ミューオン崩壊

素粒子の反応過程は粒子の散乱だけでなく、粒子が崩壊して違う粒子になるという過程があるのでそれについて簡単に見ておきます。ただし、ここでの弱い相互作用の話は不十分な段階のものです。
左巻き、右巻きは相対論的量子力学での「ワイル方程式」を見てください。
崩壊率を求める計算は、QED での例えば「電子-陽子散乱」と同じ手順なので、細かい部分は省いています。

ここで扱うのは弱い相互作用によって起こる粒子の崩壊なので、最初に弱い相互作用を簡単に説明しますが、理論として不完全な段階のものしか使用しません。なので、弱い相互作用についてではなく崩壊率の計算がどのように行われるのかの話です。

ちなみに、弱い相互作用は例えば、レプトン同士 (ニュートリノ、電子、ミューオンなど) での散乱や β 崩壊とかで現われる相互作用です。

粒子が崩壊して異なる粒子になる過程を扱います。崩壊する確率を崩壊率と言います。このとき、弱い相互作用が現れます。崩壊率の計算も断面積の計算と同じで、不変振幅を求めます (崩壊率の定義は後で示します)。なので、まずは粒子の崩壊で現れる弱い相互作用において、不変振幅がどのような形になるかを知る必要があります。

QED での「電子-陽子散乱」で触れたように、電磁相互作用での不変振幅はカレント × カレントという構造を持ちます (正確には間に光子の伝播関数を挟みます)。電子のカレントは

$$J^\mu = -e\overline{\psi_f}\gamma^\mu\psi_i$$

となっています (e は素電荷)。

弱い相互作用でもカレント × カレントの形になっていると考えます。QED と違い、光子による中間状態はないものとして純粋にカレント × カレントの構造とします。つまり、QED のような光子による運動量移行がなく、1 点で相互作用が起きるようにしています。この部分が理論として不十分な結果を作り出しますが、最低次のオーダでの低エネルギーで考えるだけなら何の問題も起こしません。

カレント J^μ のままでは弱い相互作用を表現できなく

$$\overline{\psi_f}\gamma^\mu\psi_i \;\Rightarrow\; \overline{\psi_f}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_i \tag{1}$$

このように変更しなくてはいけません。この形のカレントを $V-A$ 型 (V マイナス A 型) と呼びます。V はベクトル γ^μ、A は軸性ベクトル $\gamma^\mu\gamma^5$ のことです (相対論的量子力学での「γ 行列〜双線形〜」参照)。弱い相互作用はこの $V-A$ 型で表現でき、(1) を弱カレント (weak current) と呼び、QED でのカレントを電磁カレントと呼びます。このように変更する理由は、弱い相互作用においてパリティの保存が破れているからです。実験的には、例えばコバルト 60 の原子核の β 崩壊

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \overline{\nu}_e$$

によって、パリティの保存 (パリティ不変性) の破れは確認されています。e^- は電子、$\overline{\nu}_e$ は反電子ニュートリノです。また、実際に弱カレントが $V-A$ 型になっているのかどうかは、電子-ニュートリノ散乱の実験で検証されその正しさが認められています。ついでに言うと、ニュートリノは電荷を持たない中性のフェルミオンですが、反粒子が存在するとされています。これは実験結果と場の量子論の計算やレプトン数保存からニュートリノと反ニュートリノの区別が必要になっているためです。

(1) が左巻きだけで構成されているのを見ておきます。相対論的量子力学での「ワイル方程式」での左巻き、右巻き成分を取り出す射影演算子は

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\ ,\ P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$$

P_L, P_R の関係は

$$P_L^2 = P_L\ ,\ P_R^2 = P_R\ ,\ P_R P_L = P_L P_R = 0$$

これらによって左巻きと右巻きは

$$\psi = \psi_L + \psi_R = P_L\psi + P_R\psi$$

として取り出せます。$\overline{\psi_{L,R}}$ は $\gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger$ は γ^μ と反交換するので

$$\overline{\psi_L} = (P_L\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_R\ ,\ \overline{\psi_R} = (P_R\psi)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}P_L$$

そうすると

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi &= \overline{\phi}(\frac{1}{2}(1+\gamma^5)+\frac{1}{2}(1-\gamma^5))\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi \\
&= \overline{\phi}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi + \overline{\phi}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi \\
&= \overline{\phi}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi \qquad ((1+\gamma^5)(1-\gamma^5)=0) \\
&= \overline{\phi_L}\gamma^\mu\psi_L
\end{aligned}$$

もしくは

$$\begin{aligned}
P_R\gamma^\mu\gamma^5 P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\gamma^5 P_L &= \frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\gamma^5 P_L \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^5(1-\gamma^5)P_L \\
&= -\gamma^\mu\gamma^5 P_L
\end{aligned}$$

を使えば

$$
\begin{aligned}
\overline{\phi}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi = & -\frac{1}{2}\overline{\phi}\gamma^\mu\gamma^5(1-\gamma^5)\psi \\
= & -\overline{\phi}\gamma^\mu\gamma^5 P_L\psi \\
= & \overline{\phi}P_R\gamma^\mu\gamma^5 P_L\psi \\
= & \overline{\phi_L}\gamma^\mu\gamma^5\psi_L
\end{aligned}
$$

このように、(1) は左巻き成分だけになります。そして、左巻きだけの形 $\overline{\phi_L}O\psi_L$ になるガンマ行列の組み合わせは、γ^μ か $\gamma^\mu\gamma^5$ です。実際に、例えば $O=1$ では

$$
\overline{\phi_L}\psi_L = \overline{\phi}P_R P_L\psi = 0
$$

となって、使えないです。というわけで、左巻きを構成するのは $V-A$ 型のカレントとなります。

平面波を使って書き換えていきます。平面波は

$$
\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}}u(p,s)\exp[-ip\cdot x]
$$

u はスピノール、s はスピンです。$\sqrt{2E}$ で規格化しています。(1) の ψ_i, ψ_f をニュートリノと電子のディラック場 ψ_ν, ψ_e とし、規格化定数と exp を省いて u だけで書けば

$$
J_{e\nu} = \overline{u_e}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu \tag{2}
$$

これのエルミート共役は

$$
\begin{aligned}
J_{e\nu}^\dagger = (\overline{u}_e\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu)^\dagger = & (u_e^\dagger\gamma^0\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu)^\dagger \\
= & u_\nu^\dagger\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u_e \\
= & u_\nu^\dagger\gamma^0\gamma^0\frac{1}{2}(1-\gamma^5)(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)\gamma^0 u_e \\
= & \overline{u_\nu}\gamma^0\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^0\gamma^\mu u_e \\
= & \overline{u_\nu}\gamma^0\gamma^0\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu u_e \\
= & \overline{u_\nu}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_e
\end{aligned} \tag{3}
$$

これらによって、ニュートリノ-電子散乱での不変振幅のカレント × カレント部分は

$$
[\overline{u_\nu}\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_e][\overline{u_e}\gamma^\mu(1-\gamma^5)u_\nu] = J_{e\nu}^\dagger J_{e\nu}
$$

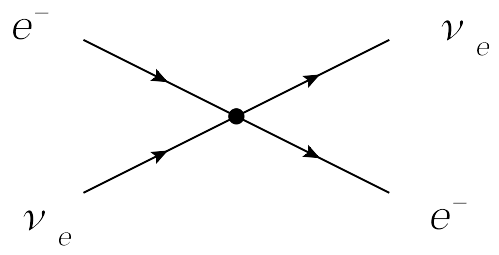

図 1

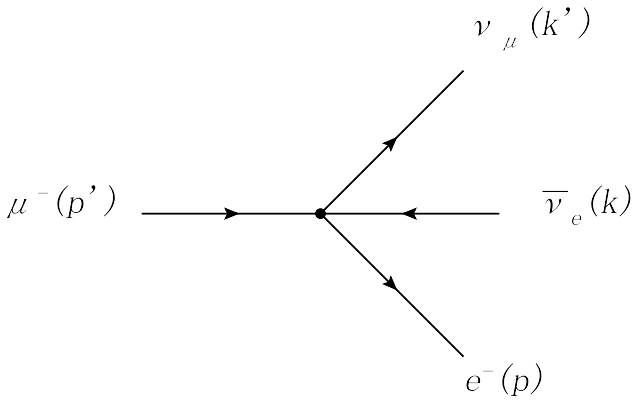

図 2

とされます (J での 1/2 は省いてます)。これの図は図 1 です。

このカレントの特徴として、電荷を持たないニュートリノが電荷 $-e$ を持つ電子へ変わっています。このように粒子の電荷が変化するものを荷電カレント (charged current) と呼びます。これとは異なり、電磁カレントのように粒子の電荷が変化しないものは中性カレント (neutral current) と呼ばれます。弱い相互作用における不変振幅の形が $J^\dagger J$ と書けるのも、$J_{e\nu}$ によって電荷が下げられ (0 から $-e$)、$J^\dagger_{e\nu}$ によって電荷が上げられる（$-e$ から 0) という構造から電荷の保存が守られるためです。

弱い相互作用による崩壊過程の例としてミューオン崩壊の崩壊率を計算していきます。ミューオン崩壊は、$-e$ の電荷を持つミューオン μ^- から電子 e^-、電子ニュートリノ ν_e、ミューニュートリノ ν_μ への崩壊です。これは

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$$

と書かれ、図にすれば図 2 です。このときの、不変振幅の形は弱い相互作用での結合定数を G として

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\overline{u}_{\nu_\mu}(k',t')\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_\mu(p',s')][\overline{u}_e(p,s)\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_{\nu_e}(k,t)]$$

ミューオンとニュートリノを表す μ,ν とミンコフスキー空間の添え字との区別に気を付けてください。反電子ニュートリノなので、反粒子での

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2E}}v(p,s)\exp[+ip\cdot x]$$

を使っています。表記が煩わしいので $\overline{u}_{\nu_\mu}$ は $\overline{u}_\nu$、v_{ν_e} は v_ν とします。

G はフェルミ結合定数と呼ばれます。また、$1/\sqrt{2}$ は当初 G が γ^5 を含まずに作られたために、その定義との兼ね合いから残っている係数です。QED での不変振幅との比較から G は e^2/q^2 の部分 (光子の伝播関数) の次元を持つので、G の次元は質量次元 M では M^{-2} になります。

S 行列の定義に今の状況を適用させます。遷移カレントは、規格化の E は運動量の 0 成分なので

$$J^\alpha_{\mu\nu_\mu} = \overline{\psi_{\nu_\mu}}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{4k'_0p'_0}}\overline{u_\nu}(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\mu(p',s')\exp[i(k'-p')\cdot x]$$

$$J^\alpha_{\nu_e e} = \overline{\psi_e}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\psi_{\nu_e} = \frac{1}{\sqrt{4k_0p_0}}\overline{u_e}(p,s)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v_\nu(k,t)\exp[i(p+k)\cdot x]$$

これらから

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' &= \frac{G}{\sqrt{2}}J^\alpha_{\mu\nu_\mu}J_{\nu_e e\alpha}\\ &= \frac{G}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{16k_0p_0k'_0p'_0}}[\overline{u_\nu}(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\mu(p',s')][\overline{u_e}(p,s)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)v_\nu(k,t)]\\ &\qquad\times\exp[i(-p'+p+k+k')\cdot x]\end{aligned}$$

となります。

求めたい崩壊率は粒子が単位時間あたりに崩壊する確率です。崩壊率 $d\Gamma$ は

$$d\Gamma = \frac{d^3pd^3kd^3k'}{(2\pi)^9}\frac{|\mathcal{M}|^2}{16k_0p_0k'_0p'_0}(2\pi)^4\delta^4(-p'+p+k+k')$$

と与えられます。全崩壊率 Γ は積分を実行したものです。S 行列を使えば

$$d\Gamma = \frac{|S|^2}{TV}dN$$

T は経過時間、V は 3 次元体積、$|S|^2dN$ は崩壊した回数です。ここでの S は崩壊しない 1 を抜いたものとすれば、$\mathcal{M}'$ です。実際に、dN は運動量が $\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ での崩壊回数 (崩壊した状態数) なので

$$dN = \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

となり（今の波動関数は体積で規格化していない)、$|\mathcal{M}'|^2/TV$ は

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{M}'|^2}{TV} &= \frac{G^2}{2}\frac{(2\pi)^8\delta^4(-p'+p+k+k'))^2}{16k_0p_0k'_0p'_0T}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{G^2}{2}\frac{TV}{(2\pi)^4}\frac{(2\pi)^8\delta^4(-p'+p+k+k')}{16k_0p_0k'_0p'_0TV}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{G^2}{2}\frac{|\mathcal{M}|^2}{16k_0p_0k'_0p'_0}(2\pi)^4\delta^4(-p'+p+k+k')\end{aligned}$$

として、一致します。2 行目の TV は $\delta^4(0)$ から出てきます (QED の「ラザフォード散乱」参照)。

ニュートリノの終状態を観測しないとして（ニュートリノの検出は難しいため観測しない)、その全状態に渡って積分して

$$
\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{G^2}{2}\frac{(2\pi)^4}{16k_0p_0k_0'p_0'}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\delta^4(-p'+p+k+k')|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{G^2}{2}\frac{1}{2p_0'}\frac{d^3p}{2p_0(2\pi)^5}\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}\delta^4(-p'+p+k+k')|\mathcal{M}|^2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

さらにスピン和をとります。崩壊もとのミューオンでは平均、崩壊後の電子とニュートリノでは和を取ります。これによって (4) は

$$
d\Gamma = \frac{G^2}{8}\frac{1}{p_0p_0'}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k_0'}\delta^4(-p'+p+k+k')\frac{1}{2}\sum_{s,s't,t'}|\mathcal{M}|^2
$$

不変振幅の和は

$$
\sum_{s,s't,t'}|\mathcal{M}|^2 = \sum_{s,s't,t'}|[\overline{u_\nu}(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\mu(p',s')][\overline{u_e}(p,s)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)v_\nu(k,t)]|^2
$$

ニュートリノの質量は 0 とし、電子の質量はミューオンの質量 m よりだいぶ小さいので無視します。そうすると、(3) から $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 部分はエルミート共役で変化しないので、QED での場合と同じようにできます。今の規格化では

$$
\sum_{s=1}^{2}u(p,s)\overline{u}(p,s) = p_\mu\gamma^\mu + m\ ,\ \sum_{s=1}^{2}v(\boldsymbol{p},s)\overline{v}(\boldsymbol{p},s) = p_\mu\gamma^\mu - m
$$

なので、ミューオンとニューミュートリノ部分は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s't'}\overline{u_\nu}(k',t')\gamma^\alpha(1-\gamma^5)u_\mu(p',s')\overline{u}_\mu(p',s')\gamma^\beta(1-\gamma^5)u_\nu(k',t') \\
&\qquad = \mathrm{tr}[k_\mu'\gamma^\mu\gamma^\alpha(1-\gamma^5)(p_\nu'\gamma^\nu+m)\gamma^\beta(1-\gamma^5)]
\end{aligned}
$$

電子と電子ニュートリノ部分は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s,t}\overline{u_e}(p,s)\gamma_\alpha(1-\gamma^5)v_\nu(k,t)\overline{v_\nu}(k,t)\gamma_\beta(1-\gamma^5)u_e(p,s) \\
&\qquad = \mathrm{tr}[(p^\mu\gamma_\mu\gamma_\alpha(1-\gamma^5)k^\nu\gamma_\nu\gamma_\beta(1-\gamma^5)]
\end{aligned}
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
\sum_{s,s't,t'} |\mathcal{M}|^2 &= \mathrm{tr}[k'_\mu \gamma^\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)(p'_\nu \gamma^\nu + m)\gamma^\beta (1-\gamma^5)]\mathrm{tr}[p^\rho \gamma_\rho \gamma_\alpha (1-\gamma^5) k^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\beta (1-\gamma^5)] \\
&= k'_\mu p'_\nu \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5) p'_\nu \gamma^\nu \gamma^\beta (1-\gamma^5)] p^\rho k^\lambda \mathrm{tr}[\gamma_\rho \gamma_\alpha (1-\gamma^5)\gamma_\lambda \gamma_\beta (1-\gamma^5)] \\
&\quad + m k'_\mu p^\rho k^\lambda \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)\gamma^\beta (1-\gamma^5)]\mathrm{tr}[\gamma_\rho \gamma_\alpha (1-\gamma^5)\gamma_\lambda \gamma_\beta (1-\gamma^5)]
\end{aligned} \tag{5}
$$

質量の項は

$$
\gamma^\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)\gamma^\beta (1-\gamma^5) = \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta (1+\gamma^5)(1-\gamma^5) = \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta (1-1) = 0
$$

なので、消えます。残りで必要なトレースを求めます。QED の「トレース公式」の関係をそのまま使います。

ガンマ行列のトレース

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) \\
&\mathrm{tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\gamma^\mu (1-\gamma^5)\gamma^\nu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)\gamma^\beta] \\
&= \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta + \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\beta] \\
&= \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] \\
&= 2\mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] + 2\mathrm{tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] \\
&= 8(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) - 8i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

レヴィ・チビタ記号 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ は $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$ としています。トレースの入れ替えの性質から

$$
\mathrm{tr}[\gamma^\beta \gamma^\mu (1-\gamma^5)\gamma^\nu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)] = 8(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) + 8i\epsilon^{\beta\mu\nu\alpha}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
&k'_\mu p'_\nu \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5)\gamma^\nu \gamma^\beta (1-\gamma^5)] = 8(k'^\beta p'^\alpha + k'^\alpha p'^\beta - g^{\alpha\beta} k' \cdot p' + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} k'_\mu p'_\nu) \\
&p^\rho k^\lambda \mathrm{tr}[\gamma_\rho \gamma_\alpha (1-\gamma^5)\gamma_\lambda \gamma_\beta (1-\gamma^5)] = 8(k_\alpha p_\beta + k_\beta p_\alpha - g_{\alpha\beta} k \cdot p + i\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta} p^\rho k^\lambda)
\end{aligned}
$$

そうすると、(5) の第 1 項は

$$
\begin{aligned}
&(k'^{\beta}p'^{\alpha}+k'^{\alpha}p'^{\beta}-g^{\alpha\beta}k'\cdot p'+i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}p'_{\nu})(k_{\alpha}p_{\beta}+k_{\beta}p_{\alpha}-g_{\alpha\beta}k\cdot p+i\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}p^{\rho}k^{\lambda})\\
&=(k'\cdot p)(p'\cdot k)+(k'\cdot k)(p'\cdot p)-(k'\cdot p')(k\cdot p)+i\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'^{\beta}p'^{\alpha}p^{\rho}k^{\lambda}\\
&\quad+(k'\cdot k)(p'\cdot p)+(k'\cdot p)(p'\cdot k)-(k'\cdot p')(k\cdot p)+i\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'^{\alpha}p'^{\beta}p^{\rho}k^{\lambda}\\
&\quad-(k'\cdot p')(k\cdot p)-(k'\cdot p')(k\cdot p)+g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}(k'\cdot p')(k\cdot p)-ig^{\alpha\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}(k'\cdot p')p^{\rho}k^{\lambda}\\
&\quad+i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}k_{\alpha}p_{\beta}+i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}k_{\beta}p_{\alpha}-ig_{\alpha\beta}\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}(k\cdot p)\\
&\quad-\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}p^{\rho}k^{\lambda}\\
&=2(k'\cdot p)(p'\cdot k)+2(k'\cdot k)(p'\cdot p)-4(k'\cdot p')(k\cdot p)+4(k'\cdot p')(k\cdot p)\\
&\quad-i\epsilon_{\rho\beta\lambda\alpha}k'^{\beta}p'^{\alpha}p^{\rho}k^{\lambda}+i\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'^{\alpha}p'^{\beta}p^{\rho}k^{\lambda}+i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}k_{\alpha}p_{\beta}-i\epsilon^{\mu\beta\nu\alpha}k'_{\mu}p'_{\nu}k_{\beta}p_{\alpha}\\
&\quad-\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}p^{\rho}k^{\lambda}\\
&=2(k'\cdot p)(p'\cdot k)+2(k'\cdot k)(p'\cdot p)-\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}p^{\rho}k^{\lambda}\\
&=4(k'\cdot p)(p'\cdot k)
\end{aligned}
$$

最後はレヴィ・チビタ記号の関係

$$
\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}=\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\lambda\alpha\beta}=2(\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho}-\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\lambda})
$$

から

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\epsilon_{\rho\alpha\lambda\beta}k'_{\mu}p'_{\nu}p^{\rho}k^{\lambda}=2(\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\rho}-\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\lambda})k'_{\mu}p'_{\nu}p^{\rho}k^{\lambda}&=2(k'_{\lambda}p'_{\rho}-k'_{\rho}p'_{\lambda})p^{\rho}k^{\lambda}\\
&=2(k'\cdot k)(p'_{\rho}\cdot p)-2(k'_{\rho}\cdot p)(p'_{\lambda}\cdot k)
\end{aligned}
$$

となります。

よって、トレース計算をすると

$$
\sum_{s,s't,t'}|\mathcal{M}|^2=128(p\cdot k')(k\cdot p')
$$

後は

$$
d\Gamma=\frac{G^2}{2}\frac{1}{2p'_0}\frac{128}{2p_0(2\pi)^5}\frac{d^3p}{}\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^4(-p'+p+k+k')(p\cdot k')(k\cdot p')
$$

での積分を実行すればいいです。計算は下の補足 2 にまわして、結果を示すと

$$\int \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^4(-p'+p+k+k')k'_\mu k_\nu = \frac{\pi}{24}(q^2 g_{\mu\nu}+2q_\mu q_\nu)\Theta(q^0)\Theta(q^2) \quad (q_\mu = (p'-p)_\mu)$$

Θ は階段関数です。というわけで、崩壊率は

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{G^2}{24}\frac{1}{2p'_0}\frac{\pi d^3p}{2p_0(2\pi)^5}64p^\mu p'^\nu(q^2g_{\mu\nu}+2q_\mu q_\nu)\Theta(q^0)\Theta(q^2) \\ &= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0p'_0}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}p^\mu p'^\nu(q^2g_{\mu\nu}+2q_\mu q_\nu)\Theta(q^0)\Theta(q^2) \end{aligned}$$

となります。

ここでミューオンが静止している系に移します。そうすると、ミューオンは $p'^\nu = (m,0)$ となるので q^ν は

$$q^\nu = p'^\nu - p^\nu = (m-p^0, -\boldsymbol{p})$$

階段関数 $\Theta(q^2)$ から $q^2>0$ なので

$$\begin{aligned} q^2 = (p'-p)^2 &= (m-p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 \\ &= m^2 + (p^0)^2 - 2mp^0 - (p^0)^2 \\ &= m^2 - 2mp^0 > 0 \end{aligned}$$

電子の質量は無視しているので、$(p^0)^2 = \boldsymbol{p}^2$ を使っています。m^2-2mp^0 が 0 になるときを p^0 の最大値 p^0_{max} とするなら、$p^0_{max} = m/2$ となり、これよりも p^0 は小さいという条件

$$p^0 < p^0_{max} = \frac{m}{2}$$

が出てきます。

もう 1 つの階段関数 $\Theta(q^0)$ から

$$q^0 = (p^{0\prime} - p^0) = m - p^0 > 0$$

これは当然 $m - p^0_{max}$ よりは大きいはずなので

$$q^0 = m - p^0 > m - p^0_{max} > 0$$

つまり、$p^0 < p^0_{max}$ であれば、$q^0>0$ も満たされるので、2 つの階段関数による制限を 1 つの階段関数

$$\Theta(p^0_{max} - p^0)$$

だけで表現できます。

よって、静止系での崩壊率は

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}p^\mu p'^\nu((m^2-2mp^0)g_{\mu\nu}+2(p'-p)_\mu(p'-p)_\nu)\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}((p\cdot p')(m^2-2mp^0)+2p^\mu(p'-p)_\mu p'^\nu(p'-p)_\nu)\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}(p^0m(m^2-2mp^0)+2(p^0(m-p^0)-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{p}))m(m-p^0))\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}(p^0m(m^2-2mp^0)+2m(p^0m-(p^0)^2+\boldsymbol{p}^2)(m-p^0))\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}(p^0m^3-2m^2(p^0)^2+2p^0m^2(m-p^0))\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0 m}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}m(p^0m^2-2m_\mu(p^0)^2+2p^0m^2-2(p^0)^2m))\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2}{3}\frac{G^2\pi}{p_0}\frac{d^3p}{(2\pi)^5}(3p^0m^2-4m(p^0)^2)\Theta(p^0_{max}-p^0)
\end{aligned}$$

となります。

後は p 積分を実行することで全崩壊率 Γ が求められ

$$\Gamma = \frac{2G^2\pi}{3}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^5 p_0}(3p^0m^2-4m(p^0)^2)\Theta(p^0_{max}-p^0)$$

平均寿命 τ は $\tau = \Gamma^{-1}$ です。3 次元積分は立体角 Ω によって

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{2G^2\pi}{3}\int d\Omega\int\frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^5}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}\big(3p^0m^2-4m(p^0)^2\big)\Theta(p^0_{max}-p^0) \\
&= \frac{2G^2\pi}{3}4\pi\int\frac{d|\boldsymbol{p}|}{(2\pi)^5}\frac{\boldsymbol{p}^2}{p_0}\big(3p^0m^2-4m(p^0)^2\big)\Theta(p^0_{max}-p^0)
\end{aligned}$$

$(p_0)^2 = \boldsymbol{p}^2$ から

$$2p_0 = 2|\boldsymbol{p}|\frac{d|\boldsymbol{p}|}{dp_0}$$

$$\frac{p_0}{|\boldsymbol{p}|} = \frac{d|\boldsymbol{p}|}{dp_0}$$

これと階段関数の制限から積分範囲は

$$\Gamma = \frac{2G^2}{3(2\pi)^3}\int_0^{p^0_{max}} dp_0\ p_0\big(3p^0m^2 - 4m(p^0)^2\big)$$

$p^0_{max} = m/2$ なので

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^3}\int_0^{m_\mu/2} dp^0\ p_0\big(3p^0m^2 - 4m(p^0)^2\big)\\ &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^3}\big[(p^0)^3m^2 - m(p^0)^4\big]_0^{m_\mu/2}\\ &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^3}\Big(\frac{m^5}{8} - \frac{m^5}{16}\Big)\\ &= \frac{G^2m^5}{192\pi^3}\end{aligned}$$

これがミューオンの全崩壊率になります。

ミューオンの平均寿命 τ は全崩壊率の逆で、その実験値は

$$\tau = 2.197 \times 10^{-6}[\mathrm{s}]$$

自然単位系では 1 秒は

$$1[\mathrm{s}] = 1.52 \times 10^{24}[\mathrm{GeV}^{-1}]$$

なので、全崩壊率は

$$\Gamma = 2.995 \times 10^{-19}[\mathrm{GeV}]$$

これとミューオンの質量 $m = 105.658[\mathrm{MeV}]$ から、フェルミ結合定数 G は

$$G = 1.16637 \times 10^{-5}[\mathrm{GeV}^{-2}]$$

結合定数 G は無次元量でないことに注意してください。

ここでは崩壊率の計算を見るのが目的だったので、弱い相互作用については深入りせず、弱い相互作用の理論として不完全なものを使用しました。不完全な理由は、各オーダでの発散を処理できないために、くり込み不可能な理論だからです。くり込み不可能な理由は結合定数 G が質量の次元 M で M^{-2} の次元を持っているためです (くり込みについては「くり込み理論」参照)。これの修正は「電弱相互作用」を見てください。

ちなみに、G の次元はフェルミオン場の 4 点相互作用からも求められます。フェルミオン場の次元は、4 次元のラグランジアンの次元が M^4 であることから求めます (自然単位系では作用は無次元なので、$\mathcal{L}d^4x$ の積分から

M^4)。フェルミオン場 ψ の次元はフェルミオン場の運動項 $\overline{\psi}\partial_\mu\psi$ から (∂_μ は次元 M)、$(4-1)/2=3/2$ です。そして、4 点相互作用に対応する相互作用項は G とフェルミオン場 4 つの積です。4 つのフェルミオン場による次元は $4\times 3/2=6$ から M^6 です。これに結合定数 G の次元によって M^4 にするので、G の次元は M^{-2} となります。

・補足 1

パリティの保存の破れの話を簡単にします。パリティ変換は空間反転 $\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$ のことで、パリティの保存 (パリティ不変性) は空間反転しても物理が変わらないという意味です (例えば運動方程式が変わらない)。これは観測者は空間反転前と後の現象を区別できないという意味も持っています。

簡単にするために、原子核から電子が出てくる状況を 2 次元平面上で考えます。まず、yz 平面において原子核の核スピンの方向を z 軸の正方向に揃えます。スピンの方向はスピンの回転方向に対しての右手系での親指方向 (右ねじの進行方向) です (右巻き)。そして、崩壊によって電子が z 軸の正方向 (核スピンの方向) に出てくるとします。ここで、パリティは空間反転に対するものなので、空間反転を考えると、座標点 (y,z) は $(-y,-z)$ に移ります。「C,P,T 変換」で示したようにパリティ変換は角運動量を変えないので、核スピンの回転方向は変わらない (核スピンは z 軸の正方向) ですが、電子は z 軸の負方向に出てきます。つまり、空間反転前では電子は核スピン方向、空間反転後では電子は核スピンの反対方向に出てきます。

もっと状況を分かりやすくすれば、空間反転後に y 軸周りに 180 度回転させれば (回転変換に対して不変とする)、座標点は $(-y,z)$ にいき、これは鏡に映した状況 (鏡映変換) になります。180 度回転によって核スピンの回転が逆になり、電子は z 軸の正方向に出てきます。このとき核スピンは z 軸の負方向を向き、電子は z 軸の正方向に出てきます。このように、鏡映変換した先では電子の出てくる方向が核スピンに関して逆になります。

そして、空間反転によって物理が変わらない (パリティが保存される) なら、核スピンの方向に出てくる電子と逆方向に出てくる電子の両方が実験では観測されるはずです。つまり、核スピンの方向に出ている電子と核スピンの反対方向に出ている電子は空間反転の関係になっているので、パリティが保存されているなら、核スピン方向に出ている電子がいればその反対方向に出ている電子もいるだろうということです (観測者は起きてる現象が空間反転前なのか後なのか区別できないから)。これが Wu たちが行った実験です。

そして、^{60}Co の実験では核スピン方向に対して逆向きに e^- がほとんど出てきました。これがパリティの保存が破れているという話です。ちなみに、^{60}Co はスピン 5、^{60}Ni はスピン 4、e^- と $\overline{\nu}_e$ はスピン 1/2 で、e^- は左巻き、$\overline{\nu}_e$ は右巻きです。パリティが保存されているなら空間反転した先では右巻きの e^-、左巻きの $\overline{\nu}_e$ が出てきます。左巻きの反ニュートリノが存在しないこともパリティの保存が破れている証拠になっています。

・補足 2

途中に出てきた積分

$$I_{\mu\nu}=\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^4(-p'+p+k+k')k'_\mu k_\nu$$

を実行します。この積分での

$$\frac{d^3k}{2k_0},\ \frac{d^3k'}{2k'_0}$$

はローレンツ不変な量で、デルタ関数もローレンツ不変なので、ローレンツ共変です。この性質のため、積分変数でない $q_\mu=p'_\mu-p_\mu$ 部分はローレンツ変換できます。なので、$q^2>0$ として、$q_\mu=(q_0,0)$ とします。そうすると、積分は

$$I_{\mu\nu}=\int\frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(-q_0+k_0+k'_0)k'_\mu k_\nu$$

として、時間成分と 3 次元成分にデルタ関数を分離できます。
　後は単純に積分で、例えば 00 成分では

$$
\begin{aligned}
I_{00} &= \int \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(-q_0+k_0+k'_0)k'_0k_0 \\
&= \int \frac{d^3k}{4k_0^2}\delta(-q_0+2k_0)k_0^2 \\
&= 4\pi\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{k}|}{4}|\boldsymbol{k}|^2\delta(-q_0+2k_0) \\
&= 4\pi\int_0^\infty \frac{dk_0}{4}k_0^2\delta(-q_0+2k_0) \\
&= 4\pi\int_0^\infty \frac{dx}{4}\frac{1}{2}\frac{x^2}{4}\delta(-q_0+x) \quad (x=2k_0) \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\ x^2\delta(-q_0+x)
\end{aligned}
$$

途中で $\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}'$ と、k_μ, k'_μ は質量 0 の on-shell のために $(k^2=0, k'^2=0)$、$k_0=k'_0=|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}|'$ となることを使っています $(k_0, k'_0>0)$。このように各成分を計算していけますが、これだと共変な形式に書き直すのが面倒なので、先に共変な形を仮定して計算します。
　$I_{\mu\nu}$ は 2 階のテンソルなので、共変であるためには計量 $g_{\mu\nu}$ と $q_\mu q_\nu$ による組み合わせになっていればいいことから

$$
I_{\mu\nu} = A' g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu
$$

という形を作ります (A', B はスカラー量)。ただし、この形だと A' と B の次元がズレてしまうので

$$
I_{\mu\nu} = A q^2 g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu
$$

このように q^2 を外に出すことにします。この A, B を決定させます。
　$g^{\mu\nu}$ をかければ

$$
g^{\mu\nu}I_{\mu\nu} = Aq^2 g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + Bg^{\mu\nu}q_\mu q_\nu = 4Aq^2 + Bq^2
$$

また、$q^\mu q^\nu$ をかけるなら

$$
q^\mu q^\nu I_{\mu\nu} = Aq^2 q^\mu q^\nu g_{\mu\nu} + Bq^\mu q^\nu q_\mu q_\nu = Aq^4 + Bq^4
$$

となるので、この連立方程式を解きます。
　というわけで、$q^2>0, q_\mu=(q_0,0)$ として $g^{\mu\nu}I_{\mu\nu}$ を計算すれば

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}I_{\mu\nu} &= \int \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(-q_0+k_0+k'_0)k'_\mu k^\mu \\
&= \int \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(-q_0+k_0+k'_0)(k'_0k_0-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}) \\
&= \int \frac{d^3k}{4k_0^2}\delta(-q_0+2k_0)2k_0^2 \\
&= 4\pi\int_0^\infty \frac{d|\boldsymbol{k}|}{2}|\boldsymbol{k}|^2\delta(-q_0+2k_0) \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty dx\ x^2\delta(-q_0+x)
\end{aligned}
$$

途中から I_{00} の計算と同じになるので省略しています（$x=2k_0, k_0=k'_0=|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}|'$）。これは q_0 が負の値を持つとデルタ関数内を 0 にできないので、階段関数を使って $\Theta(q_0)$ と制限を与えることで、x 積分実行後は

$$
g^{\mu\nu}I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{4}q_0^2\Theta(q_0)
$$

ここでは $q_\mu=(q_0,0)$ となる系を使っていますが、この計算手順は明らかにローレンツ共変性を壊さないので、q_μ を任意の系に戻した

$$
g^{\mu\nu}I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{4}q^2\Theta(q_0)
$$

という形に書き直せます。

次に $q^\mu q^\nu I_{\mu\nu}$ を計算します。ここでも $q^2>0, q_\mu=(q_0,0)$ なので

$$
\begin{aligned}
q^\mu q^\nu I_{\mu\nu} = q^0q^0I_{00} &= q_0^2\int \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(-q_0+k_0+k'_0)k'_0k_0 \\
&= \frac{\pi}{8}\int_0^\infty dx\ x^4\delta(-q_0+x) \\
&= \frac{\pi}{8}q_0^4\Theta(q_0) \\
&= \frac{\pi}{8}q^4\Theta(q_0)
\end{aligned}
$$

となります。

次に $q^2<0$ の場合も考えますが、この場合は 0 になります。理由は簡単で、$q^2<0$ ではデルタ関数内を 0 にできないからです。デルタ関数内は $k_\mu+k'_\mu-q_\mu$ なので、$q_\mu=k_\mu+k'_\mu$ となる必要があります。k_μ と k'_μ は質量のないニュートリノなので

$$
k'^2 = k_0'^2-|\boldsymbol{k}'|^2=0\ ,\ k^2=k_0^2-|\boldsymbol{k}|^2=0
$$

から

$$\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}'||\boldsymbol{k}| \cos\theta = k_0' k_0 \cos\theta$$

この関係を使うと、$(k+k')^2$ は

$$(k+k')^2 = k^2 + k'^2 + 2k_\mu k^\mu = 2(k_0' k_0 - |\boldsymbol{k}'||\boldsymbol{k}| \cos\theta) = 2k_0' k_0 (1 - \cos\theta)$$

$k_0' k_0$ と $1 - \cos\theta$ は常に 0 以上なので

$$(k+k')^2 \geq 0$$

となっているのが分かり、これは $q_\mu = k_\mu + k'_\mu$ を満たせません ($q^2 < 0$ だから)。よって、デルタ関数内を 0 にできないので、$I_{\mu\nu}$ は常に 0 を返すことになります。

まとめれば

$$g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q_0) \quad (q^2 > 0)$$
$$q^\mu q^\nu I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q_0) \quad (q^2 > 0)$$

そして、$q^2 < 0$ では 0 となります。この q^2 に対する条件も階段関数を使うことで

$$g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q_0)\Theta(q^2)\ ,\ q^\mu q^\nu I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q_0)\Theta(q^2)$$

とまとめられます。

後はこれを使って A と B の連立を解けばよくて、これは簡単に

$$A = \frac{\pi}{24}\Theta(q_0)\Theta(q^2)\ ,\ B = \frac{\pi}{12}\Theta(q_0)\Theta(q^2)$$

というわけで、$I_{\mu\nu}$ の共変な形として

$$I_{\mu\nu} = (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu)\frac{\pi}{24}\Theta(q_0)\Theta(q^2)$$

が求まります。