソル ϵ_{ij} の対角成分 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ によって、偏差応力テンソルを

$$\tau_{ij} = C_1\epsilon_{11} + C_2\epsilon_{22} + C_3\epsilon_{33}$$

とします (変形速度テンソルの 1 次のみを含む)。そして、(iii) から等方的とするので、例えば

$$\tau_{11} = a_1\epsilon_{11} + a_2\epsilon_{22} + a_3\epsilon_{33}$$

となっているとき、回転後の座標軸 (x'_1, x'_2, x'_3) においては

$$\tau_{1'1'} = a_1\epsilon_{1'1'} + a_2\epsilon_{2'2'} + a_3\epsilon_{3'3'} \qquad \left(\epsilon_{i'j'} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i})\right)$$

と書けるとします (a_1, a_2, a_3 が 4 階テンソルの成分の値に対応)。回転後の (x'_1, x'_2, x'_3) に対応する場合は添え字に「$'$」をつけて区別します。

回転不変であることは自由度が 1 つ落ちることを意味します (回転不変な式によって、a_1, a_2, a_3 の間に関係式ができる)。なので、a_1, a_2, a_3 から 2 つ決めれば残りの 1 つも決まります。このことは、例えば x_1 軸周りに 90 度回転させると分かります。90 度回転させて、x_2 軸を x_3 軸 ($= x'_2$ 軸)、x_3 軸を $-x_2$ 軸 ($= x'_3$ 軸) に持っていくとします。これは

$$x_1 = x'_1\ ,\ x_2 = -x'_3\ ,\ x_3 = x'_2$$

とすることなので

$$\epsilon_{1'1'} = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11}\ ,\ \epsilon_{2'2'} = \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \epsilon_{33}\ ,\ \epsilon_{3'3'} = \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \epsilon_{22}$$

を使えば

$$\tau_{1'1'} = a_1\epsilon_{1'1'} + a_2\epsilon_{2'2'} + a_3\epsilon_{3'3'} = a_1\epsilon_{11} + a_2\epsilon_{33} + a_3\epsilon_{22}$$

σ_{11} は x_1 軸に垂直な面の x_1 成分の応力なので、τ_{11} は x_1 軸に垂直な面の x_1 成分の応力と言えます。そして、$x_1 = x'_1$ であるために、$\tau_{1'1'}$ も同じ方向の応力です。よって、$a_2 = a_3$ が言えます。

というわけで、a_1 を $\lambda + c$、$a_2 = a_3 = \lambda$ として、τ_{ij} の対角成分は

$$\tau_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{11}$$

$$\tau_{22} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{22}$$

$$\tau_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{33}$$

となります。

τ_{ij} の非対角成分を求めます。τ_{12} を

$$\tau_{12} = b_1\epsilon_{11} + b_2\epsilon_{22} + b_3\epsilon_{33}$$

とします。これは x_1 軸に垂直な面に作用する x_2 軸方向の応力です (σ_{12} がこの成分の応力だから)。これの座標軸を x_1 軸周りに 180 度回転させて、

$$x_1 = x'_1\ ,\ x_2 = -x'_2\ ,\ x_3 = -x'_3$$

と設定します。そうすると

$$\epsilon_{1'1'} = \epsilon_{11}\ ,\ \epsilon_{2'2'} = \epsilon_{22}\ ,\ \epsilon_{3'3'} = \epsilon_{33}$$

なので

$$\tau_{1'2'} = b_1\epsilon_{1'1'} + b_2\epsilon_{2'2'} + b_3\epsilon_{3'3'} = b_1\epsilon_{11} + b_2\epsilon_{22} + b_3\epsilon_{33}$$

となり、τ_{12} と一致します。しかし、τ_{12} は x_1 軸に垂直な面に作用する x_2 軸方向の応力であれることを踏まえると矛盾が出てきます。$\tau_{1'2'}$ は x'_1 軸に垂直な面に作用する x'_2 軸方向の応力です。そうすると、$x_2 = -x'_2$ なので $\tau_{1'2'}$ と τ_{12} では応力の作用している方向が逆向きです。つまり、$\tau_{1'2'} = -\tau_{12}$ でなければいけないです。よって、回転不変性とこれが成立するためには、$\tau_{12} = \tau_{1'2'} = 0$ である必要があります。これは他の成分でも同様にできるので、今の座標軸 (e_{ij} が対角成分のみになっている座標軸) においては τ_{ij} の非対角成分は 0 です。

よって、τ_{ij} は対角成分のみを持ち

$$\tau_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{11}$$

$$\tau_{22} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{22}$$

$$\tau_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{33}$$

となります。後は e_{ij} が対角化されている座標軸でなく、一般的な座標軸に戻せばいいです。ϵ_{ij} は

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

と書けるので、τ_{ij} の第一項はクロネッカーデルタ δ_{ij} によって

$$\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

とまとめられます。これから τ_{ij} は

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + c\epsilon_{ij}$$

ちなみに、このときの τ_{ij} は対角成分のみなので、変形速度テンソルの主軸と応力テンソルの主軸が一致していることが分かります。

この式はテンソルの成分の形になっていて、τ_{ij} を成分に持つ 2 階テンソルを $\boldsymbol{\tau}$、ϵ_{ij} を成分に持つ 2 階テンソルを $\boldsymbol{\epsilon}$ とすれば ($\boldsymbol{e}_i$ を直交基底とすれば、$\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$)

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\epsilon} \qquad (\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

と書くことができます (第一項には単位行列 I がいますが省いています)。この表記はどんな座標軸を選ぼうと成立しています (テンソルの性質)。そうすると、ϵ_{ij} は特別な座標軸を選んだときの変形速度テンソル $\boldsymbol{e}$ の成分でしかないので、$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{e}$ です。よって、変形速度テンソルの主軸と特定しない適当な座標軸において、$\boldsymbol{\tau}$ の成分は

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + ce_{ij} \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \frac{1}{2}c(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

と書けます ($\mu = c/2$)。というわけで、応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

となり、(9) と同じ結果が求まります。

応力テンソルが求まったので、運動方程式に適用します。運動方程式は運動量方程式なので

$$\rho\frac{D}{Dt}v_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

に入れます。ρ は密度、f_i は単位質量あたりの体積力です。λ, μ は定数だとすれば、右辺第二項は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-P + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\big) \\
&= (-\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}))\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\big) \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

圧力は $P = P(x_1, x_2, x_3)$ なので微分に引っかかります。物質微分を偏微分の形で書けば左辺は

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \rho \frac{\partial}{\partial t} v_i + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i$$

なので

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_i + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \ \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

これはベクトルで書けば

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \ \rho \boldsymbol{f} - \nabla P + \lambda \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \mu (\nabla^2 \boldsymbol{v} + \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}))$$

これがナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式で、非線形の 2 階偏微分方程式です。これを厳密に解く方法は存在していなく、特別な場合だけ解けています。この問題には賞金がかかっています (ミレニアム賞問題)。また、λ と μ を定数としましたが、定数としない場合がより一般的な形です。

・補足 1

回転や剛体についての細かい話は省いて、剛体において速度が

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}', t) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

で書けることを示します。

剛体における 2 つの点 P, P' を考え、P' を通る軸を回転軸にして回転しているとします。まず、P' を原点にした座標系 A' で見ます。P' は P を原点としたときの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にあるとします。剛体なので、P と P' の間の距離は一定です ($|\boldsymbol{r}| = const$)。なので、P' から見て P は円運動しています。そうすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ によって、P の速度 $\boldsymbol{u}$ は

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

で書けます。今度は固定された座標系 A に移ります。この座標に対して P' は速度 $\boldsymbol{v}'$ で動いているとします。そうすると、P の速度は A' での速度に $\boldsymbol{v}'$ を足したものなので、座標系 A において P の速度は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

となります。$\boldsymbol{r}$ は P と P' の間のベクトルなので、座標系 A での P の位置を $\boldsymbol{x}$、P' の位置を $\boldsymbol{x}'$ とすれば

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$$

なので、位置 $\boldsymbol{x}$ の点 P の速度は $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$、位置 $\boldsymbol{x}'$ の点 P' の速度は $d\boldsymbol{x}'/dt = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}', t)$ として

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x}', t) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \quad (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r})$$

となります。$\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{x}$ とは無関係に決まっています。これは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r}$ の時間微分なので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

となり、これは今してきた話からも分かるように、当然 P' に対する P の相対速度です。

・補足 2

4 階のテンソルが等方的であるときの一般的な形を求めます。面倒ですが、細かいことを考えずに n 階テンソルの場合が求められる方法を使います。

まず、1 階のテンソルであるベクトルから見ていきます (0 階のテンソルであるスカラーは定義から回転変換で不変なので、等方的)。等方的であるなら、ベクトル a_i は回転変換 T_{ij} によって

$$a'_i = T_{ij}a_j = a_i$$

となります。ベクトルの無限小の角度 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ による回転は

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{a} \quad (\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta\theta_1\boldsymbol{e}_1 + \Delta\theta_2\boldsymbol{e}_2 + \Delta\theta_3\boldsymbol{e}_3)$$

これはレヴィ・チビタ記号によって外積が

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$$

と書けることから

$$a'_i = a_i + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_j a_k = a_k\delta_{ik} + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_j a_k = (\delta_{ik} + \epsilon_{ijk}\Delta\theta_j)a_k = T_{ik}a_k$$

このとき

$$a_i = T_{ik}a_k$$

だとすると

$$\epsilon_{ijk}\Delta\theta_j a_k = 0$$

ここでレヴィ・チビタ記号の関係

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{ijk} = \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{jb} \tag{10}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon_{iab}\epsilon_{ijk}\Delta\theta_j a_k \\
&= (\delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{jb})\Delta\theta_j a_k \\
&= \Delta\theta_a a_b - \Delta\theta_b a_a \\
\Delta\theta_a a_b &= \Delta\theta_b a_a
\end{aligned} \tag{11}$$

等方的であるならどんな回転に対してもこれが成立しているはずです。例えば $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = \Delta\theta$ としたとき、a_i も全て同じ値なら (11) は成立します。なので、a_i の全ての成分が同じとき、$\Delta\theta$ で全方向に回転させれば、a_i は不変です。しかし、a_i の全ての成分が同じとき、$\Delta\theta_1 \neq \Delta\theta_2 \neq \Delta\theta_3$ の回転に対して、(11) は $a_i = 0$ でないと成立しません。よって、$a_i = 0$ でないと成立しない場合があるので、あらゆる回転に対して不変であるためには、全ての成分が 0 でなければいけません。というわけで、等方的なベクトルはゼロベクトルのみです。

2 階のテンソルの場合も簡単に分かります。n 階のテンソルの変換則は、任意の直交変換 L_{ij} に対して

$$A'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = L_{i_1 a_1} L_{i_2 a_2} \cdots L_{i_n a_n} A_{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

と与えられています (この変換則に従うものをテンソルと定義できる)。回転変換は直交変換なので、2 階のテンソルを A_{ij} とすれば、等方的であるなら

$$A'_{ij} = T_{ia} T_{jb} A_{ab} = A_{ij}$$

となります。

$T_{ia}T_{jb}$ は $\Delta\theta_i$ の 1 次までで

$$T_{ia}T_{jb} = (\delta_{ia} + \epsilon_{ika}\Delta\theta_k)(\delta_{jb} + \epsilon_{jkb}\Delta\theta_k) \simeq \delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ia}\epsilon_{jkb}\Delta\theta_k + \delta_{jb}\epsilon_{ika}\Delta\theta_k$$

これから

$$\begin{aligned}
T_{ia}T_{jb}A_{ab} &= (\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ia}\epsilon_{jkb}\Delta\theta_k + \delta_{jb}\epsilon_{ika}\Delta\theta_k)A_{ab} \\
&= A_{ij} + \epsilon_{jkb}\Delta\theta_k A_{ib} + \epsilon_{ika}\Delta\theta_k A_{aj} \\
&= A_{ij} + \Delta\theta_k(\epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj})
\end{aligned}$$

よって

$$\epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj} = 0$$

で等方的になります。これにもレヴィ・チビタ記号の関係を使って

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon_{jkb}A_{ib} + \epsilon_{ika}A_{aj} \\
&= \epsilon_{kjb}A_{ib} + \epsilon_{kia}A_{aj} \\
&= \epsilon_{kja}\epsilon_{kjb}A_{ib} + \epsilon_{kjt}\epsilon_{kia}A_{aj} \\
&= (\delta_{jj}\delta_{tb} - \delta_{jb}\delta_{tj})A_{ib} + (\delta_{ji}\delta_{ta} - \delta_{ja}\delta_{ti})A_{aj} \\
&= \delta_{jj}A_{it} - \delta_{tj}A_{ij} + A_{ti} - \delta_{ti}A_{jj} \\
&= 3A_{it} - A_{it} + A_{ti} - \delta_{ti}A_{jj} \\
&= 2A_{it} + A_{ti} - \delta_{ti}A_{jj}
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ から、$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ です。$A_{jj} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ は A_{ij} のトレースです。これは

$$2A_{it} + A_{ti} = \delta_{ti}A_{jj}$$

において、右辺は i と t を入れ替えても変わりません ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$)。よって

$$2A_{it} + A_{ti} = 2A_{ti} + A_{it}$$

なので、A_{ij} は対称 $A_{ij} = A_{ji}$ です。対称であることから

$$3A_{ij} = \delta_{ij} A_{aa}$$

$$A_{ij} = \frac{A_{aa}}{3} \delta_{ij}$$

となっていれば、A_{ij} は等方的です。
　といったことを 4 階のテンソルでも行います。つまり 4 階のテンソル M_{ijkl} に対して

$$M'_{ijkl} = T_{ia} T_{jb} T_{kc} T_{ld} M_{abcd} = M_{ijkl}$$

として、同じことをします。$T_{ia} T_{jb} T_{kc} T_{ld}$ は

$$\begin{aligned}
T_{ia} T_{jb} T_{kc} T_{ld} &= (\delta_{ia} + \epsilon_{isa} \Delta\theta_s)(\delta_{jb} + \epsilon_{jsb} \Delta\theta_s)(\delta_{kc} + \epsilon_{ksc} \Delta\theta_s)(\delta_{ld} + \epsilon_{lsd} \Delta\theta_s) \\
&\simeq \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\quad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&= \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\quad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
&(\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + \delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\qquad + \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + \delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s)M_{abcd} \\
&\quad = M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld} + M_{abcd}\delta_{jb}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s \\
&\qquad + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{ld}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{ld}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + M_{abcd}\delta_{ia}\delta_{jb}\delta_{kc}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + M_{ajkl}\epsilon_{isa}\Delta\theta_s + M_{ibkl}\epsilon_{jsb}\Delta\theta_s + M_{ijcl}\epsilon_{ksc}\Delta\theta_s + M_{ijkd}\epsilon_{lsd}\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + (M_{bjkl}\epsilon_{iab} + M_{ibkl}\epsilon_{jsb} + M_{ijcl}\epsilon_{ksc} + M_{ijkd}\epsilon_{lsd})\Delta\theta_s \\
&\quad = M_{ijkl} + (\epsilon_{iab}M_{bjkl} + \epsilon_{jab}M_{ibkl} + \epsilon_{kab}M_{ijbl} + \epsilon_{lab}M_{ijkb})\Delta\theta_a
\end{aligned}$$

最後は添え字の文字を付け替えているだけです。よって、等方的であるためには

$$\epsilon_{aib}M_{bjkl} + \epsilon_{ajb}M_{ibkl} + \epsilon_{akb}M_{ijbl} + \epsilon_{alb}M_{ijkb} = 0$$

とであればいいです。これに ϵ_{ais} をかければ

$$\epsilon_{ais}\epsilon_{aib} = \delta_{ii}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{si}$$

$$\epsilon_{ais}\epsilon_{ajb} = \delta_{ij}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sj}$$

$$\epsilon_{ais}\epsilon_{akb} = \delta_{ik}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sk}$$

$$\epsilon_{ais}\epsilon_{alb} = \delta_{il}\delta_{sb} - \delta_{ib}\delta_{sl}$$

なので

$$
\begin{aligned}
(\delta_{ii}\delta_{sb}-\delta_{ib}\delta_{si})M_{bjkl}=3M_{sjkl}-M_{sjkl}=2M_{sjkl}\\
(\delta_{ij}\delta_{sb}-\delta_{ib}\delta_{sj})M_{ibkl}=M_{jskl}-\delta_{sj}M_{bbkl}\\
(\delta_{ik}\delta_{sb}-\delta_{ib}\delta_{sk})M_{ijbl}=M_{kjsl}-\delta_{sk}M_{bjbl}\\
(\delta_{il}\delta_{sb}-\delta_{ib}\delta_{sl})M_{ijkb}=M_{ljks}-\delta_{sl}M_{bjkb}
\end{aligned}
$$

から

$$
2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}=\delta_{sj}M_{bbkl}+\delta_{sk}M_{bjbl}+\delta_{sl}M_{bjkb} \tag{12a}
$$

ここで M_{bbkl} のように添え字に同じ記号が入ってきているものがあります。この添え字は和を取るものなので

$$
M_{bbkl}=M_{11kl}+M_{22kl}+M_{33kl}
$$

となってります。そうすると、これは k,l によって決まるものなので、2 階のテンソルです。なので、等方的な 2 階のテンソルの形を使って

$$
M_{bbkl}=c\delta_{kl}
$$

のように書けます。

　これだけからは決まらなく、さらに同じことを $\epsilon_{ajs},\epsilon_{aks},\epsilon_{als}$ に対しても行います。そうすると、それぞれに対して

$$
2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj}=\delta_{sj}M_{bbkl}+\delta_{jl}M_{sbkb}+\delta_{jk}M_{sbbl} \tag{12b}
$$

$$
2M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}=\delta_{kl}M_{sjbb}+\delta_{sk}M_{bjbl}+\delta_{jk}M_{sbbl} \tag{12c}
$$

$$
2M_{sjkl}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk}=\delta_{kl}M_{sjbb}+\delta_{jl}M_{sbkb}+\delta_{sl}M_{bjkb} \tag{12d}
$$

と計算されます。

　ここで、M_{bbkl},M_{klbb} は同じ等方的な 2 階テンソルによって

$$
M_{bbkl}=M_{klbb}=\alpha\delta_{kl}
$$

と書けると考えます。同様に

$$
\begin{aligned}
M_{sbkb}=M_{bsbk}=\beta\delta_{sk}\\
M_{sbbl}=M_{bslb}=\gamma\delta_{jk}
\end{aligned}
$$

とします。そして、これから添え字の交換に

$$
\begin{aligned}
M_{bbkl}=M_{klbb}\\
M_{sbkb}=M_{bsbk}\\
M_{sbbl}=M_{bslb}
\end{aligned}
$$

という関係があることになります。
　そうすると、(12a)〜(12d) は

$$2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{13a}$$

$$2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{13b}$$

$$2M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{13c}$$

$$2M_{sjkl}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{13d}$$

この 4 つの右辺は全て同じです。なので 1 つ目 (13a) と 2 つ目 (13b) の和

$$4M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj}$$

と 3 つ目 (13c) と 4 つ目 (13d) の和

$$4M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk}$$

は等しいので

$$\begin{aligned}
0 &= 4M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}+M_{jskl}+M_{skjl}+M_{slkj}\\
&\quad-(4M_{sjkl}+M_{kjsl}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{ljks}+M_{slkj}+M_{sjlk})\\
&= 2M_{jskl}-2M_{sjlk}\\
M_{jskl} &= M_{sjlk}
\end{aligned}$$

という関係があることが分かります。同じようにして、2 つ足したもの同士の差を計算していくと

$$M_{jskl}=M_{sjlk}=M_{lksj}=M_{kljs} \tag{14}$$

となっていることが分かります。
　ここから、(13b)〜(13d) はもう使いません。(14) を使って 1 つ目 (13a) の左辺をまずは

$$2M_{sjkl}+M_{jskl}+M_{kjsl}+M_{ljks}=2M_{sjkl}+M_{sjlk}+M_{slkj}+M_{skjl}$$

と書き換え

$$2M_{sjkl}+M_{sjlk}+M_{slkj}+M_{skjl}=\alpha\delta_{kl}\delta_{sj}+\beta\delta_{jl}\delta_{sk}+\gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{15}$$

ここで付けている添え字は勝手に決めたものなので、全ての添え字の文字を付け直しても問題は起きません。なので、j を k、k を l、l を j と書き直すことにすれば (15) は

$$2M_{sklj}+M_{skjl}+M_{sjlk}+M_{slkj}=\alpha\delta_{lj}\delta_{sk}+\beta\delta_{kj}\delta_{sl}+\gamma\delta_{sj}\delta_{kl} \tag{16}$$

と出来ます。さらにこれから、k を l、l を j、j を k に書き直せば

$$2M_{sljk} + M_{slkj} + M_{skjl} + M_{sjlk} = \alpha\delta_{jk}\delta_{sl} + \beta\delta_{lk}\delta_{sj} + \gamma\delta_{sk}\delta_{lj} \tag{17}$$

というわけで、添え字の書き換えで、1 つ目 (13a) から

$$2M_{sjkl} + M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl} = \alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk} \tag{18a}$$

$$2M_{sklj} + M_{skjl} + M_{sjlk} + M_{slkj} = \alpha\delta_{jl}\delta_{sk} + \beta\delta_{sl}\delta_{jk} + \gamma\delta_{kl}\delta_{sj} \tag{18b}$$

$$2M_{sljk} + M_{slkj} + M_{skjl} + M_{sjlk} = \alpha\delta_{sl}\delta_{jk} + \beta\delta_{kl}\delta_{sj} + \gamma\delta_{jl}\delta_{sk} \tag{18c}$$

という 3 つの式が出来ました。

これの右辺を縦に見てみると、α, β, γ のクロネッカーデルタが同じ形になっています。なので、この 3 つを足したとき、右辺は

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk})$$

となります。左辺の和はまとめれば

$$2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl})$$

となるので

$$2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) = (\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk})$$

右辺は k, l を入れ替えても

$$\delta_{lk}\delta_{sj} + \delta_{jk}\delta_{sl} + \delta_{sk}\delta_{jl} = \delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}$$

となって、不変なので左辺も k, l の入れ替えで不変です。なので

$$\begin{aligned} 2(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) + 3(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) &= 2(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) + 3(M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) \\ (M_{sjkl} + M_{sklj} + M_{sljk}) &= (M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) \end{aligned}$$

となっていることが分かります。よって

$$\begin{aligned} 5(M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl}) &= (\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ M_{sjlk} + M_{slkj} + M_{skjl} &= \frac{1}{5}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \end{aligned}$$

これの左辺に (18a) を入れて

$$\begin{aligned} -2M_{sjkl} + (\alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk}) &= \frac{1}{5}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ M_{sjkl} &= \frac{1}{2}(\alpha\delta_{kl}\delta_{sj} + \beta\delta_{jl}\delta_{sk} + \gamma\delta_{sl}\delta_{jk}) - \frac{1}{10}(\alpha + \beta + \gamma)(\delta_{kl}\delta_{sj} + \delta_{jl}\delta_{sk} + \delta_{sl}\delta_{jk}) \\ &= \frac{1}{10}(4\alpha - \beta - \gamma)\delta_{kl}\delta_{sj} + \frac{1}{10}(-\alpha + 4\beta - \gamma)\delta_{jl}\delta_{sk} + \frac{1}{10}(-\alpha - \beta + 4\gamma)\delta_{sl}\delta_{jk} \end{aligned}$$

よって、等方的な 4 階テンソルの一般的な形は、係数を付け直せば

$$M_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}$$

となります。