ナビエ・ストークス方程式

流体の運動を記述する基本的な方程式であるナビエ・ストークス方程式を導出します。

現実の流体を扱うには応力テンソルを具体的に与える必要があります。そのための仮定が何かを示す前に簡単な応力ベクトルから見ていきます。

流体が静止しているなら、流体に作用する面積力は接線方向を持たず、流体の内側に向かう法線方向のみのはずです (外側に向かっている力だけが作用しているなら流体は分離してしまう)。流体の位置が他の位置に対して動いているなら接線応力は現れます (接線応力が働くと流体の形が変化するので静止した状態でなくなる)。なので、応力の方向は面の法線方向のみで、それを圧力 P と設定します (流体中の適当な立方体を取り出したとき、全ての方向から内側に向かって同じ圧力がかかっていないと形が変わり、静止しなくなる)。これは圧力によって力のつり合いを取っているとも言えます。例えば、x_1, x_2, x_3 軸方向へ圧力が P_1, P_2, P_3 と作用しているとき、P は任意の点で $P = P_1 = P_2 = P_3$ という意味です。これは最後に触れます。

このため、応力 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})$ の成分は考えている領域の面の法線ベクトルに比例し、それを圧力によって

$$\tau_i(\boldsymbol{n}) = -Pn_i$$

と与えます。この応力は hydrostatic と呼ばれます。マイナスを付けているのは流体の内側に向かうように圧力を作用させているからです。P は $P = P(x_1, x_2, x_3)$ のように位置の依存性は持っています。この場合の応力テンソル σ_{ij} は、応力のテンソルの定義

$$\tau_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij} n_j$$

から

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \qquad (\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}\ ,\ \tau_i(\boldsymbol{n}) = -P\delta_{ij}n_j = -Pn_i)$$

流体の入門的な話ではこの応力が使われます。

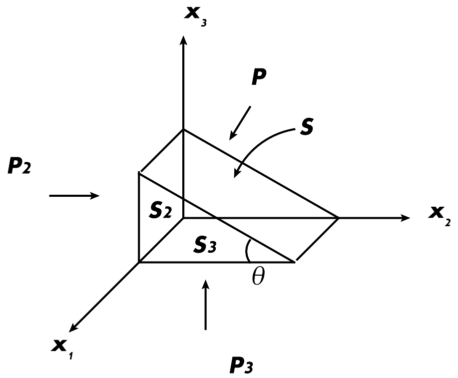

図 1

$P=P_1=P_2=P_3$ をよくある例を使って示します。三角柱の面に作用している圧力のつり合いを考えます。三角柱には図 1 のように圧力 P,P_2,P_3 が面に対して垂直に作用して、つり合いが取れているとします (面 S に圧力が作用しているとき、つり合いを取るために x_1 軸方向に圧力を作用させる必要はない)。面 S の面積 A は

$$A=dx_2ds$$

と与えます (ds は面 S の辺の長さ)。x_1 軸上の長さを dx_1, x_2 軸上の長さを dx_2、x_3 軸上の長さを dx_3 とします。そうすると、この面に作用している力は圧力 P によって

$$F=Pdx_2ds$$

面 S_3 に作用している力は $dx_1=ds\cos\theta$ なので

$$F_3=P_3dx_1dx_2=P_3dx_2ds\cos\theta$$

面 S_1 では $dx_3=ds\sin\theta$ なので

$$F_2=P_2dx_2dx_3=P_2dx_2ds\sin\theta$$

そして、力のつり合いを取るためには

$$F\sin\theta=F_2\ ,\ F\cos\theta=F_3$$

であればいいことから

$$Pdx_2ds\sin\theta=P_2dx_2ds\sin\theta\ ,\ Pdx_2ds\cos\theta=P_3dx_2ds\cos\theta$$

よって、$P=P_2=P_3$ となります。これは dx_1,dx_2,dx_3 を 0 の極限にして三角柱を点に近づけることで、点において $P=P_2=P_3$ が成立します。これは例えば重力が x_3 軸の負方向に作用していたとしても関係ありません。応力による力が dx_2ds に比例するのに対して、重力は体積力なので $dx_1dx_2dx_3$ に比例するために微小な極限を取ったときに先に 0 になるからです。

もっと単純には三角形の各辺に圧力が作用しているとすればいいです (三角柱の側面に圧力が作用しているとしても、高さは共通なので三角形だけみればいい)。辺を l_1,l_2,l_3、辺に作用している圧力を P_1,P_2,P_3 とします。l_1 と l_3 の間の角度を θ、l_2 と l_3 の間の角度を ϕ、l_1 と l_2 の間の角度を ψ とします。そうすると、l_3 に平行な方向 (P_3 に垂直な方向) への圧力は $P_1l_1\sin\theta-P_2l_2\sin\phi$ なので、つり合いは

$$P_1l_1\sin\theta-P_2l_2\sin\phi=0$$

で取れます。P_1 と P_2 は逆向きなので P_2 の項をマイナスにしています。l_1 と l_2 の関係は

$$l_1\sin\theta=l_2\sin\phi$$

なので、つり合いの式から

$$P_1 l_2 \sin\phi - P_2 l_2 \sin\phi = 0$$

$$P_1 = P_2$$

同様のことを、l_1 に平行な方向、l_2 に平行な方向で行えば

$$P_1 = P_2 = P_3$$

が言えます。

今見てきたように、静止している流体での応力テンソルは、法線方向にのみ圧力 P が作用している形として

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$$

と与えられます。これは流体が変形しないことを要求した形です。しかし、流体は簡単に形を変えるという性質を持っているために、流体が動いていれば形を変えます。なので、変形による影響を加えて

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \gamma_{ij} \tag{1}$$

とします。γ_{ij} を偏差応力テンソル (deviatoric stress tensor) と言います。この γ_{ij} を決めないと流体の運動は記述できないので、γ_{ij} の形を与えます。

「変形速度テンソル」で見たように、流体における微小に離れた x_i と $x_i + \Delta x_i$ の 2 点での速度差 Δv_i は

$$\Delta v_i = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j + \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\Delta x_j = e_{ij}\Delta x_j + w_{ij}\Delta x_j$$

と与えられ、e_{ij} は変形速度テンソル、w_{ij} は回転の寄与部分です。このため、流体の変形には e_{ij} と w_{ij} が関わっています。そして、e_{ij} と w_{ij} は $\partial v_i/\partial x_j$ で構成されています。なので、形が変わるときは $\partial v_i/\partial x_j$ の項がいると考えられます。そうすると、問題になるのが、どのような形で応力テンソルに入ってくるのかです。これは現実の流体を説明できるような仮定を組み込むしかないです (現実の現象を説明できるモデルを作る)。というわけで

(i) 応力テンソルは変形速度テンソルの 1 次までを含む関数で書ける。

(ii) 流体において、応力テンソルと変形速度テンソルによる関係はどこでも同じ。

(iii) 流体において、応力テンソルと変形速度テンソルによる関係は座標軸の方向とは無関係。

(iv) 変形速度テンソルが $e_{ij} = 0$ なら $\gamma_{ij} = 0$。

という仮定を入れます。これらの仮定による流体ををニュートン流体 (Newtonian fluid) と言い、例えば水の性質を上手く説明できます。細かくは (i) は熱力学変数も含みます。(ii) のとき流体は均一的 (homogeneous) と言い、(iii) のとき流体は等方的 (isotropy) と言います。(ii) は応力テンソルは $\boldsymbol{x}$ に陽に依存しないことを (例えば $\partial v_i/\partial x_j$ を通して $\boldsymbol{x}$ に依存する)、(iii) は流体中には特別な方向がないことを意味します。(iv) は応力テンソルは流体が静止していれば $\gamma_{ij} = 0$ ということです。ここではニュートン流体を使います。

ニュートン流体とし、応力テンソルを

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \gamma_{ij}$$

としたとき、偏差応力テンソル γ_{ij} は (i) から

$$\gamma_{ij}(e_{kl}) = M_{ijkl}e_{kl} \tag{2}$$

と書けます。M_{ijkl} は 4 階のテンソルです。変形速度テンソルと偏差応力テンソルの関係を与えるこの式は流体での構成方程式 (constitutive equation) です。

ここで問題になるのが M_{ijkl} は何なのかです。これは (iii) での等方性から形が決まります。(iii) は座標軸を回転させても (2) の形が保たれることを要求しているので、回転後の量には「-」を付けたとき

$$\overline{\gamma}_{ij} = M_{ijkl}\overline{e}_{kl}$$

という形を維持しなくてはいけません ((2) での式の $\boldsymbol{x}$ を新しい座標軸での $\overline{\boldsymbol{x}}$ に置き換えただけのものが成立する)。そうすると、M_{ijkl} は座標軸の回転で不変な 4 階テンソル、言い換えれば、等方的な 4 階テンソルであればいいです。等方的な 4 階テンソルの一般形は

$$M_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk}$$

となっています (「等方的なテンソル」参照)。これを使うことで応力テンソルは、変形速度テンソルが対称 $e_{ij} = e_{ji}$ なので

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= -P\delta_{ij} + (a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\delta_{ik}\delta_{jl} + a_3\delta_{il}\delta_{jk})e_{kl} \\
&= -P\delta_{ij} + (a_1\delta_{ij}e_{kk} + a_2e_{ij} + a_3e_{ji}) \\
&= (-P + a_1\gamma_{kk})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)e_{ij} \\
&= (-P + a_1\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
&= (-P + a_1\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + (a_2 + a_3)(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
&= -P\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

となります ($\lambda = a_1, \mu = a_2 + a_3$)。これがニュートン流体としたときの応力テンソルです。$\partial v_k/\partial x_k$ は変形速度テンソルのトレース $e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ で、第 3 項は変形速度テンソル e_{ij} そのものなので

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{3}$$

と書けます。μ, λ は流体の変形に関連する係数で、粘性 (viscosity) と呼ばれます。粘性は変形に対する抵抗です。μ を粘性率、λ を第二粘性率と言ったりします。

粘性を変形に対する抵抗と言えることは簡単な例から分かります。2 次元で考えて、$x_2 = 0$ と $x_2 = h$ に面積 S の板を x_1 軸に平行におき、その間に静止している流体が挟まれているとします。これに対して、下側の板は固定して、上側の板を x_1 軸方向に定数の速度 V で動かして、流体の運動が固定されるまで待ちます。安定したときの流体は蛇行したりせずに x 軸方向に平行に流れているとします。

板と流体の間に抵抗があるとします (抵抗がなければ板が流体の面をすべるだけ)。このとき、板と接している流体の面に作用している力 F は、速度と板の面積に比例するはずです。加えて、流体の幅 h を小さくすれば、流体に作用する力は増えるはずなので、適当な比例定数 μ によって

$$F = \mu \frac{SV}{h}$$

となります。これを面積 S で割れば接線応力 (流体に沿って板を動かすので接線方向に力は作用している) になって

$$\tau = \mu \frac{V}{h}$$

この μ が粘性です。このように作用する力への抵抗として粘性が現れます。このような関係が流体の速度 v_1(x_1 軸方向の流体の速度) でも成立すると考えて

$$\tau = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

としたものをニュートンの粘性の法則 (Newton's law of viscosity) と言います。これは偏差応力テンソルの非対角成分 (接線応力) にいます。ニュートンの粘性の法則は例えば

$$v_1 = \frac{x_2}{h} V \ , \ \tau = \mu \frac{v_1}{x_2}$$

のように、動いている板から離れるほど流体の速度は遅くなり、τ は v_1 と x_2 の比率によるという関係を、速度勾配（x_2 による速度の変化)$\partial v_1 / \partial x_2$ で書いたものです。ニュートンの粘性の法則を応力テンソルにしたものが (3) です。

今度は等方的なテンソルの形を使わずに、別の方向からニュートン流体の応力テンソルを求めます。結果は同じなので飛ばしていいです。

まず、変形速度テンソルが対角化されている座標軸を選ぶことにし (連続体の力学の「応力テンソル」参照)、対角化された変形速度テンソルの成分を ϵ_{ij} で書くことにします (変形速度テンソルの主軸にした場合)。なので

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

として、ϵ_{ij} はこの座標軸において

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

となります。同じ x_i を使いますが、これは対角行列になるように選んだ基底での成分で、ここから座標軸を任意だとするまでは添え字 i はこの場合とします (変形速度テンソルの主軸での場合)。

4 階テンソルを使わずに話を進めるので、(i) から、対角化された変形速度テンソル ϵ_{ij} の対角成分 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ によって、偏差応力テンソルを定数 C_1, C_2, C_3 をくっつけて

$$\gamma_{ij} = C_1\epsilon_{11} + C_2\epsilon_{22} + C_3\epsilon_{33}$$

とします (変形速度テンソルの 1 次のみを含む)。そして、(iii) から等方的とするので、例えば

$$\gamma_{11} = a_1\epsilon_{11} + a_2\epsilon_{22} + a_3\epsilon_{33}$$

となっているとき、回転後の座標軸 (x'_1, x'_2, x'_3) においては

$$\gamma_{1'1'} = a_1\epsilon_{1'1'} + a_2\epsilon_{2'2'} + a_3\epsilon_{3'3'} \quad\quad (\epsilon_{i'j'} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i}))$$

と書けるとします (a_1, a_2, a_3 が 4 階テンソルの成分の値に対応)。回転後の (x'_1, x'_2, x'_3) に対応する場合は添え字に「′」をつけて区別します。

回転不変であることは自由度が 1 つ落ちることを意味します (回転不変な式によって、a_1, a_2, a_3 の間に関係式ができる)。なので、a_1, a_2, a_3 から 2 つ決めれば残りの 1 つも決まります。このことは、例えば x_1 軸周りに 90 度回転させると分かります。90 度回転させて、x_2 軸を x_3 軸 ($= x'_2$ 軸)、x_3 軸を $-x_2$ 軸 ($= x'_3$ 軸) に持っていくとします。これは

$$x_1 = x'_1 \ , \ x_2 = -x'_3 \ , \ x_3 = x'_2$$

とすることなので

$$\epsilon_{1'1'} = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11} \ , \ \epsilon_{2'2'} = \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \epsilon_{33} \ , \ \epsilon_{3'3'} = \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \epsilon_{22}$$

を使えば

$$\gamma_{1'1'} = a_1\epsilon_{1'1'} + a_2\epsilon_{2'2'} + a_3\epsilon_{3'3'} = a_1\epsilon_{11} + a_2\epsilon_{33} + a_3\epsilon_{22}$$

σ_{11} は x_1 軸に垂直な面の x_1 成分の応力なので、γ_{11} は x_1 軸に垂直な面の x_1 成分の応力と言えます。そして、$x_1 = x'_1$ であるために、$\gamma_{1'1'}$ も同じ方向の応力です。よって、$a_2 = a_3$ が言えます。

というわけで、a_1 を $\lambda + c$、$a_2 = a_3 = \lambda$ として、γ_{ij} の対角成分は

$$\gamma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{11}$$

$$\gamma_{22} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{22}$$

$$\gamma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{33}$$

となります。

γ_{ij} の非対角成分を求めます。γ_{12} を定数 b_1, b_2, b_3 をくっつけて

$$\gamma_{12} = b_1\epsilon_{11} + b_2\epsilon_{22} + b_3\epsilon_{33}$$

とします。これは x_1 軸に垂直な面に作用する x_2 軸方向の応力です（σ_{12} がこの成分の応力だから)。これの座標軸を x_1 軸周りに 180 度回転させて、

$$x_1 = x'_1\ ,\ x_2 = -x'_2\ ,\ x_3 = -x'_3$$

と設定します。そうすると

$$\epsilon_{1'1'} = \epsilon_{11}\ ,\ \epsilon_{2'2'} = \epsilon_{22}\ ,\ \epsilon_{3'3'} = \epsilon_{33}$$

なので

$$\gamma_{1'2'} = b_1\epsilon_{1'1'} + b_2\epsilon_{2'2'} + b_3\epsilon_{3'3'} = b_1\epsilon_{11} + b_2\epsilon_{22} + b_3\epsilon_{33}$$

となり、γ_{12} と一致します。しかし、γ_{12} は x_1 軸に垂直な面に作用する x_2 軸方向の応力であれることを踏まえると矛盾が出てきます。$\gamma_{1'2'}$ は x'_1 軸に垂直な面に作用する x'_2 軸方向の応力です。そうすると、$x_2 = -x'_2$ なので $\gamma_{1'2'}$ と γ_{12} では応力の作用している方向が逆向きです。つまり、$\gamma_{1'2'} = -\gamma_{12}$ でなければいけないです。よって、回転不変性とこれが成立するためには、$\gamma_{12} = \gamma_{1'2'} = 0$ である必要があります。これは他の成分でも同様にできるので、今の座標軸 (e_{ij} が対角成分のみになっている座標軸) においては γ_{ij} の非対角成分は 0 です。

よって、γ_{ij} は対角成分のみを持ち

$$\gamma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{11}$$
$$\gamma_{22} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{22}$$
$$\gamma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + c\epsilon_{33}$$

となります。後は e_{ij} が対角化されている座標軸でない座標軸に戻せばいいです。ϵ_{ij} は

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

と書けるので、γ_{ij} の第 1 項はクロネッカーデルタ δ_{ij} によって

$$\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

とまとめられます。これから γ_{ij} は

$$\gamma_{ij} = \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + c\epsilon_{ij}$$

ちなみに、このときの γ_{ij} は対角成分のみなので、変形速度テンソルを対角化する基底と応力テンソルを対角化する基底とが一致していることが分かります (変形速度テンソルと応力テンソルの主軸が一致)。

この式はテンソルの成分の形になっているので、γ_{ij} を成分に持つ 2 階テンソルを $\boldsymbol{\gamma}$、ϵ_{ij} を成分に持つ 2 階テンソルを $\boldsymbol{\epsilon}$ とすれば ($\boldsymbol{e}_i$ を直交基底とすれば、$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$)

$$\boldsymbol{\gamma} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{\epsilon} \qquad (\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

と書けます。この表記はどんな座標軸を選ぼうと成立しています (テンソルの性質)。そうすると、ϵ_{ij} は特別な座標軸を選んだときの変形速度テンソル $\boldsymbol{e}$ の成分でしかないので、$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{e}$ です。よって、変形速度テンソルを対角化する基底としない適当な座標軸において、γ_{ij} は

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + ce_{ij} \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \frac{1}{2}c(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \\
&= \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

と書けます ($\mu = c/2$)。というわけで、応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \gamma_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

となり、(3) と同じ結果が求まります。

話を戻します。応力テンソルが求まったので、運動方程式に適用します。連続体での運動方程式は運動量方程式なので、ρ を密度、f_i を単位質量あたりの体積力として

$$\rho\frac{D}{Dt}v_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

これに入れます。λ, μ は定数だとすれば、右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-P + \lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k})\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\big) \\
&= (-\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\frac{\partial v_k}{\partial x_k}))\delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})\big) \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})
\end{aligned}$$

圧力は $P = P(x_1, x_2, x_3)$ なので微分に引っかかります。物質微分を偏微分の形で書けば左辺は

$$\rho\frac{D}{Dt}v_i = \rho\frac{\partial}{\partial t}v_i + \rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}v_i$$

なので

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}v_i + \rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}v_i = \ \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

ベクトルで書けば

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \ \rho\boldsymbol{f} - \nabla P + \lambda\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \mu(\nabla^2\boldsymbol{v} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}))$$

これがナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式で、非線形の 2 階偏微分方程式です。これを厳密に解く方法は存在していなく、特別な場合だけ解けています。この問題には賞金がかかっています (ミレニアム賞問題)。また、λ と μ を定数としましたが、定数としない場合がより一般的な形です。