流体の運動

流体の運動をどう記述するのかを見ていきます。流体を構成する膨大な数の粒子の運動方程式を考えてもどうにもならないので、流体の質量、運動量、エネルギーの保存を使います。これらによって、流体の運動を記述する方程式を作ります。
記述する方向性には 2 つあり、ラグランジュの方法とオイラーの方法と呼ばれています。
直交座標を使っています。
同じローマ文字の添え字に対しては 1 から 3 の和を取ります。

流体の運動を扱うための方向性には 2 通りあります。流体中の流体粒子 (fluid particle) の運動を追っていくものと、流体を特徴付ける量の関数を定義して記述する方法です。どちらの方法でも基本となる方程式は、質量保存による連続の方程式と、力学での運動方程式 (ニュートンの第二法則) を適用して作られる流体での運動方程式です。これらはどちらの方法でも同じになります。

まずは、流体粒子を追っていく立場での扱いを見ていきます。これはラグランジュの方法 (Lagrangian description) と呼ばれます。流体粒子は簡単に言えば、流体中の微小領域 (流体中の粒子の塊) のことです。ただし、微視的、巨視的な影響は無視できる程度の大きさを持ち、質量が一定になっているとします (構成している粒子を考慮しないですむ粒子の集まり)。流体粒子は連続的に分布していて、他の流体粒子と区別可能としますが、近い位置にいる流体粒子は同じような運動をしているとします (連続分布しているのでいきなり周りと違う動きをしない)。

実用上では流体粒子は連続的な質点だと思っていても困りません (通常、質点は番号を付けて $1, 2, 3, \ldots$ のように離散的に区別するが、これが連続的になっている)。流体粒子の軌道を描いた曲線を流跡線 (particle path, pathline) と言います。

流体の運動を扱うときの基本的な量は速度ベクトルなので、それを作ります。時間 $t = 0$ での流体粒子のいる位置ベクトルを $\boldsymbol{\xi}$ とします。$t = 0$ なので $\boldsymbol{\xi}$ は流体粒子の初期位置です。このように時間 $t = 0$ で位置 $\boldsymbol{\xi}$ にいる流体粒子として、流体粒子を区別します (時間が同じなら、1 点の位置を指定することで流体粒子を特定できる)。$\boldsymbol{\xi}$ は物質座標 (material coordinates) と呼ばれます。

3 次元空間において、任意の時間 t での流体粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{\xi}$ と t によって書けるとし ($\boldsymbol{\xi}$ と t を独立変数にする)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)\ ,\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t = 0) = \boldsymbol{\xi}$$

とします。右辺での変換の関数として $\boldsymbol{x}$ を使うのがいやなら、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, t)$ とでもすればいいです。軌道 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ が初期位置 $\boldsymbol{\xi}$ を通る流体粒子の流跡線となります。例えば、$t = 0$ で $\boldsymbol{\xi}$ とし、時間 t では x 軸方向に at だけ動いているとすれば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + at\boldsymbol{e}_x$ となります ($\boldsymbol{e}_x$ は x 軸方向の単位ベクトル)。そして、流体の問題では流体の性質を表す物理量を求める必要があり、それを関数 F で記述するなら、その量は $F(\boldsymbol{\xi}, t)$ と表現されます。

ここでは $\boldsymbol{\xi}$ を使いますが、$t = 0$ での位置なので $\boldsymbol{x}_0$ のように書くほうが分かりやすいかもしれません。

$\boldsymbol{\xi}$ は流体粒子の初期位置なので、時間微分を行うとき $\boldsymbol{\xi}$ を固定して微分したものを定義する必要があります。それを

$$(\frac{\partial}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{D}{Dt}$$

と表記します。左辺の $(\ )_{\boldsymbol{\xi}}$ は $\boldsymbol{\xi}$ を固定していることを表します。これは偏微分でしかないですが、$\boldsymbol{\xi}$ を通過する流体粒子の変化を与えるので、ξ をつけたほうが分かりやすいです。他にも

$$\frac{d}{dt}|_{\boldsymbol{\xi}}$$

という表記も使われます。この微分を物質微分 (material derivative) やラグランジュ微分と言います。物質微分は流体粒子が動いているときの微分です ($\boldsymbol{x}$ を固定していないから)。$F(\boldsymbol{\xi}, t)$ に対しては、偏微分そのものなので

$$(\frac{\partial F(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{DF(\boldsymbol{\xi}, t)}{Dt} = \frac{\partial F(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}$$

位置 $\boldsymbol{x}$ での量は、$t=0$ で $\boldsymbol{\xi}$ となる $\boldsymbol{x}$ に依存するように書けると考えれば (逆変換 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t)$ がある)、$F(\boldsymbol{\xi}, t)$ によって表される量は $\boldsymbol{x}, t$ によっても表せるので、それを $G(\boldsymbol{x}, t)$ とします。そうすると

$$F(\boldsymbol{\xi}, t) = G(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$$

から、$\boldsymbol{\xi}$ を固定しての時間微分は連鎖則によって

$$\begin{aligned}(\frac{\partial F(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} = (\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} &= (\frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_1} + (\frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_2} + (\frac{\partial x_3(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_3} + \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \\ &= (\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

これから、$\boldsymbol{x}$ の物質微分は

$$(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} = (\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}}$$

となりますが、$\boldsymbol{\xi}$ が固定されている時間微分なので、力学での時間に依存する質点の位置 $\boldsymbol{x}(t)$ の時間微分

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$$

と同じです。

流体粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t), t)$ と書くことにし、$\boldsymbol{x}, t$ に依存するとしたときも同じ適当な値 f を持つとして

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, t) = f$$

と表記してしまいます (これによって後で見るオイラーの方法と繋がっている)。ここでの $\boldsymbol{v}$ はこの意味で書いていきます。これは、例えばデカルト座標で書かれた関数 $F(x, y, z)$ の極座標 (r, θ, ϕ) への座標変換後を $F(r, \theta, \phi)$ と書くことと同じです。細かく書けば

$$F(x,y,z) = F(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta) = G(r,\theta,\phi)$$

であるものを、$F(x,y,z) = G(r,\theta,\phi) = f$ の意味で $F(x,y,z) = F(r,\theta,\phi)$ と書くということです (下の (14) が分かりやすい)。このような表記は数学の人から相当嫌われていますが、物理側ではよく使われるので、ここでもこのように書いてしまいます。気になるなら、$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi},t)$ のように区別すればいいです。

というわけで、流体粒子は、初期条件を $t=0$ で $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ とした微分方程式

$$\frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \quad (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)) \tag{1}$$

に従うとします。速度ベクトルはの変数は $\boldsymbol{\xi}$ でなく $\boldsymbol{x}$ を書くことにします。$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ は後で見るオイラーの方法での速度ベクトル (速度場) と同じです (ただし流体粒子の軌道 $\boldsymbol{x}$ には初期条件がある)。細かいことですが、どちらの方法でも流体の局所的な速度を定義できるのは連続体の概念があるからです。

速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ を物質微分すれば加速度 $\boldsymbol{a}$ が与えられますが、今の速度のように $F(\boldsymbol{\xi},t) = F(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)$ と表記している関数に対して物質微分は

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}F(\boldsymbol{\xi},t) = (\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} &= (\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}}\frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\ &= v_i(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \quad (v_i = (\frac{\partial x_i}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}}) \\ &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla F(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{2}$$

$F(\boldsymbol{\xi},t) = G(\boldsymbol{x},t)$ とちゃんと区別して書くなら

$$\frac{D}{Dt}F(\boldsymbol{\xi},t) = (\frac{\partial}{\partial t}G(\boldsymbol{x},t))_{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t})G(\boldsymbol{x},t)$$

となります。これから、物質微分を最初から

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{3}$$

と定義することが多いです。また、物質微分は $\Delta F = F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}, t+\Delta t) - F(\boldsymbol{x},\Delta t)$ を展開して ($\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\Delta t$)、$\Delta t$ で割れば出すこともできます。なので、ΔF は時間の変化とそれによって位置も動いたときの物理量の変化に対応しています。言い換えれば、速度 $\boldsymbol{v}$ の流体に沿って動いている F の変化量です。このため、物質微分の演算は $F(\boldsymbol{x}(t),t)$ の時間微分と同じになります。

加速度 $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{v}$ の物質微分から

$$\boldsymbol{a} = \frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \tag{4}$$

となります。$\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ は $\boldsymbol{v}$ のいる地点の時間変化で ($\boldsymbol{x}$ を固定して t で微分してるから)、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ は移流項 (convective term) や移流加速度 (convective acceleration) と呼ばれます。移流項の意味は具体的な流体を扱うと分かりやすいので、ここでは省きます。

他の物質微分の作用の例としては流体の表面があります。表面が $S(\boldsymbol{x},t)=const$ として定数になっているなら(流体の表面が固定されている)、物質微分によって

$$\frac{D}{Dt}S(\boldsymbol{x},t)=0$$

と書けます。

速度ベクトルが与えられたので、流体の運動を記述するための方程式を作ります。まずは、質量保存を考えます (下の補足でここより単純な導出を示しています)。そのために必要な関係を先に出します。

まず、位置 $\boldsymbol{\xi}$ での微小領域の体積を $d\tau_0=d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ とします。$d\tau_0$ は $t=0$ での固定されている体積です。位置 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t)$ なので、$\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{x}$ は座標変換で繋がっていると言えることから、$\boldsymbol{x}$ での微小領域の体積 $d\tau$ はヤコビアン J によって

$$d\tau=|J|d\tau_0$$

と書けます (例えば、デカルト座標と極座標の変換と同じ)。「| |」は行列式です。今のヤコビアン J は ($\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$)

$$|J|=|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\end{vmatrix}$$

と与えられています。これは体積積分での変数変換

$$\int d\tau=\int d\tau_0|J|$$

と同じです。$d\tau$ は時間に依存する $\boldsymbol{x}$ によるので、時間依存性を持っています。

ヤコビアンの物質微分を行います。行列式の微分はは、例えば 2×2 行列 $A(t)$ では

$$\begin{aligned}|A|&=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}\\ \frac{d}{dt}|A|&=\frac{dA_{11}}{dt}A_{22}+A_{11}\frac{dA_{22}}{dt}-\frac{dA_{12}}{dt}A_{21}-A_{12}\frac{dA_{21}}{dt}\\ &=\begin{vmatrix}\frac{dA_{11}}{dt} & \frac{dA_{12}}{dt}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ \frac{dA_{21}}{dt} & \frac{dA_{22}}{dt}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

となり、各行に微分を作用させたものの和になります。これは一般的な性質なので、$|J|$ の微分は

$$\frac{D}{Dt}|J| = \frac{D}{Dt}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{D}{Dt}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \tag{5}$$

これは

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{Dx_1}{Dt} = \frac{\partial v_1(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial v_1}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{Dx_2}{Dt} = \frac{\partial v_2(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial v_2}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\frac{Dx_3}{Dt} = \frac{\partial v_3(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t),t)}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial v_3}{\partial x_i}$$

となっていることを使えばいいです。(5) の第 1 項は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} & \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} & \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

これの 1 行目は

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

となっていて、これらの第 2 項は 2 行目に $\partial v_1/\partial x_2$ をかけたもの、第 3 項は 3 行目に $\partial v_1/\partial x_3$ をかけたものです。なので、2 行目に $\partial v_1/\partial x_2$ をかけたもの、3 行目に $\partial v_1/\partial x_3$ をかけたものを 1 行目から引くことで (基本操作なので行列式は変わらない)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} & \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} & \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_i} \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\
\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}
\end{vmatrix}
&=
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\
\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\
\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}
\end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}|J|
\end{aligned}
$$

残りの項も同様にできるので、(5) は

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}|J| &= |J|(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}) \\
\frac{1}{|J|}\frac{D}{Dt}|J| &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\
&= \nabla \cdot \boldsymbol{v} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

また、D/Dt は $\boldsymbol{\xi}$ を固定した微分なので、通常の対数の微分と同じ規則になっていることから

$$
\frac{D}{Dt}\log|J| = \nabla \cdot \boldsymbol{v}
$$

と書けます。

これで準備ができたので、質量保存を考えます。そのために、ある時間で適当な領域 D に含まれた流体粒子を追いかけます。追いかける流体粒子を含め続けるためには領域は流体粒子の運動に合わせて変形していく必要があるので、領域の体積は時間依存します (例えば、各流体粒子の流跡線の束が時間の経過で広がるなら、領域は大きくなる)。密度を $\rho(\boldsymbol{x}, t)$、領域の体積を $V(t)$ として密度の体積積分を

$$
m(t) = \int_{V(t)} d\tau\ \rho(\boldsymbol{x}, t)
$$

とすれば、体積 $V(t)$ での質量 $m(t)$ となります。質量保存は質量が時間微分で変化しないことなので、物質微分を行います ($\boldsymbol{\xi}$ を固定した時間微分なので、左辺では通常の時間微分と同じ)。しかし、今の場合では体積の時間依存性のために積分の中に物質微分を入れられません。なので、$d\tau = |J|d\tau_0$ によって変形させます。初期位置での領域 D の体積 V_0 は固定した体積として与えられるので、物質微分を積分の中に入れられます。そうすると

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} d\tau\ \rho(\boldsymbol{x},t) &= \frac{D}{Dt}\int_{V_0} d\tau_0\ |J|\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ \big(\rho\frac{D}{Dt}|J| + |J|\frac{D}{Dt}\rho\big) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ |J|\big(\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{D}{Dt}\rho\big) \\
&= \int_{V(t)} d\tau\big(\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{D}{Dt}\rho\big) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

質量が時間変化しない (時間微分で 0) とすれば

$$
\frac{dm(t)}{dt} = \frac{Dm(t)}{Dt} = 0
$$

から

$$
\frac{D}{Dt}\rho + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = 0 \qquad (8)
$$

となり、密度に対する連続の方程式 (equation of continuity) となります (質量保存による方程式)。(3) を使えば

$$
\frac{D}{Dt}\rho + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})
$$

なので

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0
$$

と書けます。$\rho\boldsymbol{v}$ は質量流束 (mass flux) や、質量を省いて流束やフラックスと呼ばれます。流束は流速と誤記する可能性があるので、フラックスと呼ぶことにします。フラックスの解釈は後で見るオイラーの方法や電磁気学での「電荷の保存」でしています。

同様のことを運動量の保存に対して行います。運動量は質量と速度の積なので、領域全体の運動量 $\boldsymbol{P}$ は、密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ を使って

$$
\boldsymbol{P}(t) = \int_{V(t)} d\tau\ \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)
$$

と書けます。同様の手順を踏めば、物質微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\boldsymbol{P}(t) &= \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} d\tau\ \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ \frac{D}{Dt}|J|\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ (\rho\boldsymbol{v}\frac{D}{Dt}|J| + |J|\boldsymbol{v}\frac{D}{Dt}\rho + |J|\rho\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ |J|(\rho\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\frac{D}{Dt}\rho + \rho\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}) \\
&= \int_{V(t)} d\tau\ (\rho\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\frac{D}{Dt}\rho + \rho\frac{D}{Dt}\boldsymbol{v}) \\
&= \int_{V(t)} d\tau\ (\rho\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{D}{Dt}(\rho\boldsymbol{v}))
\end{aligned}
$$

となります ((7) での ρ を $\rho\boldsymbol{v}$ に置き換えればいい)。ここで力学 (ニュートンの第二法則) を持ち込みます。力学では物体の運動方程式は、物体の質量を m_p、加速度を $\boldsymbol{a}_p = d\boldsymbol{v}_p/dt$、物体に作用している力を $\boldsymbol{F}_p$ とすれば

$$
m_p\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{F}_p
$$

と書けます。これが流体粒子でも成立しているとします。そうすると、面 S によって囲まれた体積 V の領域に作用している力を $\boldsymbol{F}$ として、運動量 $\boldsymbol{P}$ を使って

$$
\frac{D}{Dt}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{F}
$$

この $\boldsymbol{F}$ を体積力と面積力に分解します。微小領域に作用する体積力は dV を微小体積として

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x},t)dV
$$

面積力は微小面積を dS として

$$
\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})dS
$$

$\boldsymbol{f}$ は単位質量あたりの体積力、$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ は応力、$\boldsymbol{n}$ は面 S の単位法線ベクトルです。応力は応力テンソル σ_{ij} によって

$$
p_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij}n_j
$$

となるので、領域全体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ の成分 F_i は

$$F_i = \int_V dV\ \rho f_i + \int_S dS\ p_i(\boldsymbol{n}) = \int_V dV\ \rho f_i + \int_S dS\ \sigma_{ij} n_j$$

第 2 項をガウスの発散定理 ($\boldsymbol{n}$ は面 S の単位法線ベクトル)

$$\int_V dV\ \frac{\partial}{\partial x_i} A_i = \int_S dS\ n_i A_i \quad \Big(\int_V dV\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A}\Big) \tag{9}$$

を使って

$$F_i = \int_V dV\ \rho f_i + \int_V dV\ \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \tag{10}$$

と変形します。

これを今考えている領域 D に当てはめれば

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} P_i(t) &= F_i \\
\int_{V(t)} d\tau (\rho v_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_j + \frac{D}{Dt}(\rho v_i)) &= \int_{V(t)} d\tau (\rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}) \\
\int_{V(t)} d\tau \Big(\frac{D}{Dt}(\rho v_i) + \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}\Big) &= 0
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{D}{Dt}(\rho v_i) + \rho v_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_j = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}$$

という微分方程式が出てきます。ここで、質量保存が成立しているとし連続の方程式 (8) を左辺に使うと

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \frac{D}{Dt} \rho + \rho \frac{D}{Dt} \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \\
&= -\boldsymbol{v} \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho \frac{D}{Dt} \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \\
&= \rho \frac{D}{Dt} \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となるので

$$\rho \frac{D}{Dt} v_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \tag{11}$$

これは速度の時間微分と力による式なので、流体の運動方程式と言えて、そして運動量の式から求められているので、運動量方程式 (momentum equation) と呼ばれます。具体的に流体を扱うには σ_{ij} の形を入れる必要があり、そうして導出されるのがナビエ・ストークス方程式です。また、左辺の物質微分は加速度 $\boldsymbol{a}$ になるので

$$\rho a_i = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

とも書けます。

最後はエネルギー保存です。領域 D のエネルギーを E とします。流体のエネルギーを考えるとき、エネルギーは流体粒子の運動エネルギーと流体の内部エネルギー (熱的な寄与) の和で書けるとします。ここでは内部エネルギーの詳細は省いて、単にそういう寄与があるというだけにします。そうすると、流体粒子の速度の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ と、微小体積 $d\tau$ によって、微小なエネルギー ϵ は

$$\epsilon = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\rho d\tau + u\rho d\tau$$

と書けます。第 1 項は流体粒子の運動エネルギー、第 2 項の u は単位質量あたりの内部エネルギーです。エネルギー E は ϵ を領域 D にわたって積分すればいいので

$$E(t) = \int_{V(t)} d\tau\ \epsilon = \int_{V(t)} d\tau\ \rho(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + u)$$

これの物質微分は

$$\begin{aligned}
\frac{DE}{Dt} &= \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} d\tau\ \rho(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + u) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ \frac{D}{Dt}\big(\frac{1}{2}|J|\rho|\boldsymbol{v}|^2 + |J|\rho u\big) \\
&= \int_{V_0} d\tau_0\ \big(\frac{D|J|}{Dt}\rho(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + u) + |J|\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) + |J|\frac{D}{Dt}(\rho u)\big) \\
&= \int_{V(t)} d\tau\ \big((\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + u) + \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \rho u)\big)
\end{aligned}$$

運動エネルギーの変化は仕事で書けるので、仕事を導入します。必要なのは仕事率 (単位時間あたりの仕事) です。面 S に囲まれた体積 V の領域に作用する体積力による仕事率 W_V は、作用している力と速度の内積なので

$$W_V = \int_V d\tau\ \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

と与えられます。面積力による仕事率 W_S は同様に

$$W_S = \int_S dS\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}$$

となります。内部エネルギーによる影響は具体的に与えずに、単に Q と書くだけにします。なので、ガウスの発散定理を使って

$$
\begin{aligned}
\frac{DE}{Dt} &= W_V + W_S + Q \\
&= \int_V d\tau\ \rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \int_S dS\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v} + \int_V d\tau\ q \quad (Q = \int_V d\tau\ q) \\
&= \int_V d\tau\ (\rho \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) + q)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho u + \frac{D}{Dt}(\rho u) = \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) + q \tag{12}
$$

左辺は第 2 項の物質微分を変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho|\boldsymbol{v}|^2) + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\rho|\boldsymbol{v}|^2) - \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2(\nabla\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

なので、第 1 項と合わせることで

$$
\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2) + \nabla\cdot(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\rho|\boldsymbol{v}|^2)
$$

$D(\rho u)/Dt$ も書き換えて、$K = |\boldsymbol{v}|^2/2$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K) + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho u + \frac{D}{Dt}(\rho u) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K) + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\rho u + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\rho u) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho K + \rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho u) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho K + \rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K + \boldsymbol{v}\rho u)
\end{aligned}
$$

よって、(12) は

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho K + \rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K + \boldsymbol{v}\rho u) = \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) + q \tag{13}
$$

となります。これはエネルギー方程式 (energy equation) と呼ばれます。

K のみの場合は、(11) に v_i をかけると出てきます。左辺は

$$
\begin{aligned}
\rho v_i \frac{D}{Dt} v_i &= \rho v_i (\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla) v_i \\
&= \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla) v^2 \qquad (v^2 = v_i v_i = |\boldsymbol{v}|^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\frac{1}{2}\rho v^2) - \frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\frac{1}{2}\rho v^2) - \frac{1}{2}v^2\big(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\big)
\end{aligned}
$$

第 3 項は連続の方程式によって消えるので

$$
\rho v_i \frac{D}{Dt} v_i = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\frac{1}{2}\rho v^2) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K)
$$

(11) の右辺は

$$
v_i \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) - \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}v_i
$$

よって

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K) = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}
$$

これは (13) で $u = 0$ としただけでは出てこなく、右辺第 3 項が余計に出てきます。なので、この式には内部エネルギーとの関係性が残っています。
(13) からこれを引けば、内部エネルギーによる式になります。左辺は

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho K + \rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K + \boldsymbol{v}\rho u) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho K) - \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho K) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho u)
$$

右辺は

$$
\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) + q - \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i) + \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = q + \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}
$$

よって、内部エネルギー u に対しては

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho u) = \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + q
$$

となります。

見てきたような流体を構成する流体粒子を使って記述する方法に対して、流体粒子は見ずに、流体の性質を表す物理量 $F(\boldsymbol{x}, t)$ によって記述する方法があり、オイラーの方法 (Eulerian description) と呼ばれています。オイラーの方法では $\boldsymbol{x}, t$ が独立変数です。この 2 つの方法には、座標変換 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ の逆変換として

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t)$$

が存在していれば、同じ物理量を表現する関係として

$$F(\boldsymbol{\xi}, t) = F(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t), t) = G(\boldsymbol{x}, t)$$

が与えられます。上でも言ったように、$F(\boldsymbol{\xi}, t) = G(\boldsymbol{x}, t)$ に対して G とせずに $F(\boldsymbol{x}, y)$ と書きます。ラグランジュの方法で変数を $\boldsymbol{x}$(初期条件として $t = 0$ で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$) にして密度と速度ベクトルを記述していたことから予想できるように、オイラーの方法でも流体を記述するのは同じ方程式です。

流体の物理量 $F(\boldsymbol{x}, t)$ は、電磁気での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ と同じように、場の概念に対応します。場は簡単に言えば、変数として位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と時間 t を持つ連続関数のことです。このため、例えば速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を速度場 (velocity field) と言ったりします。

オイラーの方法でも基本となるのは流体の速度なので、速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を考えます。$\boldsymbol{x}$ に依存していることから分かるように、オイラーの方法において $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ は時間 t での速度の空間分布です (他の物理量 $F(\boldsymbol{x}, t)$ も時間 t での空間分布)。なので、時間 t での位置 $\boldsymbol{x}$ にいる流体粒子の速度と言えます。

ある時間での速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を繋げた曲線を流線 (streamline) と言います。言い換えれば、ある時間に曲線 C があり、この曲線の接ベクトルが速度ベクトルであるなら C は流線です (曲線上の点の接ベクトルが速度ベクトル)。流線と流跡線の違いは、流線は時間が固定されていて、流跡線は時間に依存して描かれる点です。

速度ベクトルと同じように、$F(\boldsymbol{x}, t)$ で表される流体の物理量は、$\boldsymbol{x}$ を通る初期位置 $\boldsymbol{\xi}$ の流体粒子によって表せるとします。そうすると、$F(\boldsymbol{x}, t) = F(\boldsymbol{\xi}, t) = f$ なので、(2) と同じで

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} &= (\frac{\partial x_i(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t})_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \\
&= v_i(\boldsymbol{x}, t) \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \\
&= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla F(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

このため、ラグランジュの方法と同じように物質微分 D/Dt は

$$\frac{DF(\boldsymbol{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla F(\boldsymbol{x}, t)$$

と定義されます ((2) では $F(\boldsymbol{\xi}, t)$ の視点から $F(\boldsymbol{x}, t)$ に、ここでは $F(\boldsymbol{x}, t)$ の視点から $F(\boldsymbol{\xi}, t)$ に繋いだだけ)。

速度ベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ は流体粒子の速度と見なせるので、(1),(4) と同じように加速度は物質微分によって

$$\boldsymbol{a} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$$

となります。

ラグランジュの方法とオイラーの方法での速度の単純な例を示しておきます。1 次元として、速度は一定で、流体粒子の初期位置 ξ の定数倍によって $v(\xi) = \alpha\xi$ と与えます。$v(\xi)$ はラグランジュの方法での表現です。これをオイラーの方法に書き換えます。ラグランジュの方法では速度は物質微分によって

$$v(\xi) = \frac{D}{Dt}x(\xi, t) = (\frac{\partial}{\partial t}x(\xi, t))_\xi = \alpha\xi$$

なので、位置 $x(\xi, t)$ は、初期条件 $t = 0$ で $x = \xi$ から

$$x(\xi, t) = \alpha\xi t + \xi$$

と求められます。速度 v をオイラーの方法での表現にするには、これを使って ξ を x に書き直せばいいです (逆変換 $\xi = \xi(x, t)$ を求める)。よって

$$x = (\alpha t + 1)\xi$$
$$\xi = \frac{x}{\alpha t + 1}$$

を速度 $v(\xi)$ に入れて

$$v(\xi) = \alpha\xi = \frac{\alpha x}{\alpha t + 1} = v(x, t) \tag{14}$$

となります。

質量保存から連続の方程式を求めます。流体中に固定された領域 D を考え、領域 D を流体が通過するとします。流体は領域 D を時間変化に従って通過しますが、領域 D は時間の経過で形を変えないとします (ラグランジュの方法と違い流体粒子を追いかけないので、領域 D の形は変わらない)。この領域の面を S、面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします ($\boldsymbol{n}$ は領域 D の外側を向いている)。流体の質量密度を $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ とすれば、この領域の質量は領域 D の体積によって

$$m(t) = \int_D d\tau\ \rho(\boldsymbol{x}, t)$$

となります (時間 t での領域 D に含まれる流体の質量)。固定された (時間依存しない) 領域 D での質量の時間変化が知りたいので、t で偏微分します。領域 D は時間依存していないので、時間微分は体積積分には作用しないです (積分の内側に時間微分を入れられる)。そして、左辺では偏微分でも常微分でも同じなので

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_D d\tau\ \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x}, t) \tag{15}$$

$\boldsymbol{x}$ の範囲が時間とは無関係に決まっているので、右辺は偏微分になっているとも言えます。

ここで、面 S を通っている質量の流れを考えます。面 S 上の微小な面積を dS として

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

という量を作ります。$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{v}$ の法線方向の成分です。$\rho\boldsymbol{v}$ は、例えば $\boldsymbol{v}$ が時間に依存していないなら、$\rho|\boldsymbol{v}|tdS$ は質量になります (dS を底面、$|\boldsymbol{v}|t$ を高さにする直方体による質量)。そして、$\rho\boldsymbol{v}dS$ は面に垂直な成分 (法線成分) と水平な成分 (接線成分) に分解でき、法線成分は面から出て行く質量と見なせます。なので、$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ は単位時間あたりに dS から出て行く質量です。$\boldsymbol{n}$ は面の外側を向いているので領域 D の外に向かって通過しています。これは質量の次元を M、長さの次元を L、時間の次元を T とすれば

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=[\frac{M}{L^3}\frac{L}{T}L^2]=[\frac{M}{T}]$$

であることからも確かめられます (単位法線ベクトルは無次元)。このため、フラックス $\rho\boldsymbol{v}$ は単位時間、単位面積あたりの質量の流れと言えます。また、今の場合は領域 D 内に勝手に流体を生成する機能がないとしています (領域 D から出て行った分だけ減る)。

よって、領域 D 全体の面 S を通過する質量は $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を面全体にわたって積分すればよく

$$\int_S dS\ \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\rho\quad(\boldsymbol{n}dS=d\boldsymbol{S})$$

これは領域 D の外に出て行っている単位時間あたりの質量なので、領域 D の質量の時間変化です (外に出て行くので減らす)。よって

$$\frac{dm(t)}{dt}=-\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\rho$$

と書けます。右辺にガウスの発散定理 (9) を使えば

$$\frac{dm(t)}{dt}=-\int_D d\tau\ \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$

(15) と合わせれば

$$\int_D d\tau\ \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t)=\ -\int_D d\tau\ \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})$$
$$\int_D d\tau(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x},t)+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}))=0$$

これが任意の領域 D で成立するためには括弧内が 0 になればいいので

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

となり、ラグランジュの方法で求めた連続の方程式と同じになります。この導出は電磁気学での「電荷の保存」での連続の方程式の話と同じです。

運動量方程式は連続の方程式の導出過程で ρ を $\rho\boldsymbol{v}$ に置き換えればいいです。これは領域 D での運動量は

$$\boldsymbol{P} = \int_D d\tau\ \rho\boldsymbol{v}$$

で定義できるからです。なので、$d\boldsymbol{P}/dt = \boldsymbol{F}$ とすれば

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) = F_i$$

右辺は (10) を使えばよく、左辺は物質微分に書き換えれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) &= \frac{D}{Dt}(\rho v_i) - \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\rho v_i) + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho v_i) \\
&= \frac{D}{Dt}(\rho v_i) - \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\rho v_i) + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\rho v_i) + \rho v_i\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&= \frac{D}{Dt}(\rho v_i) + \rho v_i\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&= \frac{D}{Dt}(\rho v_i) + \rho v_i\nabla\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となるので、同じ運動量方程式になります。省きますが、エネルギーの場合もラグランジュの方法と同じになります。

・補足

ラグランジュの方法での連続の方程式はヤコビアンを経由せずに求めることもできます。3 次元の微小領域 $\Delta\tau$ における質量の物質微分が 0 になるとして

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta\tau) = 0$$

$\Delta\tau$ は時間依存しているので

$$\frac{D}{Dt}(\rho\Delta\tau) = \Delta\tau\frac{D}{Dt}\rho + \rho\frac{D}{Dt}\Delta\tau$$

第 2 項は $\Delta\tau = \Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ (位置 $\boldsymbol{x}$ での x_1, x_2, x_3 と $x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3$ によって作られる領域) とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt}\Delta\tau &= \Delta x_2\Delta x_3\frac{D}{Dt}\Delta x_1 + \Delta x_1\Delta x_3\frac{D}{Dt}\Delta x_2 + \Delta x_1\Delta x_2\frac{D}{Dt}\Delta x_3 \\
\frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}\Delta\tau &= \frac{1}{\Delta x_1}\frac{D}{Dt}\Delta x_1 + \frac{1}{\Delta x_2}\frac{D}{Dt}\Delta x_2 + \frac{1}{\Delta x_3}\frac{D}{Dt}\Delta x_3
\end{aligned}$$

Δx_1 は $\Delta x_1 = x_1' - x_1$ なので

$$\frac{D}{Dt}\Delta x_1 = (\frac{\partial}{\partial t}\Delta x_1)_\xi = (\frac{\partial x_1'}{\partial t} - \frac{\partial x_1}{\partial t})_\xi = v_1' - v_1$$

として、速度 v_1', v_1 で書けます。他でも同様にし

$$\frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}d\tau = \frac{1}{\Delta x_1}(v_1' - v_1) + \frac{1}{\Delta x_2}(v_2' - v_2) + \frac{1}{\Delta x_3}(v_3' - v_3)$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ は微小量なので、速度の変化も微小として $\Delta v_1 = v_1' - v_1,\ \Delta v_2 = v_2' - v_2,\ \Delta v_3 = v_3' - v_3$ と書けば

$$\frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}\Delta\tau = \frac{\Delta v_1}{\Delta x_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta x_2} + \frac{\Delta v_3}{\Delta x_3}$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \to 0$ の極限を取れば x_1, x_2, x_3 の偏微分になるので

$$\frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}\Delta\tau = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

よって

$$0 = \frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}(\rho\Delta\tau) = \frac{D}{Dt}\rho + \rho\frac{1}{\Delta\tau}\frac{D}{Dt}\Delta\tau = \frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

から

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

として、連続の方程式が出てきます。