線形弾性体

連続体力学で固体を扱うときに出てくる線形弾性体の式を導出します。流体から固体に対象を変えるだけで考え方は同じで、状況の整理に便利なので簡単に触れておきます。
「ナビエ・ストークス方程式」で導出している関係は説明なしで使っています。
ここでは x_1, x_2, x_3 軸による直交デカルト座標とします。

ある物体があり、その内部の粒子の位置を考えます。この物体は連続体として扱えるとします。物体を構成する粒子の時間 t での位置は $\boldsymbol{x}(t)$ とします。時間 $t_0 < t$ のときの位置を $\boldsymbol{X}(t_0)$ と書くことにします。$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{X}(t_0)$ は連続的に繋がっているので、2 つを繋げる変換として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t)$$

が存在し、これの逆変換

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$$

も存在するとします。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t)$ はオイラーの方法、$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ はラグランジュの方法です。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ の差を $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X}$ とします。これは時間 t_0, t での粒子の位置の差で、変位 (displacement) と呼ばれます。$\boldsymbol{x}$ を変数にしたものは $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ とします。変数を変えただけなので $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ です (変数を無視して書くなら $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}$)。ここでは後で使う近似をはっきりさせるために関数を区別して書くことにしています。

次に、時間 t_0 では $\boldsymbol{X}$ から $\Delta\boldsymbol{X}$ 離れた位置 $\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ に、時間 t では $\boldsymbol{x}$ から $\Delta\boldsymbol{x}$ 離れた位置 $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ にいる粒子を用意します。$(\Delta\boldsymbol{X})^2$ は時間 t_0 での 2 粒子間の距離、$(\Delta\boldsymbol{x})^2$ は時間 t での 2 粒子間の距離です。なので、$(\Delta\boldsymbol{X})^2 = (\Delta\boldsymbol{x})^2$ では時間経過で物体を構成する粒子間の距離は変化しないことになります。これは物体に変形が起きていないことになります（剛体）。一方で、$(\Delta\boldsymbol{X})^2 \neq (\Delta\boldsymbol{x})^2$ では粒子間の距離が変化するので、物体は変形を起こします。このズレがどのように表現されるかを求めます。

$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ での差なので、$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t)$ は $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ の差になります。このため、時間 t での $\Delta\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) \\
\Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - \phi(\boldsymbol{X}, t) \\
&= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X} \\
&= \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)
\end{aligned}$$

と書けます。$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t)$ をテーラー展開します。これは多変数でのテーラー展開となります。ベクトルの成分は X_i $(i = 1, 2, 3)$ のように書くことにして、$\boldsymbol{U}(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, X_3 + \Delta X_3, t)$ を ΔX_i が微小として展開すれば、$\Delta\boldsymbol{X}$ の一次までで

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) \simeq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_3}\Delta X_3$$

なので、$\Delta\boldsymbol{X}$ の一次までで $\Delta\boldsymbol{x}$ は

$$\Delta\boldsymbol{x} \simeq \Delta\boldsymbol{X} + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_3}\Delta X_3$$

成分で書けば

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= \Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_1}{\partial X_3}\Delta X_3 \\
\Delta x_2 &= \Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_2}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_3}\Delta X_3 \\
\Delta x_3 &= \Delta X_3 + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_3}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_3}{\partial X_3}\Delta X_3
\end{aligned}$$

$\Delta\boldsymbol{x}$ の内積を取ると

$$\begin{aligned}
(\Delta\boldsymbol{x})^2 &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 \\
&\simeq (\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_1}{\partial X_3}\Delta X_3)^2 + \cdots \\
&= (\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\Delta X_3 + \frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 \\
&\quad + 2\frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_1\Delta X_i + 2\frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_2\Delta X_i + 2\frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_3\Delta X_i \\
&\quad + (\frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + 2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j\Delta X_i \\
&\quad + \frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i\frac{\partial U_1}{\partial X_j}\Delta X_j + \frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i\frac{\partial U_2}{\partial X_j}\Delta X_j + \frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i\frac{\partial U_3}{\partial X_j}\Delta X_j \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + 2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j\Delta X_i + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\Delta X_i\Delta X_j
\end{aligned}$$

第四項は添え字の付け替えから

$$2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j\Delta X_i = (\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j})\Delta X_i\Delta X_j$$

とできるので

$$(\Delta\boldsymbol{x})^2 = (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + (\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})\Delta X_i\Delta X_j$$

$(\Delta\boldsymbol{X})^2$ との差を取ってみると、今の近似の範囲内で

$$(\Delta\boldsymbol{x})^2-(\Delta\boldsymbol{X})^2\simeq(\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})\Delta X_i\Delta X_j$$

このことから、右辺の括弧部分が 0 なら 2 点間の距離は同じままになります。括弧部分から

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})$$

としたものをラグランジュのひずみテンソル (strain tensor) と言います。

ひずみテンソルに $\partial U_i/\partial X_j$ が十分小さいとした近似を使います。$\boldsymbol{U}$ の $\boldsymbol{x}$ 周りでの展開は

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}+\frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_i}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}(X_i-x_i)+\cdots$$

このときの X_i による偏微分の項は第一項に比べて十分無視できるとして

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)\simeq\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$$

これは

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)-\boldsymbol{X}\simeq\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$$

となっていることです。$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$ と変数が $\boldsymbol{x}$ になっているので

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\simeq\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$$

となり、$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)\simeq\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\simeq\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ が言えます。このため、変数 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}$ の置き換えに対して $\boldsymbol{U}\simeq\boldsymbol{u}$ と表記できます（元々の同じ量としての等式 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ との区別に注意)。

また、同様のことから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_1}&=\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial x_3}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\\&=\frac{\partial(U_1+X_1)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial(U_2+X_2)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial(U_3+X_3)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\\&=(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial U_3}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3}\\&\simeq\frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

が言えます。よって、$\partial U_i/\partial X_j$ が十分小さいという近似のもとで、ひずみテンソルは

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_j}{\partial X_i}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

となり、$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}$ の区別がなくなります。このときは微小ひずみテンソルと呼ばれます。微小とついているように起きる変形は小さいです。微小ひずみテンソルは変形速度テンソルと同じ形です。なので、変形速度テンソルと同じで、対角成分は伸縮、非対角成分は角度のズレを起こします。流体と固体での扱いの違いは、流体では速度、固体では変位を使っている点です。

ここから微小ひずみテンソルを使っていくので、区別をなくして $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}$ と書いていき、微小ひずみテンソルをひずみテンソルと呼んでいきます。

応力テンソルの形を仮定します。応力テンソルはひずみテンソル e_{kl} の 1 次のみを含むとして

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$$

とします。応力テンソルとひずみテンソルがこのような線形の関係で与えられているものを線形弾性体 (linear elastic solid) と言います。また、加わっている力（応力）とそれによるズレの関係が線形なので、一般化されたフックの法則とも呼ばれます。c_{ijkl} は物質によって決まる量です。c_{ijkl} は微小ひずみテンソルの対称性から

$$c_{ijkl} e_{kl} = c_{ijkl} e_{lk} = c_{ijlk} e_{kl} = c_{ijlk} e_{lk} \ \Rightarrow \ 0 = c_{ijkl} e_{kl} - c_{ijlk} e_{kl} = (c_{ijkl} - c_{ijlk}) e_{kl}$$

なので、$c_{ijkl} = c_{ijlk}$ という対称性を持ちます。

さらに物体は一様で等方的とします。そうすると、等方的なテンソルの形から

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

となります。このときの λ, μ はラメの弾性定数（Lamé's elastic constant）と呼ばれ、物質ごとに決まる量です。

応力テンソルを変位による運動量方程式に入れます。体積力はないとします。変位は時間 t_0 と t での位置の差なので、変位の時間微分は速度になります。そして、今の近似では、変位の時間の偏微分において $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ の区別がないので、物質微分は時間の偏微分と同じになります。よって、運動量方程式の速度を $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$ に置き換えて

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \\
&= \lambda \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

今の近似 (変位の位置変化は微小) では大きく変形しないので密度 ρ は一定とします。ひずみテンソルを入れれば

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i &= \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
&= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
&= \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (1)
\end{aligned}$$

となり、これが線形弾性体の変位を求める式になります。ナブラを使った形にすれば

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u}=\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

右辺第一項にベクトルの関係

$$\nabla^2\boldsymbol{W}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{W})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{W})$$

を使えば

$$\mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

とできます。後は状況に合わせて方程式を解いていくことになります。

単純な状況になるように応力テンソルに制限を加えてみます。応力テンソルが x_1 のみに依存しているなら

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}$$

このとき、変位は $u_1(x_1,t)$ だけが 0 でないなら (x_1 に依存して x_1 方向だけに変位が起きている)、ひずみテンソルは $e_{11}=\partial u_1/\partial x_1$ となるので

$$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\ ,\ \sigma_{22}=\sigma_{33}=\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

これらから

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_1$$

となり、1 次元波動方程式となります。x_1 方向の変位 u_1 のみが起きているので、縦ひずみ (longitudinal strain) と呼ばれます。

もしくは、応力テンソルは x_1 のみに依存し、σ_{11} のみが 0 でないとしても 1 次元になります。応力テンソルが σ_{11} のみになるのは x_1 方向のみに応力が作用しているときです。σ_{11} のみなので

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}$$

σ_{11} も簡単に求まります。$\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$ なので

$$\sigma_{22}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{22}=0$$

$$\sigma_{33}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{33}=0$$

これらから $e_{22}=e_{33}$ が分かり、さらに変形すれば

$$
\begin{aligned}
\lambda(e_{11}+e_{33}+e_{33})+2\mu e_{33} &= 0 \\
2(\lambda+\mu)e_{33} &= -\lambda e_{11} \\
e_{33} &= -\frac{\lambda e_{11}}{2(\lambda+\mu)} \\
&= -\nu e_{11}
\end{aligned}
$$

ν はポアソン比 (Poisson's ratio) と呼ばれます。ポアソン比は応力が作用している方向のひずみと $e_{22}=e_{33}$ のひずみとの比です。

応力テンソルの σ_{11} は

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}=\lambda(e_{11}+e_{22}+e_{33})+2\mu e_{11} &= \lambda(e_{11}-\nu e_{11}-\nu e_{11})+2\mu e_{11} \\
&= (\lambda-2\lambda\nu+2\mu)e_{11} \\
&= (\lambda-2\lambda\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}+2\mu)e_{11} \\
&= (\frac{\lambda^2+\lambda\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}+2\frac{\lambda\mu+\mu^2}{\lambda+\mu})e_{11} \\
&= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}e_{11} \\
&= Ee_{11}
\end{aligned}
$$

となり、E はヤング率 (Young's modulus) と呼ばれます。ヤング率は作用している応力とひずみの比です。ポアソン比やヤング率は実験から求められます。

このときの変位の式は

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1 &= E\frac{\partial}{\partial x_1}e_{11} \\
&= E\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_1
\end{aligned}
$$

となります。

2 次元波動方程式になる場合もあります。このときは応力テンソルが x_3 に依存していないとします。x_3 の偏微分項が 0 になるので

$$
\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i=\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{i1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{i2}
$$

ここで、変位は $u_3(x_1,x_2,t)$ のみが 0 でないとすれば、e_{31},e_{32} のみが 0 でないので

$$
\sigma_{31}=2\mu e_{31}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\ ,\ \sigma_{32}=\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_2}
$$

よって

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{32}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_3 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u_3$$

となり、$u_3(x_1, x_2, t)$ による 2 次元波動方程式となります。このときの変位は $x_1 x_2$ 平面に対して垂直な $u_3(x_1, x_2, t)$ のみになっています。このように、面に対して垂直な変位のみのときは面外せん断 (antiplane shear) 運動と呼ばれます。

$u_a(x_1, x_2, t)$ $(a = 1, 2)$ が 0 でなく、u_3 は 0 とすれば、応力テンソルは

$$\sigma_{ab} = \lambda e_{aa}\delta_{ab} + 2\mu e_{ab} = \lambda\frac{\partial u_c}{\partial x_c}\delta_{ab} + \mu(\frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a})$$
$$\sigma_{33} = \lambda e_{aa} = \lambda\frac{\partial u_a}{\partial x_a}$$

添え字 a, b, c は 1 から 2 としています。これらから

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_a = \frac{\partial}{\partial x_b}\sigma_{ab}$$
$$= \lambda\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_c}{\partial x_c}\delta_{ab} + \mu(\frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial}{\partial x_b}\frac{\partial u_b}{\partial x_a})$$
$$= \lambda\frac{\partial^2 u_c}{\partial x_a \partial x_c} + \mu\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_b^2} + \mu\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_a \partial x_b}$$
$$= \mu\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_b^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_a \partial x_b}$$

このときは面に水平な u_1, u_2 が 0 でなく、inplane motion と呼ばれます。

(1) に戻って、(1) をより扱いやすい形に変形していきます。新しく

$$\phi = \nabla\cdot\boldsymbol{u}\ ,\ \ \boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{u}$$

とすれば、(1) は

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u} = -\mu\nabla\times\boldsymbol{A} + (\lambda + 2\mu)\nabla\phi$$

これの発散を取ると (ρ は定数)、ベクトルの計算から

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$$

となるので

$$
\begin{aligned}
\rho \nabla \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{u} &= -\mu \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \phi \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi
\end{aligned}
$$

となって、ϕ による波動方程式になります。

今度は回転を取ってみると

$$
\begin{aligned}
\rho \nabla \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{u} &= -\mu \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\lambda + 2\mu) \nabla \times \nabla \phi \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{A} &= -\mu (\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}) \\
&= \mu \nabla^2 \boldsymbol{A} \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0)
\end{aligned}
$$

となって、$\boldsymbol{A}$ による波動方程式となります。

しかし、これだと積分をしないと $\boldsymbol{u}$ が求められなく扱いづらいので、さらに変形します。ϕ から

$$
\phi = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla^2 P
$$

として、$\boldsymbol{u} = \nabla P$ とします。このようにすると

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 P &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \nabla^2 P \\
\nabla^2 (\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} P) &= \nabla^2 ((\lambda + 2\mu) \nabla^2 P) \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} P &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 P \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となって、同じ形の波動方程式ままで、P の微分から $\boldsymbol{u}$ が求められます。これを P 波の波動方程式とも言います。

$\boldsymbol{A}$ では

$$
\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{S}
$$

として、$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{S}$ とします。これを入れると

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{A} &= \mu \nabla^2 \boldsymbol{A} \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{S} &= \mu \nabla^2 (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{S}) \\
\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{S}) - \nabla^2 \boldsymbol{S}) &= \mu \nabla^2 (\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{S}) - \nabla^2 \boldsymbol{S})
\end{aligned}
$$

ここで、$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0$ とすれば

$$-\nabla^2(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{S}) = -\nabla^2(\mu\nabla^2\boldsymbol{S})$$
$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{S} = \mu\nabla^2\boldsymbol{S} \tag{3}$$

となって、元の形と同じ波動方程式になります。これを S 波の波動方程式とも言います。

$\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0$ は (2),(3) と出来るための条件になっています。このことをはっきりさせるために、今の式変形の結果を見直します。1 つの方程式 (1) から 2 つの方程式 (2),(3) への分解は

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$

として、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の方程式にしたことです。今の定義では

$$\boldsymbol{u}_1 = \nabla P \ , \ \boldsymbol{u}_2 = \nabla \times \boldsymbol{S}$$

によって、P と $\boldsymbol{S}$ の方程式になっています。しかし、ベクトル計算の性質から $\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{S} + \nabla\chi$ にしても

$$\boldsymbol{u}_2 = \nabla \times (\boldsymbol{S} + \nabla\chi) = \nabla \times \boldsymbol{S}$$

となって、$\boldsymbol{u}_2$ に影響しません。これは電磁気でのベクトルポテンシャルのゲージ変換と同じ構造です。なので、クーロンゲージと同じように $\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0$ を条件として加えています。

式変形とゲージ変換の視点から $\boldsymbol{u} = \nabla P + \nabla \times \boldsymbol{S}$ $(\nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0)$ となることを見ましたが、これはベクトルは発散と回転に分解できるというヘルムホルツの分解定理そのものです。

P 波、S 波は地震の話で出てくる単語です。$P, \boldsymbol{S}$ の式は波動方程式なので、$P, \boldsymbol{S}$ が波として伝わる速度は

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \ , \ v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \ , \ \frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1 - 2\nu}}$$

となっていて、現実の物質では λ, μ は正であるために (例えばアルミニウムならポアソン比で $\nu \simeq 0.34$)、P のほうが速く伝播していきます。P 波のほうが先に伝わるので、P 波が第一波 (primary wave)、S 波が第二波 (secondary wave) となっています。

また、$P, \boldsymbol{S}$ の波動方程式から変位は縦波 (波の進行方向に変化)、横波 (波の進行方向に対して垂直に変化) として伝わることが分かります。波動方程式の解の形として

$$P = F(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - ct) = F(\xi)$$

を使います。$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで波の進行方向を向いています (波面に垂直な方向)。$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = \nabla P$ になっているとします。このときの変位 $\boldsymbol{u}$ の方向を見てみると

$$u_i = \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\frac{dF(\xi)}{d\xi} = k_i\frac{dF(\xi)}{d\xi} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}\frac{dP}{d\xi}$$

なので、$\boldsymbol{k}$ と同じ方向を向いています。$\boldsymbol{k}$ は波の進行方向 (P が伝わっていく方向) なので、$\boldsymbol{u}$ も進行方向を向いています。なので、$\boldsymbol{u}$ は縦波として伝播していきます。

同様に

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - ct) = \boldsymbol{G}(\xi)$$

として、$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{S}$ とすれば

$$u_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} S_k = \epsilon_{ijk} k_j \frac{dG_k(\xi)}{d\xi} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times \frac{d\boldsymbol{S}}{d\xi}$$

$\boldsymbol{k}$ との外積の形になっているので $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直です。よって、横波です。これが地震では先に縦揺れ (P 波) が来てその後に横揺れ (S 波) がくるという話に対応します。ただし、揺れ方 (変位) は地面に対する波の進行方向によるので、進行方向によって揺れ方は異なります。