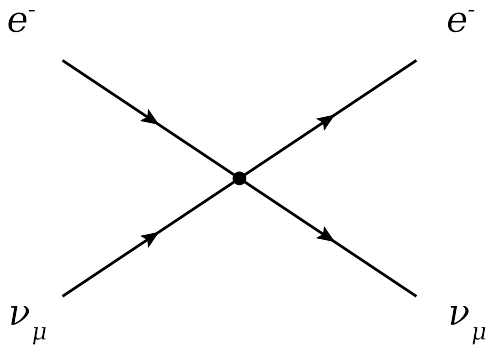
中性カレント

「ミューオン崩壊」では弱い相互作用での崩壊を見ましたが、ここでは散乱を見ます。このとき、荷電カレントでなく中性カレントでの散乱とします。

中性カレントについて見ていきます。荷電カレントを扱うなら $V-A$ 型を使っていればいいですが、中性カレントでは純粋な $V-A$ 型では上手くいきません。
扱うのはミューニュートリノ-電子散乱で

$$\nu_\mu e^- \ \rightarrow \ \nu_\mu e^-$$



この場合、ニュートリノ同士、電子同士のカレントになるので、電荷に変化が起きない中性カレントです。中性カレントの形は、$V-A$ 型になっていなく、$1-\gamma^5$ を $g_V - g_A\gamma^5$ とします。しかし、ニュートリノは左巻きでなければならないので、変更しません。なので、電子部分だけ変更して

$$\overline{u}_\nu \gamma_\mu (1-\gamma^5) u_\nu \ , \ \overline{u}_e \gamma_\mu (g_V - g_A\gamma^5) u_e$$

u_e は電子のスピノール部分、u_ν はミューニュートリノのスピノール部分です。ミューニュートリノしか出てこないので、ニュートリノと呼び、ν で表すことにします。
というわけで、不変振幅は

$$\mathcal{M} = [\overline{u}_\nu(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\nu(k,t)][\overline{u}_e(p',s')\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)u_e(p,s)]$$

そして、断面積はニュートリノの終状態に対しては積分を取ることにして

$$d\sigma = \frac{G^2}{2}\frac{(2\pi)^4}{2k_0 2p_0|J|}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0}\int \frac{dk'}{(2\pi)^3 2k'_0}\delta^4(p'+k'-p-k)|\mathcal{M}|^2$$

$|J|$ は単位体積での入射フラックスで、入射してくる電子、ニュートリノの速度 $\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{v}_\nu$ によって

$$|J| = |\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_\nu|$$

電子とニュートリノの質量を m_e, m_ν として、電子の運動量は p^μ、ニュートリノの運動量は k^μ なので

$$
\begin{aligned}
|J| &= \sqrt{\boldsymbol{v}_e^2 + \boldsymbol{v}_\nu^2 - 2\boldsymbol{v}_e \cdot \boldsymbol{v}_\nu} \\
&= \sqrt{\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0^2} + \frac{\boldsymbol{k}^2}{k_0^2} - 2\frac{\boldsymbol{p}}{p_0} \cdot \frac{\boldsymbol{k}}{k_0}} \\
&= \frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 k_0^2 + \boldsymbol{k}^2 p_0^2 - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}) p_0 k_0}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{k}^2 + m_\nu^2) + \boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{p}^2 + m_e^2) - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}) p_0 k_0}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{p}^2 m_\nu^2 + (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{k}^2 m_e^2 - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}) p_0 k_0}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{(\boldsymbol{p}^2 + m_e^2)(\boldsymbol{k}^2 + m_\nu^2) - m_e^2 m_\nu^2 + (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p})^2 - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}) p_0 k_0}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{p_0^2 k_0^2 - m_e^2 m_\nu^2 + (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p})^2 - 2(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}) p_0 k_0}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{(p_0 k_0 - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p})^2 - m_e^2 m_\nu^2}}{p_0 k_0} \\
&= \frac{\sqrt{(p \cdot k)^2 - m_e^2 m_\nu^2}}{p_0 k_0}
\end{aligned}
$$

途中で共線性（同一直線上での衝突）

$$
(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{k}^2
$$

を使っています。ここでは、ニュートリノ質量は 0 にして

$$
|J| = \frac{p \cdot k}{p_0 k_0}
$$

よって、断面積は結合定数 $G/\sqrt{2}$ を加えて

$$
d\sigma = \frac{G^2}{2} \frac{1}{4p \cdot k} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p'}{2p'_0} \int \frac{d^3 k'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k) |\mathcal{M}|^2
$$

スピン和も取れば

$$
d\sigma = \frac{G^2}{2} \frac{1}{4p \cdot k} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2
$$

全断面積では、電子の終状態に対しても積分して

$$
\sigma = \frac{G^2}{2} \frac{1}{4p \cdot k} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{1}{2} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 \tag{1}
$$

となります。

不変振幅部分を計算します。$|\mathcal{M}|^2$ は

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \left|[\overline{u}_\nu(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\nu(k,t)][\overline{u}_e(p',s')\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)u_e(p,s)]\right|^2 \\
&= \left[\overline{u}_\nu(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\nu(k,t)\overline{u}_\nu(k,t)\gamma^\beta(1-\gamma^5)u_\nu(k',t')\right] \\
&\qquad \times \left[\overline{u}_e(p',s')\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)u_e(p,s)\overline{u}_e(p,s)\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)u_e(p',s')\right] \\
&= N^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

ニュートリノ部分は

$$
\begin{aligned}
N^{\alpha\beta} &= [\overline{u}_\nu(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\nu(k,t)\overline{u}_\nu(k,t)\gamma^\beta(1-\gamma^5)u_\nu(k',t')] \\
&= \mathrm{tr}[\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\not{k}\gamma^\beta(1-\gamma^5)\not{k}'] \\
&= \mathrm{tr}[\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta(1-\gamma^5)^2\not{k}'] \\
&= 2\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta(1-\gamma^5)\not{k}'] \\
&= 2\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta\not{k}'(1+\gamma^5)] \\
&= 2\mathrm{tr}[\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta\not{k}'+\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta\not{k}'\gamma^5] \\
&= 8(k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}k\cdot k' + k^\beta k'^\alpha - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda)
\end{aligned}
$$

電子部分は

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &= \left[\overline{u}_e(p',s')\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)u_e(p,s)\overline{u}_e(p,s)\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)u_e(p',s')\right] \\
&= \mathrm{tr}\left[\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)(\not{p}+m_e)\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)(\not{p}'+m_e)\right] \\
&= \mathrm{tr}\Big[\big(\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5) \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)\big)(\not{p}'+m_e)\Big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}' \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}' \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)m_e \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)m_e\big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}' \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}' \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)m_e \\
&\qquad\qquad + \gamma_\alpha(g_V-g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V-g_A\gamma^5)m_e\big]
\end{aligned}
$$

γ^μ が奇数個あるものは消えるので (γ^5 は 4 つ γ を含んでいる)

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\not{p}\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)\not{p}' \\
&\qquad + \gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)m_e\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)m_e\big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\not{p}'(g_V + g_A\gamma^5)^2 \\
&\qquad + m_e^2\gamma_\alpha\gamma_\beta(g_V + g_A\gamma^5)(g_V - g_A\gamma^5)\big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\not{p}'(g_V^2 + g_A^2 + 2g_Vg_A\gamma^5) + m_e^2\gamma_\alpha\gamma_\beta(g_V^2 - g_A^2)\big] \\
&= \mathrm{tr}\big[\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\not{p}'(g_V^2 + g_A^2) + 2g_Vg_A\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\not{p}'\gamma^5 + m_e^2\gamma_\alpha\gamma_\beta(g_V^2 - g_A^2)\big] \\
&= 4(g_V^2 + g_A^2)(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) - 8ig_Vg_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}p^\rho p'^\lambda + 4m_e^2g_{\alpha\beta}(g_V^2 - g_A^2)
\end{aligned}
$$

$N^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}$ は

$$
\begin{aligned}
N^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} &= 32(k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}k\cdot k' + k^\beta k'^\alpha - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda) \\
&\quad \times ((g_V^2+g_A^2)(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) - 2ig_V g_A \epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}p^\rho p'^\lambda + m_e^2 g_{\alpha\beta}(g_V^2-g_A^2)) \\
&= 32\big[(g_V^2+g_A^2)k^\alpha k'^\beta(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) - 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}k^\alpha k'^\beta p^\rho p'^\lambda \\
&\quad + m_e^2 g_{\alpha\beta}k^\alpha k'^\beta(g_V^2-g_A^2) - g^{\alpha\beta}k\cdot k'(g_V^2+g_A^2)(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) \\
&\quad + g^{\alpha\beta}k\cdot k' 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}p^\rho p'^\lambda - g^{\alpha\beta}k\cdot k' m_e^2 g_{\alpha\beta}(g_V^2-g_A^2) \\
&\quad + (g_V^2+g_A^2)k^\beta k'^\alpha(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) - 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}k^\beta k'^\alpha p^\rho p'^\lambda + m_e^2 g_{\alpha\beta}k^\beta k'^\alpha(g_V^2-g_A^2) \\
&\quad - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda(g_V^2+g_A^2)(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) + i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\mu p'^\nu \\
&\quad - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda m_e^2 g_{\alpha\beta}(g_V^2-g_A^2)\big] \\
&= 32\big[(g_V^2+g_A^2)((p\cdot k)(p'\cdot k') - (p\cdot p')(k\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k')) \\
&\quad - 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}k^\alpha k'^\beta p^\rho p'^\lambda + m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') \\
&\quad - (g_V^2+g_A^2)(k\cdot k')((p\cdot p') - g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}p\cdot p' + (p\cdot p')) \\
&\quad + 2i(k\cdot k')g_V g_A g^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}p^\rho p'^\lambda - (g_V^2-g_A^2)m_e^2 g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}(k\cdot k') \\
&\quad + (g_V^2+g_A^2)((k'\cdot p)(p'\cdot k) - (k\cdot k')(p\cdot p') + (k\cdot p)(k'\cdot p')) \\
&\quad - 2ig_V g_A\epsilon_{\alpha\rho\beta\lambda}k^\beta k'^\alpha p^\rho p'^\lambda + m_e^2(k\cdot k')(g_V^2-g_A^2) \\
&\quad - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda(g_V^2+g_A^2)(p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}p\cdot p' + p_\beta p'_\alpha) \\
&\quad - 2\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda g_V g_A\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p^\mu p'^\nu - i\epsilon^{\alpha\rho\beta\lambda}k_\rho k'_\lambda m_e^2 g_{\alpha\beta}(g_V^2-g_A^2)\big] \\
&= 32\big[2(g_V^2+g_A^2)((p_\alpha\cdot k)(p'\cdot k') - (p\cdot p')(k\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k')) \\
&\quad + 2m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') + 2(g_V^2+g_A^2)(k\cdot k')(p\cdot p') - 4(g_V^2-g_A^2)m_e^2(k\cdot k') \\
&\quad - 2(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\rho)k_\rho k'_\lambda g_V g_A p^\mu p'^\nu\big] \\
&= 32\big[2(g_V^2+g_A^2)\big((p_\alpha\cdot k)(p'\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k')\big) \\
&\quad - 2m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') - 2(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\rho)k_\rho k'_\lambda g_V g_A p^\mu p'^\nu\big] \\
&= 32\big[2(g_V^2+g_A^2)\big((p_\alpha\cdot k)(p'\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k')\big) \\
&\quad - 2m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') + 4g_V g_A\big((k\cdot p)(k'\cdot p') - (k\cdot p')(k'\cdot p)\big)\big] \\
&= 32\big[2(g_V^2+g_A^2)\big((p\cdot k)(p'\cdot k') + (p'\cdot k)(p\cdot k')\big) - 2m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') \\
&\quad + 4g_V g_A\big((k\cdot p)(k'\cdot p') - (k\cdot p')(k'\cdot p)\big)\big] \\
&= 64(g_V+g_A)^2(p\cdot k)(p'\cdot k') + 64(g_V-g_A)^2(p'\cdot k)(p\cdot k') - 64m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k') \qquad (2)
\end{aligned}
$$

後は積分の実行です。面倒なので公式扱いにしてしまいます。

積分は、(2) から

$$I_1 = \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k)(p' \cdot k')$$

$$I_2 = \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k) p'_\alpha k'_\beta$$

$$I_3 = \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k)(k \cdot k')$$

I_1 は

$$I_1 = \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \int \frac{dk'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k)(p' \cdot k') = \frac{\pi}{4}(k+p)^2(1 - \frac{m_e^2}{(k+p)^2})^2 \tag{3}$$

I_2 は

$$I_2 = \frac{\pi}{24}(1 - \frac{m_e^2}{(k+p)^2})^2 [g_{\alpha\beta}((k+p)^2 - m_e^2) + 2(k+p)_\alpha (k+p)_\beta (1 + \frac{2m_e^2}{(k+p)^2})] \Theta((k+p)^2 - m_e^2) \tag{4}$$

I_1 は I_2 で $\alpha = \beta$ としたもので、「ミューオン崩壊」で出てきた積分はこれの質量がないとしたものです (ミューオン崩壊では $k_\alpha k'_\beta$ だったので質量が出てこない)。また、ここでは $(k+p)^2 > m_e^2$ なので階段関数はあってもなくても問題にはなりません。

I_3 は、重心系 ($\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{k},\ k_0 + p_0 = E$ (重心系の全エネルギー)) に移してしまうと簡単にできます。散乱角 θ を使ってニュートリノの運動量は

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'| \cos\theta = k_0 k'_0 \cos\theta \quad (|\boldsymbol{k}| = k_0\ ,\ |\boldsymbol{k}'| = k'_0)$$

これより、立体角 Ω によって

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \int \frac{d^3k'}{2k'_0} \delta^4(p' + k' - p - k)(k \cdot k') \\
&= \int \frac{d^3k'}{2k'_0 2p'_0} \delta(p'_0 + k'_0 - p_0 - k_0)(k \cdot k') \quad (\delta^3(\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) \Rightarrow \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \\
&= \int \frac{d^3k'}{2k'_0} \frac{\delta(\sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 + m_e^2} + k'_0 - E)}{2\sqrt{(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 + m_e^2}} (k \cdot k') \quad (p_0'^2 - m_e^2 = (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2) \\
&= \int \frac{d^3k'}{2k'_0} \frac{\delta(\sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + m_e^2} + k'_0 - E)}{2\sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + m_e^2}} (k_0 k'_0 - k_0 k'_0 \cos\theta) \quad (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{k} = 0) \\
&= \int d\Omega \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{k}'^2 d|\boldsymbol{k}'|}{2k'_0} \frac{\delta(\sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + m_e^2} + k'_0 - E)}{2\sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + m_e^2}} (k_0 k'_0 - k_0 k'_0 \cos\theta) \\
&= \int d\Omega \int_0^\infty \frac{k_0'^2 dk'_0}{2k'_0} \frac{\delta(\sqrt{k_0'^2 + m_e^2} + k'_0 - E)}{2\sqrt{k_0'^2 + m_e^2}} k_0 k'_0 (1 - \cos\theta) \\
&= k_0 \int d\Omega (1 - \cos\theta) \int_0^\infty dk'_0 \frac{\delta(\sqrt{k_0'^2 + m_e^2} + k'_0 - E)}{4\sqrt{k_0'^2 + m_e^2}} k_0'^2
\end{aligned}$$

ここで、デルタ関数の関係

$$\int dx f(x)\delta(g(x)) = \frac{f(x)}{|g'(x)|}\Big|_{g(x)=0}$$

を使って

$$\begin{aligned}
I_3 &= k_0 \int d\Omega(1-\cos\theta)\int_0^\infty dk_0' \frac{\delta(\sqrt{k_0'^2+m_e^2}+k_0'-E)}{4\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}k_0'^2 \\
&= k_0 \int d\Omega(1-\cos\theta)\frac{k_0'^2}{4\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}\frac{1}{(k_0'^2+m_e^2)^{-1/2}k_0'+1}\Big|_{g(k_0')=0} \\
&= k_0 \int d\Omega(1-\cos\theta)\frac{k_0'^2}{4\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}\frac{\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}{k_0'+\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}\Big|_{g(k_0')=0} \\
&= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega(1-\cos\theta)\frac{k_0'^2}{k_0'+\sqrt{k_0'^2+m_e^2}}\Big|_{g(k_0')=0}
\end{aligned}$$

$g(k_0')=0$ は

$$g(k_0') = \sqrt{k_0'^2+m_e^2}+k_0'-E=0$$

なので

$$\begin{aligned}
k_0'^2+m_e^2 &= (E-k_0')^2 \\
k_0' &= \frac{E^2-m_e^2}{2E}
\end{aligned}$$

になって

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega (1-\cos\theta) \frac{k_0'^2}{k_0' + \sqrt{k_0'^2 + m_e^2}} \Big|_{k_0' = \frac{E^2 - m_e^2}{2E}} \\
&= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega (1-\cos\theta) \frac{\left(\frac{E^2-m_e^2}{2E}\right)^2}{\frac{E^2-m_e^2}{2E} + \sqrt{\left(\frac{E^2-m_e^2}{2E}\right)^2 + m_e^2}} \\
&= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega (1-\cos\theta) \frac{\left(\frac{E^2-m_e^2}{2E}\right)^2}{\frac{E^2-m_e^2}{2E} + \sqrt{\frac{E^4+m_e^4-2E^2m_e^2}{4E^2} + \frac{4E^2m_e^2}{4E^2}}} \\
&= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega (1-\cos\theta) \frac{\left(\frac{E^2-m_e^2}{2E}\right)^2}{\frac{E^2-m_e^2}{2E} + \frac{E^2+m_e^2}{2E}} \\
&= \frac{1}{4}k_0 \int d\Omega (1-\cos\theta) \frac{(E^2-m_e^2)^2}{4E^3} \\
&= \frac{1}{4}k_0 4\pi \frac{(E^2-m_e^2)^2}{4E^3} \\
&= k_0 \pi \frac{(E^2-m_e^2)^2}{4E^3}
\end{aligned}
$$

これをローレンツ不変な形に書き換えてないと他の項と一緒に扱えないので、ローレンツ不変にします。まず、$(k+p)^2$ は重心系では

$$
\begin{aligned}
(k+p)^2 &= k^2 + p^2 + 2k\cdot p \\
&= k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 + p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 + 2(k_0p_0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}) \\
&= k_0^2 + p_0^2 + 2k_0p_0 - \boldsymbol{k}^2 - \boldsymbol{p}^2 - 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p} \\
&= (k_0+p_0)^2 - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2 \\
&= (k_0+p_0)^2 \\
&= E^2
\end{aligned}
$$

これはマンデルスタム変数 $s = (k+p)^2$ が重心系の全エネルギーの 2 乗に対応していることを示しています。また、$k\cdot p$ は重心系では

$$
\begin{aligned}
k\cdot p &= k\cdot(k+p) \quad (k^2 = 0) \\
&= k_0(k^0 + p^0) - \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) \\
&= k_0(k^0 + p^0) \\
&= k_0 E
\end{aligned}
$$

このように対応し、s と $(k\cdot p)$ はローレンツ不変量なので、I_3 は

$$
\begin{aligned}
I_3 &= k_0 \pi \frac{(E^2 - m_e^2)^2}{4E^3} \\
&= \pi \frac{k_0 E}{E} \frac{(E^2 - m_e^2)^2}{4E^3} \\
&= \pi (k \cdot p) \frac{(s - m_e^2)^2}{4s^2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

となって、ローレンツ不変量で構成されるので見ている系に依存しなくなります。

(1) に (2)〜(5) を入れれば

$$
\begin{aligned}
\sigma = & \frac{G^2}{2}\frac{1}{4p\cdot k}\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{d^3p'}{2p'_0}\int\frac{dk'}{2k'_0}\delta^4(p'+k'-p-k) \\
\times & \qquad [32(g_V+g_A)^2(p\cdot k)(p'\cdot k')+32(g_V-g_A)^2(p'\cdot k)(p\cdot k')-32m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k')] \\
= & \frac{G^2}{2}\frac{1}{4p\cdot k}\frac{1}{(2\pi)^2}\big[32(g_V+g_A)^2(p\cdot k)\frac{\pi}{4}(k+p)^2\big(1-\frac{m_e^2}{(k+p)^2}\big)^2 \\
& +32(g_V-g_A)^2(k^\alpha p^\beta)\frac{\pi}{24}\big(1-\frac{m_e^2}{(k+p)^2}\big)^2\big[g_{\alpha\beta}\big((k+p)^2-m_e^2\big)+2(k+p)_\alpha(k+p)_\beta\big(1+\frac{2m_e^2}{(k+p)^2}\big)\big] \\
& -32m_e^2(g_V^2-g_A^2)\pi(k\cdot p)\frac{(s-m_e^2)^2}{4s^2}\big] \\
= & \frac{G^2}{2}\frac{1}{4p\cdot k}\frac{1}{(2\pi)^2}\big[32(g_V+g_A)^2(p\cdot k)\frac{\pi}{4}s\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2 \\
& +32(g_V-g_A)^2\frac{\pi}{24}\Big(1-\frac{m_e^2}{s}\Big)^2\big[(k\cdot p)(s-m_e^2)+2\big(k\cdot(k+p)\big)\big(p\cdot(k+p)\big)\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big] \\
& -32m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot p)\pi\frac{(s-m_e^2)^2}{4s^2}\big] \\
= & \frac{G^2}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\big[32(g_V+g_A)^2\frac{\pi}{4}s\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2+32(g_V-g_A)^2\frac{\pi}{24}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2[(s-m_e^2) \\
& +\frac{2\big(k\cdot(k+p)\big)\big(p\cdot(k+p)\big)}{k\cdot p}\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)]-32m_e^2(g_V^2-g_A^2)\pi\frac{(s-m_e^2)^2}{4s^2}\big] \\
= & \frac{G^2}{8}\frac{1}{(2\pi)^2}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2\big[8(g_V+g_A)^2\pi s+\frac{4}{3}\pi(g_V-g_A)^2[(s-m_e^2)+\frac{2(k^2+k\cdot p)(p\cdot k+p^2)}{k\cdot p}\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)] \\
& -8\pi m_e^2(g_V^2-g_A^2)\frac{(s-m_e^2)^2}{s^2}\frac{s^2}{(s-m_e^2)^2}\big] \\
= & \frac{G^2}{9}\frac{1}{(2\pi)^2}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2\big[8(g_V+g_A)^2\pi s+\frac{4}{3}\pi(g_V-g_A)^2\big[(s-m_e^2)+2(p\cdot k+m_e^2)\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big] \\
& -8\pi m_e^2(g_V^2-g_A^2)\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2\big[(g_V+g_A)^2s+\frac{1}{6}(g_V-g_A)^2\big[(s-m_e^2)+2(p\cdot k+m_e^2)\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big]-m_e^2(g_V^2-g_A^2)\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2s\big[(g_V+g_A)^2+\frac{1}{6}(g_V-g_A)^2\big[\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)+\frac{2(p\cdot k+m_e^2)}{s}\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big]-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2s\big[(g_V+g_A)^2+\frac{1}{6}(g_V-g_A)^2\big[\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)+\frac{2\big(\frac{(s-m_e^2)}{2}+m_e^2\big)}{s}\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big]-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}(1-\frac{m_e^2}{s})^2s\big[(g_V+g_A)^2+\frac{1}{6}(g_V-g_A)^2\big[\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)+\frac{s+m_e^2}{s}\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big]-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2s\big[(g_V+g_A)^2+\frac{1}{6}(g_V-g_A)^2\big[\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)+\big(1+\frac{m_e^2}{s}\big)\big(1+\frac{2m_e^2}{s}\big)\big]-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}\big(1-\frac{m_e^2}{s}\big)^2s\big[(g_V+g_A)^2+\frac{1}{3}(g_V-g_A)^2\big(1+\frac{m_e^2}{s}+\frac{m_e^4}{s^2}\big)-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big] \\
= & \frac{G^2}{4\pi}(1-\frac{m_e^2}{s})^2s\big[(g_V^2+g_A^2+2g_Vg_A)+\frac{1}{3}(g_V^2+g_A^2-2g_Vg_A)\big(1+\frac{m_e^2}{s}+\frac{m_e^4}{s^2}\big)-(g_V^2-g_A^2)\frac{m_e^2}{s}\big]
\end{aligned}
$$

電子の質量が重心系のエネルギー $E=\sqrt{s}$ に比べて小さいとすれば

$$\begin{aligned}\sigma &\simeq \frac{G^2}{4\pi}s[(g_V^2+g_A^2+2g_Vg_A)+\frac{1}{3}(g_V^2+g_A^2-2g_Vg_A)]\\ &= \frac{G^2}{3\pi}s(g_V^2+g_A^2+g_Vg_A)\end{aligned}$$

となります。

今はニュートリノでしたが、反ニュートリノと電子の散乱 $\overline{\nu}_\mu e^- \to \overline{\nu}_\mu e^-$ での不変振幅は

$$|\mathcal{M}|^2 = 64(g_V-g_A)^2(p\cdot k)(p'\cdot k')+64(g_V+g_A)^2(p'\cdot k)(p\cdot k')-64m_e^2(g_V^2-g_A^2)(k\cdot k')$$

となっており、これは $\nu_\mu e^- \to \nu_\mu e^-$ での g_A を $-g_A$ に変えたものです。なので、断面積の結果も g_A を $-g_A$ に置き換えるだけでよく、

$$\sigma \simeq \frac{G^2}{3\pi}s(g_V^2+g_A^2-g_Vg_A)$$

となります。

ニュートリノ、反ニュートリノでの散乱の測定結果は

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{E_\nu}(\nu e^- \to \nu e^-) &= 1.45\times 10^{-42}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{GeV})\\ \frac{\sigma}{E_{\overline{\nu}}}(\overline{\nu} e^- \to \overline{\nu} e^-) &= 1.30\times 10^{-42}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{GeV})\end{aligned}$$

ここでの $E_\nu, E_{\overline{\nu}}$ は実験室系でのものなので、実験室系での s を求めます。電子が静止している $(p_\mu=(p_0,0))$ として

$$s=(k+p)^2=2k\cdot p+m_e^2=2k_0p_0+m_e^2=2k_0m_e+m_e^2$$

k_0 が E_ν なので、電子の質量が小さいとして

$$E_\nu=\frac{s}{2m_e}$$

同様に

$$E_{\overline{\nu}}=\frac{s}{2m_e}$$

なので

$$\frac{\sigma}{E_\nu} = \frac{2G^2 m_e}{3\pi}(g_V^2 + g_A^2 + g_V g_A)$$

$$\frac{\sigma}{E_{\overline{\nu}}} = \frac{2G^2 m_e}{3\pi}(g_V^2 + g_A^2 - g_V g_A)$$

「ミューオン崩壊」での結合定数の値 $G = 1.16637 \times 10^{-5}(\mathrm{GeV}^{-2})$ と電子の質量 0.511(MeV) を使って

$$G^2 m_e = 6.95 \times 10^{-14}(\mathrm{GeV}^{-3})$$

次元を合わすために

$$1(\mathrm{cm}) = 5.07 \times 10^{13}(\mathrm{GeV}^{-1})$$

を使って

$$G^2 m_e = \frac{6.95 \times 10^{-14}}{(5.07 \times 10^{13})^2} = 2.70 \times 10^{-41}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{GeV})$$

よって、実験値との比較から

$$g_V^2 + g_A^2 + g_V g_A = 0.252$$

$$g_V^2 + g_A^2 - g_V g_A = 0.226$$

という値になります。この 2 つを見れば、$\pm g_V g_A$ の影響は小さいと考えられるので、g_V か g_A どちらかがかなり小さい値です。実験的には

$$g_V = 0.043\ ,\ g_A = -0.545$$

この辺りが良い値になっています。なので、電子の中性カレントは $V - A$ 型でなく A の寄与がが優勢になっています。