

有効ポテンシャルのゲージ依存性

よく見るヒッグス機構の説明からは特に気にする必要が出てこない、真空と物理量のゲージ依存性を調べます。このためには有効ポテンシャルのゲージ依存性といった場の量子論の厄介な性質が関わってきます。このことは「背景場の方法」でも触れています。

ここではスカラー場と電磁場によるヒッグス機構を使って、有効ポテンシャルのゲージパラメータ依存性を表す Nielsen 恒等式を導きます。それによって有効ポテンシャルのゲージパラメータ依存性と、物理量の例としてヒッグス質量のゲージパラメータ依存性を見ます。

最初に「自発的対称性の破れ」での話を繰り返しておきます。使うラグランジアンは電磁場と相互作用している複素スカラー場による

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi(x))(D^\mu \phi(x))^* + m^2 \phi^*(x)\phi(x) - \lambda(\phi^*(x)\phi(x))^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

ゲージ変換に対する対称性を破らせるために質量項の部号は反転させています ($m^2 > 0$)。 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) + i\chi(x))$$

このように実部と虚部に分けて (「自発的対称性の破れ」では ϕ_1, ϕ_2 としましたが、ここでは式変形をかなり行っていくのでこうした方が多分見やすいです)、第一項を展開すると

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi(x))(D^\mu \phi(x))^* &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^* \\ &= \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + e^2 A_\mu A^\mu \phi \phi^* - (\partial_\mu \phi) ieA^\mu \phi^* + ieA_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) ieA^\mu \sigma - \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) ieA^\mu \chi \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) eA^\mu \chi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) eA^\mu \sigma + \frac{1}{2} ieA_\mu \sigma (\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} ieA_\mu \chi (\partial^\mu \chi) + \frac{1}{2} eA_\mu \sigma (\partial^\mu \chi) - \frac{1}{2} eA_\mu \chi (\partial^\mu \sigma) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) - (\partial_\mu \sigma) eA^\mu \chi + (\partial_\mu \chi) eA^\mu \sigma \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} e^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) + eA^\mu (\sigma \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \sigma) \end{aligned}$$

他の項も展開すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) \\ &\quad + eA^\mu (\sigma \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$\sigma(x)$ と $\chi(x)$ に対する運動方程式は、オイラー・ラグランジュ方程式から

$$[\square - m^2 + \lambda(\sigma^2(x) + \chi^2(x))]\sigma(x) = 0$$

$$[\square - m^2 + \lambda(\sigma^2(x) + \chi^2(x))]\chi(x) = 0$$

このときの量子効果のないラグランジアンレベルでのポテンシャル (古典的ポテンシャル)

$$V = -\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2$$

の最小値は σ と χ の座標において (σ と χ の x 依存性は無視して)

$$\sigma^2 + \chi^2 = \frac{m^2}{\lambda}$$

で与えられ、 $V = 0$ でなく、このときの V が本当の真空となります。なので、 σ と χ に対する真空期待値はこの式を満たす地点で与えられます。そして、簡単な形として

$$\sigma = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \chi = 0$$

というのがよく選ばれます。よって、真空期待値は

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}, \langle 0|\chi|0\rangle = 0$$

と与えられます。

この後に真空期待値からのズレ

$$\sigma(x) \Rightarrow v + \sigma(x)$$

$$\chi(x) \Rightarrow \chi(x)$$

$$(\phi(x) \Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x) + i\chi(x)))$$

を考えていくんですが、その計算において

$$\begin{aligned} \phi &\Rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma)e^{-i\chi/v}e^{i\chi/v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma) \quad (\alpha(x) = -\frac{\chi(x)}{v}) \\ A_\mu &\Rightarrow A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\chi(x) \end{aligned}$$

というゲージ変換を行います (ユニタリーゲージ)。このゲージ変換は非物理的な自由度である $\chi(x)$ を消すように作られています。ラグランジアンにおいて

$$\chi(x) = 0$$

となるゲージを選んで見ると見ることができます。つまり、ユニタリーゲージでは、ラグランジアンに非物理的な場が出てこないことになっています。

ここまでは「自発的対称性の破れ」で見た話です。ここから本題に移っていきます。今見てきたラグランジアンではゲージ場に対して、まだ加えるべき項があることが分かります。つまり、ゲージ固定項とゴースト項です。この二つはラグランジアンに

$$\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{ghost} = -\frac{1}{2\xi}F^2 - \bar{c}Mc$$

のように入ってきます。ξ はゲージパラメータ、F はゲージ条件の式、c, $\bar{c}$ はゴースト、反ゴースト場です。ゲージ条件の式は

$$F = \partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi(x) \quad (2)$$

と選ぶことにします。A_μ(x) と ϕ(x) に対するゲージ変換を

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x)$$

$$\phi'(x) = e^{ie\Lambda(x)}\phi(x)$$

と定義すると、σ と χ に対しては

$$\sigma' + i\chi' = e^{ie\Lambda(x)}(\sigma + i\chi) = \sigma + i\chi + ie\Lambda(x)\sigma - e\Lambda(x)\chi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma' &= \sigma - e\Lambda(x)\chi \\ \chi' &= \chi + e\Lambda(x)\sigma \end{cases} \quad (3)$$

となっていることが分かります。そうすると F の部分は

$$\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi(x) \Rightarrow \partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi(x) - \partial_\mu \Lambda - \xi e^2 v \Lambda(x)$$

と変換されることから M は

$$M = \frac{\delta F}{\delta \Lambda} = \frac{\delta(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi - \partial^\mu \partial_\mu \Lambda - \xi e^2 v \Lambda(x)\sigma)}{\delta \Lambda} = -\square - \xi e^2 v \sigma$$

よってゴースト項は

$$-\int d^4x_E \bar{c}(\square_E - \xi e^2 v \sigma)c = i \int d^4x \bar{c}(-\square - \xi e^2 v \sigma)c = -i \int d^4x \bar{c}(\square + \xi e^2 v \sigma)c$$

となって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{ghost} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)^2 - \bar{c}\square c - \xi e^2 v \sigma \bar{c}c \\ &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi e^2 v^2 \chi^2 + ev\chi\partial^\mu A_\mu + (\partial_\mu \bar{c})(\partial^\mu c) - \xi e^2 v \sigma \bar{c}c \end{aligned} \quad (4)$$

このゲージの取り方を R_ξ ゲージと呼んだりもします。

$\sigma(x)$ を基底からズラして $v + \sigma(x)$ とするなら

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi e^2 v^2 \chi^2 + ev\chi\partial^\mu A_\mu + (\partial_\mu \bar{c})(\partial^\mu c) - \xi e^2 v^2 \bar{c}c - \xi e^2 v\sigma \bar{c}c$$

となります。この式を見てみると、 χ^2 の項が存在し、さらにゴーストの項においても明らかに質量項 ($\xi e^2 v^2 \bar{c}c$) が出てきています ($\xi e^2 v\sigma \bar{c}c$ は場 σ があるから質量項とは無関係)。これらの項は (1) を基底からズラして変形させたものと足し合わせても消えずに残るので、場 χ とゴースト場に対する質量として

$$m_\chi^2 = m_{ghost}^2 = \xi e^2 v^2$$

このようなものが与えられます (χ は運動項が $\partial^\mu \chi \partial_\mu \chi / 2$ なので $1/2$ を外します)。これはゲージパラメータを無視すればベクトル場 A_μ に与えられる質量と同じです。これは非常に困る結果です。ゲージパラメータに依存するのは場 χ とゴースト場の非物理的なものだから問題ないだろうと考えることができますが、質量 0 の粒子が存在しないのは困る状況です。なぜなら、ゴールドストーンの定理と呼ばれる、連続的な対称性が破れるときには質量 0 の粒子が存在するというのに反するからです。しかし、これはゲージ場の量子化にまとり付き負のノルムのせいだと思えることができます。ゴールドストーンの定理は、ローレンツ不変なヒルベルト空間 (ノルムは正) で定義されているので、負のノルムが現れるゲージ場では状況が変わるという事ができます (ゲージ場ではローレンツ不変性と正のノルムを両立するのは無理)。というわけで、この問題は今は無関係です。

本題はゲージ固定項の存在のせいでラグランジアンにゲージパラメータが現れてしまっている点です。これがゲージパラメータ依存性が計算に残る原因となります。そうすると、ポテンシャルもゲージ依存しだすんじゃないかと予想できます。この予想を続けていけば、ポテンシャルの基底 (真空) がゲージ依存してしまい、その基底によって計算される質量もゲージ依存する可能性が出てきます。これは致命的です。なぜなら、観測可能な物理量はゲージ依存しないからです。一方では、この問題を逆向きに見て、物理量はゲージに依存するわけないから、どんなゲージで計算してもいいじゃないかと言うこともできます。理論の構造をあまり気にしない人はこの発想で十分なんだと思います。しかし、理論的な構造として本当に真空がゲージに依存していないのかを調べることは重要です。というわけで調べます。真空構造を調べるためには有効ポテンシャルが必要になるので、有効ポテンシャルがどのようにゲージパラメータに依存しているのかを見ていくことになります。

有効ポテンシャルのゲージ依存性がどうなっているのか調べていきます。(1) にゲージ固定項とゴースト項を足した全体のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) \\ & + eA^\mu(\sigma\partial_\mu \chi - \chi\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2 \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\xi e^2 v^2 \chi^2 + ev\chi\partial^\mu A_\mu + (\partial_\mu \bar{c})(\partial^\mu c) - \xi e^2 v^2 \bar{c}c - \xi e^2 v\sigma \bar{c}c \end{aligned}$$

このときの σ と χ による古典的ポテンシャルは (他の場は無視します)

$$V_0 = -\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2 + \frac{1}{2}\xi e^2 v^2 \chi^2$$

と与えられます。これは明らかにゲージパラメータに依存しています。というわけで、古典的な段階ですでにゲージパラメータ依存していることが簡単に分かります。

ここから有効ポテンシャルに持っていくんですが、非可換ゲージ場への拡張も考えて補助場を入れて、ゲージ固定項を補助場で表現します。ゲージ条件を

$$F = \partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi$$

このように取っているので、補助場によるゲージ固定項は

$$\mathcal{L}_{GF} = BF + \frac{\xi}{2} B^2 = B(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi) + \frac{\xi}{2} B^2 \quad (5)$$

と表現されます。 F はゲージ条件の式です。 B に対する運動方程式は

$$F + \xi B = \partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi + \xi B = 0$$

から

$$B = -\frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)$$

これを (5) にいれれば

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi) + \frac{\xi}{2} \frac{1}{\xi^2}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)^2 \\ &= -\frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)^2 \\ &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi)^2 \end{aligned}$$

となって (4) のゲージ固定項部分を再現します。よって補助場によるラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) \\ & + eA^\mu(\sigma\partial_\mu\chi - \chi\partial_\mu\sigma) + \frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu(\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2 \\ & + B\partial^\mu A_\mu - \xi ev\chi B + \frac{\xi}{2}B^2 + (\partial_\mu\bar{c})(\partial^\mu c) - \xi e^2 v\sigma\bar{c}c \end{aligned}$$

ここから生成汎関数を作るために、全ての場に対応する源をそれぞれ

$$J_\mu A^\mu + JB + K\sigma + L\chi + sc + u\bar{c}$$

このように加えます (ゴーストに対する源を「Slavnov-Taylor 恒等式」と同じようにいれています)。ここまでの基本的な設定です。ここから何をするのかというと、「Slavnov-Taylor 恒等式」と同じことを今の目的に合わせて行っていく。なんでそんなことをするのかというと、Slavnov-Taylor 恒等式は BRS 変換に対する不変性、つまり量子論的に一般化されたゲージ不変性に対する恒等式なので、ゲージパラメータ依存性を調べるには Slavnov-Taylor 恒等式と同じ手続きが必要になるためです。

Slavnov-Taylor 恒等式にはゲージパラメータの変化に対する関係式がないので、ゲージパラメータの微分に対してどのように変化するかを表す高等式に変更するように導きます。取り合えず「Slavnov-Taylor 恒等式」で行ったように BRS 変換に対応する源の項を加えます。可換ゲージ場 (電磁場) に対する BRS 変換による変化部分は

$$\delta_{BRS}A_\mu = -\epsilon(\partial_\mu c)$$

$$\delta_{BRS}\sigma = -e\epsilon\chi c$$

$$\delta_{BRS}\chi = e\epsilon\sigma c$$

$$\delta_{BRS}c = 0$$

$$\delta_{BRS}\bar{c} = -\epsilon B$$

$$\delta_{BRS}B = 0$$

このようになっていて、 ϵ はグラスマン数です (電磁場なので A_μ と $\bar{c}$ は g を $-e$ に置き換えた変換に変えています)。 σ と χ に対しては (3) において $\Lambda = -c\epsilon$ と置き換えればいいだけです。この BRS 変換によって出てくる組み合わせを源の項に組み込むために

$$M(-e\chi c) + Ne\sigma c$$

こんなのを作ります (M, N は源)。こうすれば源の汎関数微分によって BRS 変換による余計な項を取り出せます。ここまでは Slavnov-Taylor 恒等式と同じなので、このままだとゲージパラメータに関する変化を見ることができません。そのため、1 つ仮定をしてみます。現段階で BRS 変換して生成汎関数が不変になるということは

$$\int \mathcal{D}\Phi [J^{a\mu}\delta_{BRS}A_\mu^a + K\delta_{BRS}\sigma + L\delta_{BRS}\chi + s(\delta_{BRS}c) + u(\delta_{BRS}\bar{c})] \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{source}) \right] = 0$$

これが成立することに対応します。 M, N の項は δ_{BRS} のベキ零性によって消えます。この中にはゲージパラメータによって生成汎関数がどう動くのかということを教えてくれる項、つまりゲージパラメータによる微分項が存在しません。それを付け加えてやります。まず、ラグランジアン of ゲージパラメータによる変化はゲージパラメータで微分することで

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = -e v \chi B + \frac{1}{2} B^2 - e^2 v \sigma \bar{c} c \quad (6)$$

となっていることが分かります。これを源なしの生成汎関数の段階で考えれば

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = i \int \mathcal{D}\Phi \int d^4x (-e v \chi B + \frac{1}{2} B^2 - e^2 v \sigma \bar{c} c) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]$$

というように $\exp$ の外に出てきます。この外に出てきた部分を $\bar{O}$ としたときに、これが $\delta_{BRS}O = \epsilon \bar{O}$ となって出てきてくれれば、BRS 変換をしたときに $\exp$ の外に

$$J^{a\mu}\delta_{BRS}A_\mu^a + K\delta_{BRS}\sigma + L\delta_{BRS}\chi + s(\delta_{BRS}c) + u(\delta_{BRS}\bar{c}) + H\delta_{BRS}O \quad (7)$$

このような形で入ってくることになります (H は O に対応する源)。そうすれば、従来の Slavnov-Taylor 恒等式にゲージパラメータの変化に対応する項が入ってきます。

こんな $\delta_{BRS}O$ が存在しているのが問題ですが、ちゃんと存在していて

$$O = -\bar{c}(\frac{1}{2}B - e v \chi)$$

というのが相当します。実際に BRS 変換を行ってみると

$$\begin{aligned}
-\delta_{BRS}[\bar{c}(\frac{1}{2}B - ev\chi)] &= -\delta_{BRS}(\frac{1}{2}\bar{c}B - ev\bar{c}\chi) \\
&= -(\frac{1}{2}\delta_{BRS}\bar{c}B + \frac{1}{2}\bar{c}\delta_{BRS}B - ev\delta_{BRS}\bar{c}\chi - ev\bar{c}\delta_{BRS}\chi) \\
&= -(-\frac{1}{2}B^2\epsilon + \epsilon evB\chi - e^2v\bar{c}\epsilon\sigma c) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon B^2 - \epsilon evB\chi - \epsilon e^2v\sigma\bar{c}c
\end{aligned}$$

これは (6) と一致しています。

よって (7) を作るためには、源の項を

$$\mathcal{L}_{source} = J_\mu A^\mu + JB + K\sigma + L\chi + sc + u\bar{c} + M(-e\chi c) + N(e\sigma c) + H\bar{c}(-\frac{1}{2}B + ev\chi)$$

とすればいいことになり、生成汎関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{source}) \right]$$

Φ に全ての場をおしこめて定義しています。 Z が BRS 変換に対して不変だとするための恒等式を出します。 $\mathcal{L}$ は BRS 変換に対し不変なので、源の部分から

$$\delta_{BRS}\mathcal{L}_{source} = J_\mu\delta_{BRS}A^\mu + K\delta_{BRS}\sigma + L\delta_{BRS}\chi + u\delta_{BRS}\bar{c} + H\delta_{BRS}O$$

こんなふうに出てきます。よって

$$\int \mathcal{D}\Phi \int d^4x [J_\mu\delta_{BRS}A^\mu + K\delta_{BRS}\sigma + L\delta_{BRS}\chi + u\delta_{BRS}\bar{c} + H\delta_{BRS}O] \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{source}) \right] = 0$$

となって

$$\int \mathcal{D}\Phi \int d^4x H\delta_{BRS}O e^{iS} = - \int \mathcal{D}\Phi \int d^4x [J_\mu\delta_{BRS}A^\mu + K\delta_{BRS}\sigma + L\delta_{BRS}\chi + u\delta_{BRS}\bar{c}] e^{iS}$$

となります。ラグランジアン部分を iS と省略しています。右辺の BRS 変換部分は源による汎関数微分に変えると

$$\delta_{BRS}A_\mu = -\epsilon(\partial_\mu c) \Rightarrow -\epsilon\partial_\mu \frac{\delta}{i\delta S}$$

$$\delta_{BRS}\sigma = -\epsilon e\chi c \Rightarrow \epsilon \frac{\delta}{i\delta M}$$

$$\delta_{BRS}\chi = \epsilon e\sigma c \Rightarrow \epsilon \frac{\delta}{i\delta N}$$

$$\delta_{BRS}\bar{c} = -\epsilon B \Rightarrow -\epsilon \frac{\delta}{i\delta J}$$

となっているので、 $Z = e^{iW}$ に書きければ右辺は

$$\begin{aligned}
& - \int d^4x \epsilon \left[-J^\mu \partial_\mu \frac{\delta}{i\delta s} + K \frac{\delta}{i\delta M} + L \frac{\delta}{i\delta N} - u \frac{\delta}{i\delta J} \right] \int \mathcal{D}\Phi e^{iS} \\
& = - \int d^4x \epsilon \left[-J^\mu \partial_\mu \frac{\delta}{i\delta s} + K \frac{\delta}{i\delta M} + L \frac{\delta}{i\delta N} - u \frac{\delta}{i\delta J} \right] e^{iW} \\
& = - \int d^4x \epsilon \left[-J^\mu \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta s} + K \frac{\delta W}{\delta M} + L \frac{\delta W}{\delta N} - u \frac{\delta W}{\delta J} \right] e^{iW}
\end{aligned}$$

左辺は

$$\int \mathcal{D}\Phi \int d^4x H \delta_{BRS} O e^{iS} = \epsilon \int \mathcal{D}\Phi \int d^4x H \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} e^{iS}$$

よって

$$\int \mathcal{D}\Phi \int d^4x H \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} e^{iS} = - \int d^4x \left[-J^\mu \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta s} + K \frac{\delta W}{\delta M} + L \frac{\delta W}{\delta N} - u \frac{\delta W}{\delta J} \right] e^{iW}$$

ここでルジャンドル変換から有効作用 Γ を

$$\Gamma[A, B, \sigma, \chi, c, \bar{c}; M, N, H] = W[J_\mu, J, K, L, s, u, M, N, H] - \int d^4x (J^\mu A_\mu + JB + K\sigma + L\chi + sc + u\bar{c})$$

と作ります。 M, N, H は計算を簡単にするために付け加えたものなので変換に組み込みません。これらは

$$\frac{\delta W}{\delta J^\mu} = A_\mu, \quad \frac{\delta W}{\delta J} = B, \quad \frac{\delta W}{\delta K} = \sigma, \quad \frac{\delta W}{\delta L} = \chi, \quad \frac{\delta W}{\delta s} = c, \quad \frac{\delta W}{\delta u} = \bar{c}$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} = -J_\mu, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta B} = -J, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma} = -K, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi} = -L, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta c} = s, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} = u$$

ここで出てきている場 $A_\mu, B, \sigma, \chi, c, \bar{c}$ は全て源ありでの真空期待値として定義されるもので、ゲージパラメータに依存しています。さらに M, N, H に関しては

$$\frac{\delta W}{\delta M} = \frac{\delta \Gamma}{\delta M}, \quad \frac{\delta W}{\delta N} = \frac{\delta \Gamma}{\delta N}, \quad \frac{\delta W}{\delta H} = \frac{\delta \Gamma}{\delta H}$$

これらの関係を使って Γ の式に変えると

$$\int \mathcal{D}\Phi \int d^4x H \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} e^{iS} = - \int d^4x \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \partial_\mu c - \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma} \frac{\delta \Gamma}{\delta M} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi} \frac{\delta \Gamma}{\delta N} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} B \right) e^{iW}$$

左辺の H をなくするために H で汎関数微分して $H = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} e^{iS} = & - \int d^4x \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta A^\mu(x)} \partial_\mu c - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \sigma(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta M(x)} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} \right. \\
& \left. - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \chi(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta N(x)} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \right) e^{iW}
\end{aligned}$$

このとき左辺は

$$\frac{\partial}{\partial \xi} e^{iW} = \frac{\partial}{\partial \xi} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS} = \int \mathcal{D}\Phi \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} e^{iS}$$

とできるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} = \int d^4x d^4y \Big(& -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta A^\mu(x)} \partial_\mu c + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \sigma(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta M(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} \\ & + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \chi(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta N(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \Big) \end{aligned}$$

表記しませんが右辺は汎関数微分の後で $H = 0$ とします。さらに W と Γ に関する ξ の微分は同じだと考えてしまえるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \int d^4x d^4y \Big(& -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta A^\mu(x)} \partial_\mu c + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \sigma(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta M(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} \\ & + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \chi(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta N(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \Big) \end{aligned}$$

となって、ゲージパラメータの変化に対して有効作用がどのように動くのかを表す式が導けます。この式のことを Nielsen 恒等式と呼びます。この恒等式は v がゲージパラメータに依存しないとして導出されていることには注意してください。しかし、このことは Nielsen 恒等式が成立しているなら v はゲージパラメータに依存していないと言う事もできます。

第二項、第四項、第六項は W の式にまで戻すと

$$K \frac{\delta W}{\delta M}, L \frac{\delta W}{\delta N}, u \frac{\delta W}{\delta J}$$

これの K, L, U を H で汎関数微分した場合に対応するため、源はそれぞれ独立だということから、 K, L, u への H による汎関数微分は消えることになります (第二項と第四項はゴースト数の保存の観点からも消える)。なので、第二項、第四項、第六項は消えますが、第六項だけは少し残しておいて

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \int d^4x d^4y \Big(-\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta A^\mu(x)} \partial_\mu c + \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \Big)$$

さらに場 $A_\mu, c, \bar{c}$ の真空期待値が 0 だとすれば ($H, M, N = 0$ としますが、 σ と χ は 0 にならないとします)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = \int d^4x d^4y \Big(\frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \chi(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \Big)$$

そして、残った場の真空期待値は定数だとして、並進不変性を持たせることで有効ポテンシャル $V = -\Omega_4^{-1} \Gamma$ に対する式となって

$$\begin{aligned}
-\Omega_4 \frac{\partial V(\sigma_c, \chi_c, \xi)}{\partial \xi} &= \int d^4x d^4y \left(-\Omega_4 \frac{\partial V(\sigma_c, \chi_c, \xi)}{\partial \sigma} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta M(x)} \right. \\
&\quad \left. - \Omega_4 \frac{\partial V(\sigma_c, \chi_c, \xi)}{\partial \chi} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta N(x)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B \right) \\
\frac{\partial V(\Phi, \xi)}{\partial \xi} &= -C_i(\Phi, \xi) \frac{\partial V(\Phi, \xi)}{\partial \Phi_i} - \Omega_4^{-1} \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(y) \delta \bar{c}(x)} B
\end{aligned} \tag{8}$$

がえられます。\$C_i, \Phi_i\$ は

$$\Phi_1 = \sigma_c, \quad \Phi_2 = \chi_c$$

$$C_i(\Phi, \xi) = - \int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(x) \delta F_i(0)} \quad (F_1 = M, \quad F_2 = N)$$

としています。

有効ポテンシャルの式の第三項の \$B\$ を運動方程式から

$$B = -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu A_\mu - \xi e v \chi)$$

と置き換えてみると、\$A_\mu\$ を 0 とすることから

$$B = e v \chi$$

となります。これと古典的なポテンシャル

$$V_0 = -\frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \chi^2)^2 + \frac{1}{2}\xi e^2 v^2 \chi^2$$

を比べてみると、\$v\chi = 0\$ なら古典的なポテンシャルはゲージパラメータ依存しなくなることが分かり、このように取ることで古典的なポテンシャルにおいて非物理的な部分をなくせます。

このことはもっと形式的な解析との比較から \$v\chi = 0\$ が要求されることが分かります。真空がゲージパラメータに対して独立だとすれば、有効ポテンシャルの最小値 \$V_{min}\$ は

$$V_{min} = V(\bar{\phi} + \delta\bar{\phi}, \xi + \delta\xi) = V(\bar{\phi}, \xi) \tag{9}$$

であることが要求されます。ここでの \$\bar{\phi}\$ は

$$\frac{\partial V(\phi, \xi)}{\partial \phi} = 0$$

を満たすものです。\$V\$ がゲージパラメータ依存しているなら当然 \$\bar{\phi}\$ もゲージパラメータ依存しているはずなので

$$\delta\bar{\phi} = \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} d\xi$$

となっているので、\$V(\bar{\phi} + \delta\bar{\phi}, \xi + \delta\xi)\$ は

$$V(\bar{\phi}, \xi) + \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}})_\xi \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} d\xi + \frac{\partial V}{\partial \xi})_{\bar{\phi}} d\xi$$

とかけることから、(9) は

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}})_\xi \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi})_{\bar{\phi}} = 0$$

であることを要求してきます。 $\partial V / \partial \bar{\phi} = 0$ を踏まえれば

$$\frac{\partial V}{\partial \xi})_{\bar{\phi}} = 0$$

となり、 V_{min} はゲージパラメータに依存していないことを表す式になります。これを V_{min} に対するものに限定しなければ

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -C(\phi, \xi) \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (10)$$

と書いて、(8) において右辺第二項がない格好になります。この式は V_{min} がゲージパラメータ独立になるように作られているので、(8) において右辺第二項が消えることは、真空がゲージパラメータ独立であるために必要な条件なのだと分かり、今の場合 $v_\chi = 0$ となることがその条件です。

よって、 B の項は、計算上とゲージパラメータ独立性の観点から 0 になるべきなので、(8) は

$$\frac{\partial V(\Phi, \xi)}{\partial \xi} = -C_i(\Phi, \xi) \frac{\delta V(\Phi, \xi)}{\delta \Phi_i}$$

となります。さらに C_i を

$$C(\Phi, \xi) = - \int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(x) \delta M(0)}$$

として、 N の汎関数微分を含んでいるところは無視します。これは有効ポテンシャルをループ展開して計算するときにこの部分は寄与しないと考えられるからです。理由は、源において

$$N(e\sigma c) + H\bar{c}(-\frac{1}{2}B + ev\chi)$$

このようになっているために、図的に言えば源を結ぶ線が引けず切断したものしか出てこないからです。なので

$$\frac{\partial V(\sigma, \xi)}{\partial \xi} = -C(\sigma, \xi) \frac{\partial V(\sigma, \xi)}{\partial \sigma}$$

となります。これは明らかに (10) と同じ式です。このように Nielsen 恒等式は、有効ポテンシャルがその最小値でゲージ依存性を持たないとした単純な解析を再現します。なので

$$\frac{\partial V(\sigma, \xi)}{\partial \sigma} = 0$$

となる最小値で

$$\frac{\partial V(\sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0$$

よって有効ポテンシャルの最小値 (真空) はゲージパラメータ独立であることが確かめられたことになります (細かく言えば最小値だけでなく、極値でのゲージパラメータ独立性です)。

ここでの話はそのまま物理量に適用することができます。なぜなら (10) は物理量に対しても同じように成り立つからです。例えば、質量 m^2 が $\bar{\phi}$ となる真空において

$$m^2(\bar{\phi} + \delta\bar{\phi}, \xi + \delta\xi) = m^2(\bar{\phi}, \xi)$$

となっているとすれば、全く同じ話になって

$$\frac{\partial m^2}{\partial \xi} = -C(\phi, \xi) \frac{\partial m^2}{\partial \phi}$$

という式が出てくるからです。

Nielsen 恒等式で質量がどうなっているのか知りたければ、有効作用を場で汎関数微分して伝播関数を取り出せばいいです。ヒッグス場の質量のゲージパラメータ独立性を調べるなら、 σ で 2 回汎関数微分すればよくて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}} &= \int d^4 z_1 d^4 z_2 \frac{\delta^2}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(z_2) \delta M(z_1)} \right) \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}} \\ &= \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left(\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(z_2) \delta M(z_1)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(y) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta H(z_2) \delta M(z_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(y) \delta H(z_2) \delta M(z_1)} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y) \delta H(z_2) \delta M(z_1)} \right) \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}} \\ &= \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left(\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta H(z_2) \delta M(z_1)} + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(y) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta H(z_2) \delta M(z_1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(z_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \sigma(y) \delta H(z_2) \delta M(z_1)} \right) \Big|_{\sigma=\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (11)$$

σ 以外の真空期待値は 0 になっているとし、 $\bar{\sigma}$ は $\partial V / \partial \sigma = 0$ を満たすものだとします。この設定から σ の 1 回汎関数微分は消えます。このとき σ の厳密な伝播関数は

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} = G^{-1}(x, y; \sigma)$$

今は質量が知りたいので、運動量表示において

$$G^{-1}(p^2; \sigma) = p^2 - m_{phy}^2(\sigma, \xi)$$

のように物理的な質量を定義します。(11) を質量殻上 ($p^2 = m_{phy}^2$) で評価するなら $G^{-1}(p^2; \sigma)$ に微分や汎関数微分がかかっていない項は消えて

$$\frac{\partial G^{-1}(p^2; \sigma)}{\partial \xi} = -C(\sigma, \xi) \frac{\partial G^{-1}(p^2; \sigma)}{\partial \sigma}$$

このような式になります。これを質量の式にすれば、 $\partial V / \partial \sigma = 0$ となる $\bar{\sigma}$ において

$$\frac{\partial m_{phy}^2(\sigma, \xi)}{\partial \xi} = -C(\sigma, \xi) \frac{\partial m_{phy}^2(\sigma, \xi)}{\partial \sigma}$$

というようになります。これが

$$\frac{\partial m_{phy}^2(\sigma, \xi)}{\partial \xi} = 0 \quad (12)$$

となるためには微分方程式の性質から

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = C(\sigma, \xi) \quad (13)$$

を満たす解曲線上に $m_{phy}^2(\sigma, \xi)$ がいる必要があります。よって、ヒッグス質量がゲージパラメータ独立であるためには、このような解曲線上にすることが要求されます。このことは当然有効ポテンシャルにも言えて、(12) の解曲線上にいればゲージパラメータ独立になります。また、この解曲線の式はヒッグス場がゲージパラメータ依存していることも表しています。この解曲線は場の真空期待値が 0 になると有効ポテンシャルの最小値を与えるとといった条件を与えなくても出てくるので、(13) は特別な場合の式ではないです。そうすると、ヒッグス場は対称性の破れに関わる秩序パラメータであるために、ヒッグス場自体が、対称性の破れに関わる物理量がゲージパラメータ依存するのかどうかを分からなくする原因の一つであることが分かります。このため、有効ポテンシャルや物理量のゲージパラメータ独立性については Nielsen 恒等式を調べる必要があります。