QED の散乱計算〜電子-電子散乱〜

QED の散乱の例として電子-電子散乱を使います。
電子-電子散乱の確率振幅までの話なので、続きは QED の「電子-電子、電子-陽電子散乱」を見てください。また、ファインマン則は「経路積分〜QED の摂動展開〜」や QED の「ファインマン則」を見てください。
最初に電磁場の伝播関数を求めています。

電磁場の伝播関数を求めます。ベクトルポテンシャル A^μ の展開は

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)(a(\boldsymbol{k},\lambda)e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)e^{ikx}) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)$$

ϵ_μ は偏極ベクトル、$a^\dagger, a$ は生成、消滅演算子です。電磁場なので $E_{\boldsymbol{k}} = k_0 = |\boldsymbol{k}|$ です。$A_\mu^{(\pm)}$ の交換関係は

$$\begin{aligned}
[A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(-)}(y)] &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_1}} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_2}} \\
&\quad \times \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)(a(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)a^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2) - a^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)a(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1))e^{-ik_1x}e^{ik_2y} \\
&= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_1}} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_2}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{3} \\
&\quad \times \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)[a(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), a^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)]e^{-ik_1x}e^{ik_2y} \\
&= -\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_1}} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_2}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{3} \\
&\quad \times \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2) 2E_{\boldsymbol{k}_2}(2\pi)^3 g_{\lambda_1\lambda_2}\delta^3(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)e^{-ik_1x}e^{ik_2y} \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} e^{-ik(x-y)} \sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)
\end{aligned}$$

生成、消滅演算子の交換関係は

$$[a(\boldsymbol{k},\lambda), a^\dagger(\boldsymbol{k}',\lambda')] = -2k_0(2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

同じように、並びを変えたときでは

$$\begin{aligned}
&[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(y)] \\
&= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_1}} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}_2}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2=0}^{3} \epsilon_\mu(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)[a^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), a(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)]e^{ik_1x}e^{-ik_2y} \\
&= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}} e^{ik(x-y)} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)
\end{aligned}$$

これらは

$$
\begin{aligned}
A_\mu(x)A_\nu(y) &= (A_\mu^{(+)}(x)+A_\mu^{(-)}(x))(A_\mu^{(+)}(y)+A_\mu^{(-)}(y)) \\
&= A_\mu^{(+)}(x)A_\mu^{(+)}(y)+A_\mu^{(-)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+A_\mu^{(+)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+A_\mu^{(-)}(x)A_\mu^{(+)}(y) \\
&= A_\mu^{(+)}(x)A_\mu^{(+)}(y)+A_\mu^{(-)}(x)A_\mu^{(-)}(y)+A_\mu^{(-)}(x)A_\mu^{(+)}(y)+A_\nu^{(-)}(y)A_\mu^{(+)}(x)+[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)] \\
&= :A_\mu(x)A_\nu(y):+[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]
\end{aligned}
$$

「: :」は正規積です。真空で挟むと

$$
\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = [A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]
$$

同様に

$$
\langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle = [A_\nu^{(+)}(y),A_\mu^{(-)}(x)]
$$

伝播関数は $A_\mu(x)A_\nu(y)$ の時間順序積を真空で挟んだものなので

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle &= \Theta(x_0-y_0)\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle+\Theta(y_0-x_0)\langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle \\
&= \Theta(x_0-y_0)[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]+\Theta(y_0-x_0)[A_\nu^{(+)}(y),A_\mu^{(-)}(x)] \\
&= \Theta(x_0-y_0)[A_\mu^{(+)}(x),A_\nu^{(-)}(y)]-\Theta(y_0-x_0)[A_\mu^{(-)}(x),A_\nu^{(+)}(y)] \\
&= -\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}\sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)(\Theta(x_0-y_0)e^{-ik(x-y)}+\Theta(y_0-x_0)e^{ik(x-y)}) \\
&= -\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}g_{\mu\nu}(\Theta(x_0-y_0)e^{-ik_0(x_0-y_0)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+\Theta(y_0-x_0)e^{ik_0(x_0-y_0)}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})
\end{aligned}
$$

Θ は階段関数です。偏極ベクトル部分は

$$
\sum_{\lambda=0}^{3}g_{\lambda\lambda}\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)\epsilon_\nu(\boldsymbol{k},\lambda)=g_{\mu\nu}
$$

を使っています (「マクスウェル方程式」参照)。3 次元の全空間積分なので片方の $\boldsymbol{k}$ の符号を反転させて

$$
\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = -\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}g_{\mu\nu}(\Theta(x_0-y_0)e^{-ik_0(x_0-y_0)}+\Theta(y_0-x_0)e^{ik_0(x_0-y_0)})
$$

階段関数部分は

$$\Theta(x_0-y_0)e^{-ik_0(x_0-y_0)} = -\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-i(z+k_0)(x_0-y_0)}}{z+i\epsilon} = -\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{-iz'(x_0-y_0)}}{z'-k_0+i\epsilon}$$

$$\Theta(y_0-x_0)e^{ik_0(x_0-y_0)} = \frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{i(z-k_0)(y_0-x_0)}}{z-i\epsilon} = \frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{-iz'(x_0-y_0)}}{z'+k_0-i\epsilon}$$

なので

$$\begin{aligned}
&\Theta(x_0-y_0)e^{-ik_0(x_0-y_0)} + \Theta(y_0-x_0)e^{ik_0(x_0-y_0)} \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz(x_0-y_0)}\left(\frac{1}{z-k_0+i\epsilon} - \frac{1}{z+k_0-i\epsilon}\right) \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz(x_0-y_0)}\frac{2(k_0-i\epsilon)}{z^2-(k_0-i\epsilon)^2} \\
&= i\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2\pi}e^{-iz(x_0-y_0)}\frac{2E_{\boldsymbol{k}}}{z^2-|\boldsymbol{k}|^2+i\epsilon} \qquad (k_0=|\boldsymbol{k}|=E_{\boldsymbol{k}})
\end{aligned}$$

分子の ϵ は影響がないので 0 にし、分母の $ik_0\epsilon$ は $k_0>0$ なので $k_0\epsilon$ を ϵ としています。よって、z を新しく k_0 に置き換えれば、電磁場の伝播関数 $D_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(x,y) = \langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2\pi}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{k}}}e^{-iz(x_0-y_0)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\frac{2ig_{\mu\nu}E_{\boldsymbol{k}}}{z^2-|\boldsymbol{k}|^2+i\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\mu\nu}}{k_0^2-|\boldsymbol{k}|^2+i\epsilon}e^{-ik_0(x_0-y_0)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}
\end{aligned}$$

と求まります。

QED の S 行列の摂動展開で、1 次の寄与が無視されることから見ていきます。QED での相互作用項は

$$H_{int} = \int d^3x\mathcal{H}_{int} = g\int d^3x\ \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)$$

g は電荷で、電子を考えるなら $g=-e$ です。S 行列の展開は

$$\begin{aligned}
S &= 1+(-i)\int d^4x\mathrm{T}[\mathcal{H}_{int}] + \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4xd^4y\mathrm{T}[\mathcal{H}_{int}(x)\mathcal{H}_{int}(y)] + \cdots \\
&= 1+(-ig)\int d^4x\mathrm{T}[:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x):] \\
&\quad + \frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4xd^4y\mathrm{T}[:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)::\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)A^\nu(y):] + \cdots \\
&= 1+S^{(1)}+S^{(2)}+\cdots
\end{aligned}$$

1 次の項では全て同じ時間なので、時間順序積は意味がなく

$$S^{(1)} = -ig \int d^4x : \overline{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) :$$

場の演算子で消滅演算子を含む項を (+)、生成演算子を含む項を (−) として

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= (\overline{\psi}^{(+)} + \overline{\psi}^{(-)})\gamma^\mu(\psi^{(+)} + \psi^{(-)})(A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)}) \\
&= \overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(+)} + \overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(-)} + \overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(-)}A_\mu^{(+)} + \overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(-)}A_\mu^{(-)} \\
&\quad + \overline{\psi}^{(-)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(+)} + \overline{\psi}^{(-)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(-)} + \overline{\psi}^{(-)}\gamma^\mu\psi^{(-)}A_\mu^{(+)} + \overline{\psi}^{(-)}\gamma^\mu\psi^{(-)}A_\mu^{(-)}
\end{aligned} \tag{1}$$

ディラック場の展開は

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1}^{2} (a(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1}^{2} (b(\boldsymbol{p},s)\overline{v}(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p},s)\overline{u}(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}) = \overline{\psi}^{(+)}(x) + \overline{\psi}^{(-)}(x)$$

u, v はスピノール成分、s はスピン、$a^\dagger, a$ はフェルミオンの生成、消滅演算子、$b^\dagger, b$ は反フェルミオンの生成、消滅演算子です。生成、消滅演算子の反交換関係は

$$\{a(\boldsymbol{p},s), a^\dagger(\boldsymbol{q},r)\} = \{b(\boldsymbol{p},s), b^\dagger(\boldsymbol{q},r)\} = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$

電磁場と同じ記号を使っていますが、おそらく混乱しないと思います。

これらを使って、フェルミオンと反フェルミオンから光子への確率振幅を求めます。始状態がフェルミオンと反フェルミオン、終状態が 1 個の光子なので、始状態のフェルミオン、反フェルミオンを作る生成演算子との反交換関係を作るための消滅演算子と、終状態の光子と交換関係を作るための生成演算子がいないと 0 になります。なので、条件に合うのは (1) の 8 個の中の 1 個だけで

$$\begin{aligned}
:\overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(-)}: &\Rightarrow A_\mu^{(-)}\overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)e^{ikx} \\
&\quad \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{p}}} \sum_{s=1}^{2} b(\boldsymbol{p},s)\overline{v}(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx}\gamma^\mu \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_{\boldsymbol{q}}} \sum_{r=1}^{2} a(\boldsymbol{q},r)u(\boldsymbol{q},r)e^{-iqx}
\end{aligned}$$

フェルミオン f、反フェルミオン $\overline{f}$ による状態 $|f, \overline{f}\rangle$ を

$$|f(\boldsymbol{p}_1,s_1),\overline{f}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)b^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle$$

とすれば

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{p},s)a(\boldsymbol{q},r)|f(\boldsymbol{p}_1,s_1),\overline{f}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle &= b(\boldsymbol{p},s)a(\boldsymbol{q},r)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)b^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&= b(\boldsymbol{p},s)b^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)(\{a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1),a(\boldsymbol{q},r)\} - a^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)a(\boldsymbol{q},r))|0\rangle \\
&= -2E_{\boldsymbol{q}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q})\delta^{rs_1}b(\boldsymbol{p},s)b^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}}2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{q})\delta^3(\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p})\delta^{rs_1}\delta^{ss_2}|0\rangle
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(-)}|f(\boldsymbol{p}_1,s_1),\overline{f}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle \\
&\quad= \overline{v}(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-ip_2x}\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{-ip_1x}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)a_\lambda^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)e^{ikx}|0\rangle \\
&\quad= \overline{v}(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-ip_2x}\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{-ip_1x}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon^\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{ikx}|\gamma(\boldsymbol{k},\lambda)\rangle
\end{aligned}$$

$\gamma(\boldsymbol{k},\lambda)$ は光子を表します。

終状態は光子にするので、それを $|\gamma(\boldsymbol{k}',\lambda')\rangle$ として

$$\begin{aligned}
&\langle\gamma(\boldsymbol{k}',\lambda')|S^{(1)}|f(\boldsymbol{p}_1,s_1),\overline{f}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle \\
&\quad= -ig\langle\gamma(\boldsymbol{k}',\lambda')|\int d^4x\overline{\psi}^{(+)}\gamma^\mu\psi^{(+)}A_\mu^{(-)}|f(\boldsymbol{p}_1,s_1),\overline{f}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle \\
&\quad= -ig\int d^4x\overline{v}(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-ip_2x}\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{-ip_1x}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0}\sum_{\lambda=0}^{3}\epsilon_\mu(\boldsymbol{k},\lambda)e^{ikx}\langle\gamma(\boldsymbol{k}',\lambda')|\gamma(\boldsymbol{k},\lambda)\rangle
\end{aligned}$$

確率振幅における終状態は観測される光子でなくてはいけないので、λ' は横偏極となる $1,2$ しか取れないです。このことを考慮すると

$$\begin{aligned}
\langle\gamma(\boldsymbol{k}',\lambda')|\gamma(\boldsymbol{k},\lambda)\rangle &= \langle 0|a(\boldsymbol{k}',\lambda')a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle \\
&= \langle 0|[a(\boldsymbol{k}',\lambda'),a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)] - a^\dagger(\boldsymbol{k},\lambda)a(\boldsymbol{k}',\lambda')|0\rangle \\
&= -2k_0(2\pi)^3 g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\langle 0|0\rangle \\
&\Rightarrow 2k_0(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')
\end{aligned}$$

よって、$\lambda' = 1, 2$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\gamma(\boldsymbol{k}', \lambda')|S^{(1)}|f(\boldsymbol{p}_1, s_1), \overline{f}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle &= \overline{v}(\boldsymbol{p}_1, s_1 s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\epsilon_\mu(\boldsymbol{k}', \lambda')\int d^4x e^{-i(p_1+p_2-k')x} \\ &= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k')\overline{v}(\boldsymbol{p}_1, s_1 s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\epsilon_\mu(\boldsymbol{k}', \lambda')\end{aligned}$$

ここで気が付くのが 4 元運動量の保存が $(p_1 + p_2 - k')_\mu = 0$ となっている点です。エネルギーと 3 次元運動量に分けて書けば

$$E_1 + E_2 = k^{0\prime}\ ,\ \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{k}' \quad (E_1 = p_1^0\ ,\ E_2 = p_2^0)$$

これらから

$$(p_1^\mu + p_2^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = (k_0')^2 - \boldsymbol{k}'$$

フェルミオンの質量を m とすれば

$$\begin{aligned}(E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \boldsymbol{p}_1^2 - \boldsymbol{p}_2^2 - 2\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 \\ &= \boldsymbol{p}_1^2 + m^2 + \boldsymbol{p}_2^2 + m^2 + 2E_1E_2 - \boldsymbol{p}_1^2 - \boldsymbol{p}_2^2 - 2\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 \\ &= 2m^2 + 2E_1E_2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|\cos\theta > 0 \quad (E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} > |\boldsymbol{p}|)\end{aligned}$$

このため

$$(k_0')^2 - \boldsymbol{k}' = k'^2 \neq 0$$

しかし、k_μ' は観測される光子の運動量なので $k'^2 = 0$ です。というわけで、デルタ関数による保存則は現実の光子に対応していません。他にも $\overline{\psi}^{(-)}\gamma^\mu\psi^{(-)}A_\mu^{(+)}$ では光子からフェルミオンと反フェルミオンへの確率振幅として作れますが、これも同様に保存則が成立しません。このように、$\overline{\psi}, \psi, A_\mu$ による組み合わせは式としては作れますが、現実の粒子を記述しないので、QED では 1 次の寄与は無視されます。

　というわけで、電子-電子散乱の 2 次の寄与を求めます。2 次での時間順序積はウィックの定理から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}[:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)A^\nu(y):] = \ & :\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)A^\mu(x)A^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)\overbracket{A^\mu(x)A}^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\,\overbracket{\psi(x)\overline{\psi}(y)}\,\gamma_\nu\psi(y)A^\mu(x)A^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}\overbracket{(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu}\psi(y)A^\mu(x)A^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}\overbracket{(x)\gamma_\mu\overbracket{\psi(x)\overline{\psi}(y)}\gamma_\nu}\psi(y)A^\mu(x)A^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}\overbracket{(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu}\psi(y)\overbracket{A^\mu(x)A}^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\overbracket{\psi(x)\overline{\psi}(y)}\gamma_\nu\psi(y)\overbracket{A^\mu(x)A}^\nu(y): \\
& + :\overline{\psi}\overbracket{(x)\gamma_\mu\overbracket{\psi(x)\overline{\psi}(y)}\gamma_\nu}\psi(y)\overbracket{A^\mu(x)A}^\nu(y):.
\end{aligned}
$$

運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ電子を $e(\boldsymbol{p},r)$ として、始状態を $|e(\boldsymbol{p}_1,r_1),e(\boldsymbol{p}_2,r_2)\rangle$、終状態を $|e(\boldsymbol{p}'_1,r'_1),e(\boldsymbol{p}'_2,r'_2)\rangle$ とします。電子がそれぞれ 2 個いるので、$S^{(2)}$ において $A_\mu A_\nu$ は縮約を取り、$\overline{\psi},\psi,\overline{\psi},\psi$ はそのままになっている項でないと 0 になります。というわけで

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}'_1,r'_1),e(\boldsymbol{p}'_2,r'_2)|S^{(2)}|e(\boldsymbol{p}_1,r_1),e(\boldsymbol{p}_2,r_2)\rangle \\
&= \frac{(-ig)^2}{2!}\langle e(\boldsymbol{p}'_1,r'_1),e(\boldsymbol{p}'_2,r'_2)|\int d^4xd^4y\mathrm{T}[:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)::\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)A^\nu(y):]|e(\boldsymbol{p}_1,r_1),e(\boldsymbol{p}_2,r_2)\rangle \\
&= \frac{(-ig)^2}{2}\langle e(\boldsymbol{p}'_1,r'_1),e(\boldsymbol{p}'_2,r'_2)|\int d^4xd^4y:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y)\overbracket{A^\mu(x)A}^\nu(y):|e(\boldsymbol{p}_1,r_1),e(\boldsymbol{p}_2,r_2)\rangle \\
&= \frac{(-ig)^2}{2}\int d^4xd^4yD^{\mu\nu}(x,y)\langle e(\boldsymbol{p}'_1,r'_1),e(\boldsymbol{p}'_2,r'_2))|:\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y):|e(\boldsymbol{p}_1,r_1),e(\boldsymbol{p}_2,r_2)\rangle
\end{aligned}
$$

フェルミオン部分は

$$
\overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\overline{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2 = (\overline{\psi}_1^{(+)}+\overline{\psi}_1^{(-)})\gamma_\mu(\psi_1^{(+)}+\psi_1^{(-)})(\overline{\psi}_2^{(+)}+\overline{\psi}_2^{(-)})\gamma_\nu(\psi_2^{(+)}+\psi_2^{(-)})
$$

$\psi(x)$ を ψ_1、$\psi(y)$ を ψ_2 としています。$b^\dagger,b$ は陽電子 (電子の反粒子) の生成、消滅演算子なので、電子の状態で挟めばそれらの項は 0 になります。このため、$\psi^{(+)}$ と $\overline{\psi}^{(-)}$ だけを含む項を残して

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\psi}_1^{(+)}+\overline{\psi}_1^{(-)})\gamma_\mu(\psi_1^{(+)}+\psi_1^{(-)})(\overline{\psi}_2^{(+)}+\overline{\psi}_2^{(-)})\gamma_\nu(\psi_2^{(+)}+\psi_2^{(-)}) \\
&\Rightarrow \overline{\psi}_1^{(-)}\gamma_\mu\psi_1^{(+)}\overline{\psi}_2^{(-)}\gamma_\nu\psi_2^{(+)} \\
&= \int\frac{d^3q_1d^3q_2d^3q_3d^3q_4}{(2\pi)^{12}}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_1}}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_2}}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_3}}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_4}}\sum_{s_1,s_2,s_3,s_4=1}^{2}e^{iq_1x}e^{-iq_2x}e^{iq_3y}e^{-iq_4y} \\
&\quad\times\overline{u}(\boldsymbol{q}_1,s_1)\gamma_\mu u(\boldsymbol{q}_2,s_2)\overline{u}(\boldsymbol{q}_3,s_3)\gamma_\nu u(\boldsymbol{q}_4,s_4)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1,s_1)a(\boldsymbol{q}_2,s_2)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3,s_3)a(\boldsymbol{q}_4,s_4)
\end{aligned}
$$

正規積を取るので

$$a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_4) \;\Rightarrow\; -a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_4)$$

となります。煩わしいのでスピンの表記は省きます。
$a|0\rangle = 0,\ \langle 0|a^\dagger = 0$ なので、生成演算子は終状態、消滅演算子は始状態に作用させます。そうすると

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_4)|e(\boldsymbol{p}_1), e(\boldsymbol{p}_2)\rangle &= a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle \\
&= a(\boldsymbol{q}_2)(\{a(\boldsymbol{q}_4), a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\} - a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_4))a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle \\
&= a(\boldsymbol{q}_2)(2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1) - a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_4))a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle - a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle
\end{aligned}$$

本来はスピンによる δ_{sr} がいますが、デルタ関数で判別できるので後で付け足せばいいです。第 1 項は

$$\begin{aligned}
2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle &= 2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1)(\{a(\boldsymbol{q}_2), a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\} - a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{q}_2))|0\rangle \\
&= (2E_{\boldsymbol{q}_4})(2E_{\boldsymbol{q}_2})(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_2)|0\rangle
\end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle &= a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)(\{a(\boldsymbol{q}_4), a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\} - a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{q}_4))|0\rangle \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{q}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)|0\rangle \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_4}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_2)(\{a(\boldsymbol{q}_2), a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\} - a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_2)|0\rangle \\
&= (2E_{\boldsymbol{q}_4})(2E_{\boldsymbol{q}_2})(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_1)|0\rangle
\end{aligned}$$

となるので

$$a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_4)|e(\boldsymbol{p}_1), e(\boldsymbol{p}_2)\rangle = (2E_{\boldsymbol{q}_4})(2E_{\boldsymbol{q}_2})(2\pi)^6(\delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_2) - \delta^3(\boldsymbol{q}_4 - \boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_1))|0\rangle$$

終状態では

$$\begin{aligned}
\langle e(\boldsymbol{p}'_1), e(\boldsymbol{p}'_2)|a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) &= \langle 0|a(\boldsymbol{p}'_2)a(\boldsymbol{p}'_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) \\
&= \langle 0|a(\boldsymbol{p}'_2)(\{a(\boldsymbol{p}'_1), a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)\} - a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a(\boldsymbol{p}'_1))a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_1}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{p}'_1)\langle 0|a(\boldsymbol{p}'_2)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) - \langle 0|a(\boldsymbol{p}'_2)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a(\boldsymbol{p}'_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)
\end{aligned}$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
2E_{\boldsymbol{q}_1}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\langle 0|a(\boldsymbol{p}_2')a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) &= 2E_{\boldsymbol{q}_1}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\langle 0|(\{a(\boldsymbol{p}_2'),a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)\}-a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{p}_2')) \\
&= (2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_3})(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2')\langle 0|
\end{aligned}
$$

第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\langle 0|a(\boldsymbol{p}_2')a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a(\boldsymbol{p}_1')a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) &= \langle 0|(\{a(\boldsymbol{p}_2'),a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)\}-a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a(\boldsymbol{p}_2'))a(\boldsymbol{p}_1')a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_1}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\langle 0|a(\boldsymbol{p}_1')a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) \\
&= 2E_{\boldsymbol{q}_1}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\langle 0|(\{a(\boldsymbol{p}_1'),a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)\}-a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{p}_1')) \\
&= (2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_3})(2\pi)^6\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1')\langle 0|
\end{aligned}
$$

よって

$$
\langle e(\boldsymbol{p}_1'),e(\boldsymbol{p}_2')|a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3) = (2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_3})(2\pi)^6(\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2')-\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1'))\langle 0|
$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}_1'),e(\boldsymbol{p}_2')|a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_4)|e(\boldsymbol{p}_1),e(\boldsymbol{p}_2)\rangle \\
&\quad= (2\pi)^6\big((2E_{\boldsymbol{q}_4})(2E_{\boldsymbol{q}_2})\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_2)-(2E_{\boldsymbol{q}_4})(2E_{\boldsymbol{q}_2})\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_1)\big) \\
&\qquad\times\big((2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_3})\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2')-(2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_3})\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1')\big) \\
&\quad= (2E_{\boldsymbol{q}_1})(2E_{\boldsymbol{q}_2})(2E_{\boldsymbol{q}_3})(2E_{\boldsymbol{q}_3})(2\pi)^{12} \\
&\qquad\times\big(\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\quad+\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad-\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad-\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_2')\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1')\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)\big)
\end{aligned}
$$

$S^{(2)}$ において $2E$ と $(2\pi)^{12}$ は全て消え、デルタ関数は全て積分で消えるので (スピンのクロネッカーデルタは和から)

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}_1', r_1'), e(\boldsymbol{p}_2', r_2')| : \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\gamma_\nu\psi(y) : |e(\boldsymbol{p}_1, r_1), e(\boldsymbol{p}_2, r_2)\rangle \\
&= -\int \frac{d^3q_1 d^3q_2 d^3q_3 d^3q_4}{(2\pi)^{12}} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_1}} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_2}} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_3}} \frac{1}{2E_{\boldsymbol{q}_4}} \sum_{s_1,s_2,s_3,s_4=1}^{2} e^{iq_1x} e^{-iq_2x} e^{iq_3y} e^{-iq_4y} \\
&\qquad \times \overline{u}(\boldsymbol{q}_1, s_1)\gamma_\mu u(\boldsymbol{q}_2, s_2)\overline{u}(\boldsymbol{q}_3, s_3)\gamma_\nu u(\boldsymbol{q}_4, s_4) \\
&\qquad \times \langle e(\boldsymbol{p}_1', r_1'), e(\boldsymbol{p}_2', r_2')| a^\dagger(\boldsymbol{q}_1, s_1) a^\dagger(\boldsymbol{q}_3, s_3) a(\boldsymbol{q}_2, s_2) a(\boldsymbol{q}_4, s_4) |e(\boldsymbol{p}_1, r_1), e(\boldsymbol{p}_2, r_2)\rangle \\
&= -\big(e^{ip_1'x} e^{-ip_2x} e^{ip_2'y} e^{-ip_1y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')\gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2, r_2)\overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')\gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1, r_1) \\
&\qquad + e^{ip_2'x} e^{-ip_1x} e^{ip_1'y} e^{-ip_2y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')\gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1, r_1)\overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')\gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2, r_2) \\
&\qquad - e^{ip_1'x} e^{-ip_1x} e^{ip_2'y} e^{-ip_2y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')\gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1, r_1)\overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')\gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2, r_2) \\
&\qquad - e^{ip_2'x} e^{-ip_2x} e^{ip_1'y} e^{-ip_1y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')\gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2, r_2)\overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')\gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1, r_1)\big)
\end{aligned}
$$

u のスピンの表記を省きます。

後は $D^{\mu\nu}(x, y)$ をくっつけて x, y 積分をすればいいので

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}_1', r_1'), e(\boldsymbol{p}_2', r_2')) | S^{(2)} | e(\boldsymbol{p}_1, r_1), e(\boldsymbol{p}_2, r_2) \rangle \\
&\quad = \frac{(-ig)^2}{2} \int d^4x d^4y D^{\mu\nu}(x,y) \langle e(\boldsymbol{p}_1', r_1'), e(\boldsymbol{p}_2', r_2')) | : \overline{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x) \overline{\psi}(y) \gamma_\nu \psi(y) : | e(\boldsymbol{p}_1, r_1), e(\boldsymbol{p}_2, r_2) \rangle \\
&\quad = -\frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^{\mu\nu}(k) e^{-ik(x-y)} \\
&\qquad \times (e^{i(p_1'-p_2)x} e^{i(p_2'-p_1)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\quad + e^{i(p_2'-p_1)x} e^{i(p_1'-p_2)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - e^{i(p_1'-p_1)x} e^{i(p_2'-p_2)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - e^{i(p_2'-p_2)x} e^{i(p_1'-p_1)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1)) \\
&\quad = \frac{g^2}{2} \int d^4x d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^{\mu\nu}(k) \\
&\qquad \times (e^{i(p_1'-p_2-k)x} e^{i(p_2'-p_1+k)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\quad + e^{i(p_2'-p_1-k)x} e^{i(p_1'-p_2+k)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - e^{i(p_1'-p_1-k)x} e^{i(p_2'-p_2+k)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - e^{i(p_2'-p_2-k)x} e^{i(p_1'-p_1+k)y} \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1)) \\
&\quad = \frac{g^2}{2} (2\pi)^4 \int d^4k D^{\mu\nu}(k) \\
&\qquad \times (\delta^4(p_1'-p_2-k) \delta^4(p_2'-p_1+k) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\quad + \delta^4(p_2'-p_1-k) \delta^4(p_1'-p_2+k) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - \delta^4(p_1'-p_1-k) \delta^4(p_2'-p_2+k) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\quad - \delta^4(p_2'-p_2-k) \delta^4(p_1'-p_1+k) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1)) \\
&\quad = \frac{g^2}{2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2) \\
&\qquad \times (\overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1) D^{\mu\nu}(p_1'-p_2) \\
&\qquad\quad + \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) D^{\mu\nu}(-p_1'+p_2) \\
&\qquad\quad - \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_1) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_2) D^{\mu\nu}(p_1'-p_1) \\
&\qquad\quad - \overline{u}(\boldsymbol{p}_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1) D^{\mu\nu}(-p_1'+p_1))
\end{aligned}
$$

デルタ関数は 4 元運動量保存 $(p_1'+p_2')_\mu = (p_1+p_2)_\mu$ です。$D^{\mu\nu}(k)$ は k^2 に依存しているので

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}_1', r_1'), e(\boldsymbol{p}_2', r_2') | S^{(2)} | e(\boldsymbol{p}_1, r_1), e(\boldsymbol{p}_2, r_2) \rangle \\
&\quad = g^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1'+p_2'-p_1-p_2) (-\overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2, r_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1, r_1) D^{\mu\nu}(p_1'-p_1) \\
&\qquad + \overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1') \gamma_\mu u(\boldsymbol{p}_2, r_2) \overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2') \gamma_\nu u(\boldsymbol{p}_1, r_1) D^{\mu\nu}(p_1'-p_2))
\end{aligned}
$$

括弧部分をファインマン則に対応した書き方にすれば

$$\overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')(ig\gamma_\mu)u(\boldsymbol{p}_2, r_2)D^{\mu\nu}(p_1' - p_1)\overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')(ig\gamma_\nu)u(\boldsymbol{p}_1, r_1)$$
$$- \overline{u}(\boldsymbol{p}_2', r_2')(ig\gamma_\mu)u(\boldsymbol{p}_1, r_1)D^{\mu\nu}(p_1' - p_2)\overline{u}(\boldsymbol{p}_1', r_1')(ig\gamma_\nu)u(\boldsymbol{p}_2, r_2)$$

電子は区別できないために、散乱後の電子を入れ替えた図が足されています。後は QED での「電子-電子、電子-陽電子散乱」と同じです。