ベーテ・サルピーター方程式

ここでは 2 粒子伝播関数に対する非摂動的な方程式を導きます。2 粒子伝播関数というのは、2 つの粒子が束縛状態になっているとき、それをひとくくりにした伝播関数です。具体的なイメージは下でのファインマン図を見れば分かると思います。そんな 2 粒子伝播関数に対する方程式をベーテ・サルピーター方程式と呼んでいます。利用方法とかには触れずに導出方法だけを示していきます。
ここでは 3 通りの方法を使ってベーテ・サルピーター方程式を求めてやります。最初にシュウィンガー・ダイソン方程式と同じように生成汎関数から求めます。次に CJT 有効作用を使った方法を示します。最後にファインマン図の解析から求めてやります。最後の方法が一番分かりやすく直感的にも理解しやすいので、ベーテ・サルピーター方程式がどんなものか知りたい人は最後だけ見てください。
ここで導くベーテ・サルピーター方程式は、基本的に電荷を持っている 2 粒子束縛状態について調べるために使われるので QED で行っていきます。また、最初の導出方法がシュウィンガー・ダイソン方程式の途中式を利用するので、「シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜」と同じ記号を使っていきます。なので、前半は伝播関数には i が含まれていません。次の CJT 有効作用を使った場合では i を含めています。最後のファインマン図のものは i を外しています。
ここでは真空を $|0\rangle$ と書きますが、全て相互作用ありの真空です。

通常の伝播関数は 1 粒子の情報を持ったものですが、これが 2 粒子だとどうなるのか見ていきます。これは簡単に言ってしまえばフェルミオンの 4 点関数なので、生成汎関数を源 $\eta,\overline{\eta}$ で各 2 回ずつ汎関数微分してやればいいです (このことから 4 点関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式と言うことができます)。これは、電子の伝播関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式をさらに η で 2 回、$\overline{\eta}$ で 1 回汎関数微分すればいいだけなので、汎関数微分を実行すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big((i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)})\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x_1)} + \eta(x_1)\Big)Z[\eta,\overline{\eta},J_\mu] \\
0 &= (i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu\frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)})\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x_1)}Z[\eta,\overline{\eta},J_\mu] \\
&\quad + \frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\eta(x_1)Z[\eta,\overline{\eta},J_\mu]
\end{aligned}
$$

右辺の最後の項は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta\eta(x_1)}{\delta\eta(y_2)}Z + \frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\eta(x_1)\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}Z \\
&= -\delta(x_1-y_2)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}Z - \frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(\eta(x_1)\frac{\delta Z}{\delta\eta(y_2)}) \\
&= -\delta(x_1-y_2)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}Z - \frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}(\frac{\delta\eta(x_1)}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta Z}{\delta\eta(y_2)}) + \frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}(\eta(x_1)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta Z}{\delta\eta(y_2)}) \\
&= -\delta(x_1-y_2)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}Z - \delta(x_1-y_1)\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}Z - \eta(x_1)\frac{\delta^3 Z}{\overline{\eta}(x_2)\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)}
\end{aligned}
$$

$\eta,\overline{\eta}$ による汎関数微分はグラスマン数の微分に従っています (反交換する)。$\overline{\eta}=\eta=0$ とするので、第三項は消えて

$$\begin{aligned}0 =&\Big((i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)}\Big)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x_1)}Z\\ &-\delta(x_1-y_2)\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}Z-\delta(x_1-y_1)\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}Z\end{aligned}$$

Z を e^{iW} に置き換えて

$$\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)}Z|_{\eta=\overline{\eta}=0}=-\frac{1}{i}\frac{\delta^2W}{\delta\eta(y)\delta\overline{\eta}(x)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}e^{iW}=-iS(x,y;J)e^{iW}$$

$$\Big(iS(x_1,x_2;J)=\frac{1}{i}\frac{\delta^2W[\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}=-\frac{1}{i}\frac{\delta^2W[\eta,\overline{\eta}]}{\delta\overline{\eta}(x_1)\delta\eta(x_2)}|_{\eta=\overline{\eta}=0}\Big)$$

となることと

$$\frac{1}{i^4}\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}|_{\eta=\overline{\eta}=0}=S(x_1,x_2;y_1,y_2;J)e^{iW}$$

という記号を定義することで

$$\begin{aligned}&\big(i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)}\big)\frac{1}{i^4}\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)}Z\\ &\qquad=\delta^4(x_1-y_2)\frac{1}{i^3}\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}Z+\delta^4(x_1-y_1)\frac{1}{i^3}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}Z\end{aligned}$$

$$\big(i\partial\!\!\!/ - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)}\big)S(x_1,x_2;y_1,y_2;J)=\delta^4(x_1-y_2)S(x_2,y_1;J)-\delta^4(x_1-y_1)S(x_2,y_2;J) \tag{1}$$

ちなみに、$S(x_1,x_2;y_1,y_2;J)$ は定義式を見て分かるように、connected な図だけを取り出すようには定義されていません。演算子で書けば

$$S(x_1,x_2;y_1,y_2;J)=\langle 0|T\psi(x_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(y_2)\overline{\psi}(y_1)|0\rangle_J$$

一方で $iS(x_2,y_2;J)$ は connected な伝播関数ですが、おそらく混乱はしないと思うので特に表記に connected であることを表すようなものをつけずにいきます。$S(x_1,x_2;y_1,y_2;J)$ 部分を計算したものを一応示しておけば

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{i^4}\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}\\
&=\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_2)}(\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW})\\
&=\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}(\frac{i\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW})+\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(y_2)}(-\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW})\\
&=\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(\frac{i\delta^3 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW})+\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(\frac{i\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}e^{iW})\\
&\quad+\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(-\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW})+\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW})\\
&\quad+\frac{\delta}{\delta\eta(y_1)}(-\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}e^{iW})\\
&=\frac{i\delta^4 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}-\frac{i\delta^3 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_1)}e^{iW}\\
&\quad+\frac{i\delta^3 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}e^{iW}+\frac{i\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)}e^{iW}-\frac{i\delta^2 W}{\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_1)}e^{iW}\\
&\quad-\frac{i\delta^3 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}-\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}+\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_1)}e^{iW}\\
&\quad+\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}-\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^3 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}-\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_1)}e^{iW}\\
&\quad-\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}e^{iW}+\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}e^{iW}-\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)}e^{iW}\\
&\quad+\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta W}{\delta\overline{\eta}(x_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_2)}\frac{i\delta W}{\delta\eta(y_1)}e^{iW}\\
&\Rightarrow\frac{i\delta^4 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}-\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}+\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{i\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}\\
&=\frac{1}{i^3}\frac{\delta^4 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}-\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}+\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}e^{iW}\\
&=\frac{1}{i^3}\frac{\delta^4 W}{\delta\eta(y_1)\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)\delta\overline{\eta}(x_1)}e^{iW}-iS(x_1,y_2;J)iS(x_2,y_1;J)e^{iW}+iS(x_1,y_1;J)iS(x_2,y_2;J)e^{iW}
\end{aligned}
$$

途中のの矢印は $\overline{\eta}=\eta=0$ とし、η もしくは $\overline{\eta}$ だけで微分されているものを消すことを表しています。

話を戻して、(1) の形を見やすいものへ変えていきます。ここからは変数内に源 J を書くのを省いていきます。ここでのフェルミオンの伝播関数 $iS(x,y)$ は厳密な伝播関数なので、満たすべき方程式は「シュウィンガー・ダイソン方程式〜QED〜」での (7) や (8) から

$$
\int d^4z[\delta^4(x-z)(i\partial\!\!\!/-m_0)-\Sigma(x,z)]S(z,y)=\delta^4(x-y)
$$

このような式になっていることが分かります。この式は演算子部分が $S(z,y)$ の逆 $S^{-1}(y,z)$ のようになっていると考えれば

$$\int d^4z S^{-1}(x,z)S(z,y) = \delta^4(x-y)$$

なので、$S^{-1}(z_2,x_2)$ を作用させるなら、(1) の右辺は

$$\begin{aligned}
&\delta^4(x_1-y_2)\int d^4x_2 S^{-1}(z_2,x_2)S(x_2,y_1) - \delta^4(x_1-y_1)\int d^4x_2 S^{-1}(z_2,x_2)S(x_2,y_2)\\
&\qquad = \delta^4(x_1-y_2)\delta^4(z_2-y_1) - \delta^4(x_1-y_1)\delta^4(z_2-y_2)
\end{aligned}$$

(1) の左辺はちょっと書き換えると

$$\begin{aligned}
&\big(i\partial\!\!\!/_{x_1} - m_0 - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)}\big)S(x_1,x_2;y_1,y_2)\\
&=\big(i\partial\!\!\!/_{x_1} - m_0\big)S(x_1,x_2,y_1,y_2) - e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(x_1)}S(x_1,x_2;y_1,y_2)\\
&\quad - \int d^4z_1 \Sigma(x_1,z_1)S(z_1,x_2;y_1,y_2) + \int d^4z_1 \Sigma(x_1,z_1)S(z_1,x_2;y_1,y_2)\\
&=\int d^4z_1\big(\delta^4(x_1-z_1)(i\partial\!\!\!/_{z_1} - m_0) - \Sigma(x_1,z_1)\big)S(z_1,x_2;y_1,y_2)\\
&\quad - \int d^4z_1\big(\delta^4(x_1-z_1)e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(z_1)} - \Sigma(x_1,z_1)\big)S(z_1,x_2;y_1,y_2)
\end{aligned}$$

これに $S^{-1}(z_2,x_2)$ を作用させると

$$\begin{aligned}
&\int d^4z_1 d^4x_2 S^{-1}(z_2,x_2)\big(\delta^4(x_1-z_1)(i\partial\!\!\!/_{z_1} - m_0) - \Sigma(x_1,z_1)\big)S(z_1,x_2;y_1,y_2)\\
&\qquad - \int d^4z_1 d^4x_2 S^{-1}(z_2,x_2)\big(\delta^4(x_1-z_1)e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(z_1)} - \Sigma(x_1,z_1)\big)S(z_1,x_2;y_1,y_2)\\
&= \int d^4z_1 d^4x_2 S^{-1}(z_2,x_2)S^{-1}(x_1,z_1)S(z_1,x_2;y_1,y_2) + \int d^4z_1 d^4x_2 V(x_1,x_2,z_1,z_2)S(z_1,x_2;y_1,y_2)
\end{aligned}$$

$V(x_1,x_2,z_1,z_2)$ を

$$V(x_1,x_2,z_1,z_2) = -S^{-1}(z_2,x_2)\big(\delta^4(x_1-z_1)e_0\gamma^\mu \frac{\delta}{i\delta J^\mu(z_1)} - \Sigma(x_1,z_1)\big)$$

としています。見やすくするために x_2 と z_2 の表記を入れ替えてやれば

$$\begin{aligned}
&\int d^4z_1 d^4z_2 S^{-1}(x_2,z_2)S^{-1}(x_1,z_1)S(z_1,z_2;y_1,y_2)\\
&\qquad = \delta^4(x_1-y_2)\delta^4(z_2-y_1) - \delta^4(x_1-y_1)\delta^4(z_2-y_2) - \int d^4z_1 d^4z_2 V(x_1,x_2,z_1,z_2)S(z_1,z_2;y_1,y_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

これは S^{-1} の形を考えれば $S(z_1, z_2; y_1, y_2)$ に対する微分方程式になっていることが分かると思います。この微分方程式がベーテ・サルピーター (Bethe-Salpeter) 方程式と呼ばれるものです。導出方法から分かるようにベーテ・サルピーター方程式は厳密な 4 点関数に対する方程式、もしくは違う言い方では、2 粒子伝播関数に対する方程式であることが分かります。

この形だと構造が分かりづらいので、左辺から S^{-1} をなくすために $S(v, x_1)S(w, x_2)$ を両辺に作用させます。左辺は

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1d^4x_2d^4z_1d^4z_2S^{-1}(x_2, z_2)S^{-1}(x_1, z_1)S(v, x_1)S(w, x_2)S(z_1, z_2; y_1, y_2)\\
&= \int d^4z_1d^4z_2\delta^4(v - z_1)\delta^4(w - z_2)S(z_1, z_2; y_1, y_2)\\
&= S(v, w; y_1, y_2)
\end{aligned}$$

右辺第一項は

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1d^4x_2\big[\delta^4(x_1 - y_2)\delta^4(x_2 - y_1)S(v, x_1)S(w, x_2) - \delta^4(x_1 - y_1)\delta^4(x_2 - y_2)S(v, x_1)S(w, x_2)\big]\\
&= S(v, y_2)S(w, y_1) - S(v, y_1)S(w, y_2)
\end{aligned}$$

右辺第二項はそのままで

$$\int d^4x_1d^4x_2d^4z_1d^4z_2S(v, x_1)S(w, x_2)V(x_1, x_2, z_1, z_2)S(z_1, z_2; y_1, y_2)$$

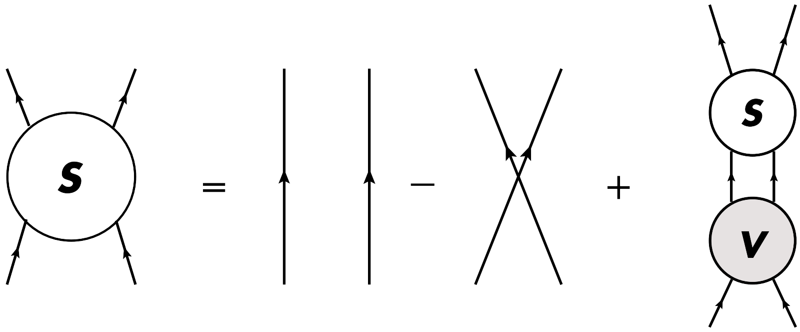
というわけで

$$\begin{aligned}
S(x_1, x_2; y_1, y_2; J) =&S(x_1, y_2; J)S(x_2, y_1; J) - S(x_1, y_1; J)S(x_2, y_2; J)\\
&- \int d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2S(x_1, v; J)S(x_2, w; J)V(v, w, z_1, z_2; J)S(z_1, z_2; y_1, y_2; J)
\end{aligned} \tag{3}$$

x_1, x_2 と v, w を入れ替えて書いています。$J_\mu = 0$ にすれば、源なしでの QED のベーテ・サルピーター方程式になります。伝播関数に i をつけるように書き換えれば

$$\begin{aligned}
S(x_1, x_2; y_1, y_2; J) =&iS(x_1, y_1; J)iS(x_2, y_2; J) - iS(x_1, y_2; J)iS(x_2, y_1; J)\\
&+ \int d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2iS(x_1, v; J)iS(x_2, w; J)V(v, w, z_1, z_2; J)S(z_1, z_2; y_1, y_2; J)
\end{aligned} \tag{4}$$

図にすれば



このようになっているのが分かると思います (V と S をつないでる線にはフェルミオンの伝播関数を対応させません)。同種粒子になっているので、第二項にクロスした図が現れ、フェルミオンのため符号が反転しています。これは電子-電子による 4 点関数 (2 粒子伝播関数) なので、電子-電子の束縛状態を表すことになります。

また、$S(x_1, x_2; y_1, y_2)$ の演算子表記は

$$S(x_1, x_2; y_1, y_2) = \langle 0|T\psi(x_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(y_2)\overline{\psi}(y_1)|0\rangle$$

これから、y_2, y_1 が伝播関数の出発点だと分かります。そして、最低次 (相互作用のない真空) だとしてウィックの定理を考えれば、$\psi(x_2)\overline{\psi}(y_1)$ と $\psi(x_1)\overline{\psi}(y_2)$ のときは一回入れ替えを行う必要があるのでマイナスがつき、$\psi(x_2)\overline{\psi}(y_2)$ と $\psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)$ のときは入れ替えを行う必要がないのでプラスになります。これはちゃんと (4) の第一項と第二項の符号と一致します。そのため、図にするときに、y_1 から x_1、y_2 から x_2 にいく方を交差しないように取りました。

ベーテ・サルピーター方程式で重要なのは V の部分です。今の式から V の詳細な構造を予想するのは無理ですが、K は既約な図になっていて、二つのフェルミオンの線を切っても disconnected になりません。なんでこんなことが言えるのかというと、この方程式は両辺に $S(z_1, z_2, y_1, y_2)$ がいるために、逐次的に解いていこうとすると

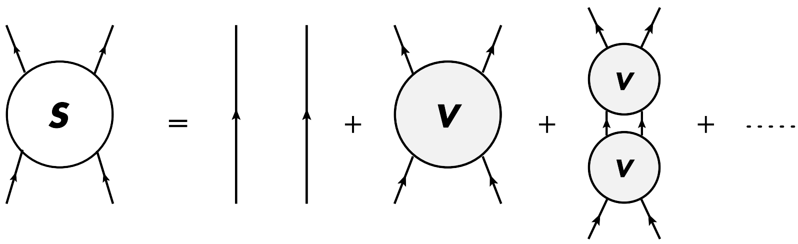


図 1

これの繰り返しになっているからです (後で可約の切り方を示しています)。このため、V を既約とすることで可約な図も含められます。つまり、ベーテ・サルピーター方程式における V は、2 粒子間の可能な相互作用の全オーダを含めた無限個の図になっています。この V をカーネル (kernel) と言ったりもします。

(4) の運動量表示を求めておきます (交差した項は無視します)。$S(x_1, x_2)$ のフーリエ変換は通常通りですが、$V(x_1, x_2, y_1, y_2), S(z_1, z_2; y_1, y_2)$ に対しては少しひねります。源が $\eta = \overline{\eta} = J_\mu = 0$ であれば並進不変だということを考えれば、$V(x_1, x_2, y_1, y_2), S(z_1, z_2; y_1, y_2)$ は位置の差による 3 つの変数に依存するはずです ($S(x_1, x_2)$ も $x_1 - x_2$ に依存する)。なので、

$$u_1 = x_1 - x_2$$

$$u_2 = y_1 - y_2$$

$$u_3 = \eta_1(x_1 - y_1) + \eta_2(x_2 - y_2)$$

の 3 つに依存するとします。z_3 は $(x_1 - y_1)$ と $(x_2 - y_2)$ による線形結合によって作っています。η_1, η_2 は

$$\eta_1 + \eta_2 = 1$$

となる実数だとします。ちなみに、x_1, y_1 側の粒子の質量を m_1、x_2, y_2 側の質量を m_2 として、η_1 を $m_1/(m_1+m_2)$、η_2 を $m_2/(m_1+m_2)$ のように思えば、重心座標のようになります。

これによってフーリエ変換を行うんですが、そのために使う関係を先に出しておくと

$$\begin{aligned}u_3 + \eta_2 u_1 - \eta_2 u_2 &= \eta_1(x_1 - y_1) + \eta_2(x_2 - y_2) + \eta_2 x_1 - \eta_2 x_2 - \eta_2 y_1 + \eta_2 y_2 \\ &= \eta_1(x_1 - y_1) + \eta_2 x_1 - \eta_2 y_1 \\ &= x_1 - y_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3 - \eta_1 u_1 + \eta_1 u_2 &= \eta_1(x_1 - y_1) + \eta_2(x_2 - y_2) - \eta_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \eta_1 y_1 - \eta_1 y_2 \\ &= \eta_2(x_2 - y_2) + \eta_1 x_2 - \eta_1 y_2 \\ &= x_2 - y_2\end{aligned}$$

(4) の左辺のフーリエ変換は

$$S^{(4)}(q_1, q_2, q_3) = \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(u_1, u_2, u_3) e^{iq_1u_1} e^{iq_2u_2} e^{iq_3u_3}$$

と作用させます (運動量表示だと伝播関数の表記と紛らわしくなりそうなので $S^{(4)}$ と書きます)。右辺第一項は

$$\int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(x_1,y_1)S(x_2,y_2)e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}$$

$$= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2}{(2\pi)^8}\int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(p_1)S(p_2)e^{-ip_1(x_1-y_1)}e^{-ip_2(x_2-y_2)}e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}$$

$$= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2}{(2\pi)^8}\int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(p_1)S(p_2)e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}$$

$$\times \exp[-ip_1(u_3+\eta_2u_1-\eta_2u_2)]\exp[-ip_2(u_3-\eta_1u_1+\eta_1u_2)]$$

$$= \int \frac{d^4p_1 d^4p_2}{(2\pi)^8}\int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(p_1)S(p_2)\exp[i(q_1-\eta_2p_1+\eta_1p_2)u_1]$$

$$\times \exp[i(q_2+\eta_2p_1-\eta_1p_2)u_2]\exp[-i(p_1+p_2-q_3)u_3]$$

$$= (2\pi)^4\int d^4p_1 d^4p_2 S(p_1)S(p_2)\delta^4(p_1+p_2-q_3)\delta^4(q_1-\eta_2p_1+\eta_1p_2)\delta^4(q_2+\eta_2p_1-\eta_1p_2)$$

$$= (2\pi)^4\int d^4p_2 S(q_3-p_2)S(p_2)\delta^4(q_1-\eta_2(q_3-p_2)+\eta_1p_2)\delta^4(q_2+\eta_2(q_3-p_2)-\eta_1p_2)$$

$$= (2\pi)^4\int d^4p_2(q_3-p_2)S(p_2)\delta^4(q_1-\eta_2q_3+p_2)\delta^4(q_2+\eta_2q_3-p_2)$$

$$= (2\pi)^4 S(q_3-q_2-\eta_2q_3)S(q_2+\eta_2q_3)\delta^4(q_1-\eta_2q_3+q_2+\eta_2q_3)$$

$$= (2\pi)^4 S(-q_2+\eta_1q_3)S(q_2+\eta_2q_3)\delta^4(q_1+q_2)$$

$$= S(-q_2+\eta_1q_3)S(q_2+\eta_2q_3)\delta^4(q_1+q_2)$$

第三項は

$$
\begin{aligned}
&\int d^4u_1d^4u_2d^4u_3d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}S(x_1-v)S(x_2-w)\\
&\quad\times V(v-w,z_1-z_2,\eta_1(v-z_1)+\eta_2(w-z_2))S(z_1-z_2,y_1-y_2,\eta_1(z_1-y_1)+\eta_2(z_2-y_2))\\
&=\int\frac{d^4p_1\cdots d^4k_3}{(2\pi)^{32}}\int d^4u_1d^4u_2d^4u_3d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2S(p_1)S(p_2)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3)\\
&\quad\times e^{-ip_1(x_1-v)}e^{-ip_2(x_2-w)}e^{-il_1(v-w)}e^{-il_2(z_1-z_2)}e^{-il_3(\eta_1(v-z_1)+\eta_2(w-z_2))}\\
&\quad\times e^{-ik_1(z_1-z_2)}e^{-ik_2(y_1-y_2)}e^{-ik_3(\eta_1(z_1-y_1)+\eta_2(z_2-y_2))}e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}\\
&=\int\frac{d^4p_1\cdots d^4k_3}{(2\pi)^{32}}\int d^4u_1d^4u_2d^4u_3d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2S(p_1)S(p_2)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3)\\
&\quad\times e^{-ip_1x_1}e^{ip_1v}e^{-ip_2x_2}e^{ip_2w}e^{-il_1v}e^{il_1w}e^{-i(l_2+k_1)(z_1-z_2)}e^{-ik_2(y_1-y_2)}\\
&\quad\times\exp[-i\eta_1l_3v+i\eta_1l_3z_1-i\eta_2l_3w+i\eta_2l_3z_2-i\eta_1k_3z_1+i\eta_1k_3y_1-i\eta_2k_3z_2+i\eta_2k_3y_2]\\
&\quad\times e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}\\
&=\int\frac{d^4p_1\cdots d^4k_3}{(2\pi)^{32}}\int d^4u_1d^4u_2d^4u_3d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2S(p_1)S(p_2)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3)\\
&\quad\times e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}e^{i(p_1-l_1)v}e^{i(p_2+l_1)w}e^{-i(l_2+k_1)z_1}e^{i(l_2+k_1)z_2}e^{-ik_2u_2}\\
&\quad\times\exp[-i\eta_1l_3v+i\eta_1l_3z_1-i\eta_2l_3w+i\eta_2l_3z_2-i\eta_1k_3z_1+i\eta_1k_3y_1-i\eta_2k_3z_2+i\eta_2k_3y_2]\\
&\quad\times e^{iq_1u_1}e^{iq_2u_2}e^{iq_3u_3}\\
&=\int\frac{d^4p_1\cdots d^4k_3}{(2\pi)^{32}}\int d^4u_1d^4u_2d^4u_3d^4vd^4wd^4z_1d^4z_2S(p_1)S(p_2)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3)\\
&\quad\times e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}e^{i\eta_1k_3y_1}e^{i\eta_2k_3y_2}e^{iq_1u_1}e^{i(q_2-k_2)u_2}e^{iq_3u_3}\\
&\quad\times\exp[i(p_1-l_1-\eta_1l_3)v]\exp[i(p_2+l_1-\eta_2l_3)w]\exp[-i(k_1+l_2-\eta_1l_3+\eta_1k_3)z_1]\\
&\quad\times\exp[i(k_1+l_2+\eta_2l_3-\eta_2k_3)z_2]
\end{aligned}
$$

このままだと、$x_1,\cdots,y_2$ を u_1,u_2,u_3 に書き換えられませんが、他の積分を落としていくと書き換えられるようになります。続けていくと

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^4p_1 \cdots d^4k_3}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(p_1)S(p_2)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad \times e^{-ip_1x_1}e^{-ip_2x_2}e^{i\eta_1k_3y_1}e^{i\eta_2k_3y_2}e^{iq_1u_1}e^{i(q_2-k_2)u_2}e^{iq_3u_3} \\
&\quad \times \delta^4(p_1-l_1-\eta_1l_3)\delta^4(p_2+l_1-\eta_2l_3)\delta^4(k_1+l_2-\eta_1l_3+\eta_1k_3)\delta^4(k_1+l_2+\eta_2l_3-\eta_2k_3) \\
&= \int \frac{d^4l_1 \cdots d^4k_3}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(l_1+\eta_1l_3)S(-l_1+\eta_2l_3)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad \times e^{-i(l_1+\eta_1l_3)x_1}e^{-i(-l_1+\eta_2l_3)x_2}e^{i\eta_1k_3y_1}e^{i\eta_2k_3y_2}e^{iq_1u_1}e^{i(q_2-k_2)u_2}e^{iq_3u_3} \\
&\quad \times \delta^4(k_1+l_2-\eta_1l_3+\eta_1k_3)\delta^4(k_1+l_2+\eta_2l_3-\eta_2k_3) \\
&= \int \frac{d^4l_1 \cdots d^4k_3}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(l_1+\eta_1l_3)S(-l_1+\eta_2l_3)V(l_1,l_2,l_3)S(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad \times e^{-i(x_1-x_2)l_1}e^{-i(\eta_1x_1+\eta_2x_2)l_3}e^{i(\eta_1y_1+\eta_2y_2)k_3}e^{iq_1u_1}e^{i(q_2-k_2)u_2}e^{iq_3u_3} \\
&\quad \times \delta^4(k_1+l_2-\eta_1l_3+\eta_1k_3)\delta^4(k_1+l_2+\eta_2l_3-\eta_2k_3) \\
&= \int \frac{d^4l_1d^4l_2d^4l_3d^4k_2d^4k_3}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 \\
&\quad \times S(l_1+\eta_1l_3)S(-l_1+\eta_2l_3)V(l_1,l_2,l_3)S(-l_2+\eta_1l_3-\eta_1k_3,k_2,k_3) \\
&\quad \times e^{-i(l_1-q_1)u_1}e^{-i(\eta_1x_1+\eta_2x_2)l_3}e^{i(\eta_1y_1+\eta_2y_2)k_3}e^{i(q_2-k_2)u_2}e^{iq_3u_3} \\
&\quad \times \delta^4(-l_2+\eta_1l_3-\eta_1k_3+l_2+\eta_2l_3-\eta_2k_3)
\end{aligned}
$$

これで、$x_1,\cdots,y_2$ は全部 u_1,u_2,u_3 に書き換えられて

$$\int \frac{d^4l_1 d^4l_2 d^4l_3 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 \delta^4(l_3 - k_3)$$

$$\times S(l_1 + \eta_1 l_3) S(-l_1 + \eta_2 l_3) V(l_1, l_2, l_3) S(-l_2 + \eta_1 l_3 - \eta_1 k_3, k_2, k_3)$$

$$\times e^{-i(l_1 - q_1)u_1} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2) l_3} e^{i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2) k_3} e^{i(q_2 - k_2) u_2} e^{i q_3 u_3}$$

$$= \int \frac{d^4l_1 d^4l_2 d^4l_3 d^4k_2}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3$$

$$\times S(l_1 + \eta_1 l_3) S(-l_1 + \eta_2 l_3) V(l_1, l_2, l_3) S(-l_2 + \eta_1 l_3 - \eta_1 l_3, k_2, l_3)$$

$$\times e^{-i(l_1 - q_1)u_1} e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2) l_3} e^{i(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2) l_3} e^{i(q_2 - k_2) u_2} e^{i q_3 u_3}$$

$$= \int \frac{d^4l_1 d^4l_2 d^4l_3 d^4k_2}{(2\pi)^{16}} \int d^4u_1 d^4u_2 d^4u_3 S(l_1 + \eta_1 l_3) S(-l_1 + \eta_2 l_3) V(l_1, l_2, l_3) S(-l_2, k_2, l_3)$$

$$\times e^{-i(l_1 - q_1)u_1} e^{i(q_2 - k_2)u_2} e^{-i(l_3 - q_3)u_3}$$

$$= \int \frac{d^4l_1 d^4l_2 d^4l_3 d^4k_2}{(2\pi)^4} S(l_1 + \eta_1 l_3) S(-l_1 + \eta_2 l_3) V(l_1, l_2, l_3) S(-l_2, k_2, l_3)$$

$$\times \delta^4(l_1 - q_1) \delta^4(q_2 - k_2) \delta^4(l_3 - q_3)$$

$$= \int \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4} S(q_1 + \eta_1 q_3) S(-q_1 + \eta_2 q_3) V(q_1, l_2, q_3) S(-l_2, q_2, q_3)$$

よって

$$S(q_1, q_2, q_3) = iS(q_1 + \eta_1 q_3) iS(-q_1 + \eta_2 q_3) \delta^4(q_1 + q_2)$$
$$+ \int \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4} iS(q_1 + \eta_1 q_3) iS(-q_1 + \eta_2 q_3) V(q_1, l_2, q_3) S(-l_2, q_2, q_3)$$

これが運動量表示の式になります。$\delta^4(q_1 + q_2)$ や $-l_2$ となっているのが気持ち悪かったら、u_2 を $u_2 = -(y_1 - y_2)$ として同じことをすれば $\delta^4(q_1 - q_2), l_2$ となります。

次に CJT 有効作用からの導出を示します。この方法の利点は connected な形で式が作れる点です。生成汎関数として

$$Z[K] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp[iS + i \int d^4x d^4y \psi_b(x) \overline{\psi}_a(y) K_{ab}(y, x)]$$

とします。$K(x, y)$ が複合場に対する源で、電磁場の部分と通常の源による項は無関係なので省略しています。S は作用です。ここではフェルミオンの伝播関数に対しては $G(x, y)$ と書き、この方法のとき伝播関数の i を分離して書くと面倒なので、定義を変えて伝播関数には i を含めて定義します $(G(x, y) = iS(x, y))$。
添え字の a, b はスピノール成分ですが、これ以降省略していきます。この生成汎関数による CJT 有効作用 $\Gamma[\psi_c, \overline{\psi}_c, G]$ のルジャンドル変換による定義を

$$\Gamma[\psi_c, \overline{\psi}_c, G] = W[\eta, \overline{\eta}, J_\mu, K] - \int d^4x d^4y \psi_c(x) \overline{\psi}_c(y) K(y, x) - \mathrm{tr} \int d^4x d^4y G_{con}(x, y) K(y, x)$$

$$\psi_c = \langle 0|\psi|0\rangle_K \ , \ \overline{\psi}_c = \langle 0|\overline{\psi}|0\rangle_K$$

とします。$G_{con}(x,y)$ は connected なものを表します (源 K を 0 にしないときは $G_{con}(x,y;K)$ ですが省略します)。tr はスピノールに対するものです。この式から $W[K]$ と $\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]$ に対する汎関数微分は

$$\frac{\delta W[K]}{\delta K(y,x)} = \psi_c(x)\overline{\psi}_c(y) + G_{con}(x,y)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(y,x)} = -K(x,y)$$

これを使ってやることで

$$\begin{aligned}
&\int d^4xd^4y \frac{\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G_{con}(x_1,y_1)\delta G_{con}(x,y)}\frac{\delta^2 W[K]}{\delta K(y,x)\delta K(x_2,y_2)} \\
&= \int d^4xd^4y \frac{-\delta K(y,x)}{\delta G_{con}(x_1,y_1)}\frac{\delta G_{con}(y_2,x_2)}{\delta K(y,x)} \\
&= -\frac{\delta G_{con}(y_2,x_2)}{\delta G_{con}(x_1,y_1)} \\
&= -\delta^4(y_2-x_1)\delta(x_2-y_1)
\end{aligned}$$

この関係は明らかに頂点関数と自己エネルギーは逆の関係になっているという式の 4 点関数版だと予想できます。

そうなっているのか実際に見るために $W[K]$ の K による汎関数微分がなんなのか求めます。素直に汎関数微分をしていくと

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 W[K]}{\delta K(x_1,y_1)\delta K(x_2,y_2)}|_{K=0} &= -i\frac{\delta^2\log Z[K]}{\delta K(x_1,y_1)\delta K(x_2,y_2)}|_{K=0} \\
&= -i\frac{\delta}{\delta K(x_1,y_1)}\frac{\delta \log Z[K]}{\delta Z}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(x_2,y_2)}|_{K=0} \\
&= -i\frac{\delta}{\delta K(x_1,y_1)}\left(\frac{1}{Z[K]}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(x_2,y_2)}\right)|_{K=0} \\
&= i\frac{1}{Z^2[K]}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(x_1,y_1)}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(x_2,y_2)}|_{K=0} - \frac{i}{Z[K]}\frac{\delta^2 Z[K]}{\delta K(x_1,y_1)\delta K(x_2,y_2)}|_{K=0}
\end{aligned}$$

そして

$$\frac{\delta W[K]}{\delta K(x,y)}|_{K=0} = \frac{1}{Z[K]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(x,y)}|_{K=0} = \frac{1}{Z[K]}G(y,x) = G_{con}(y,x)$$

とするなら

$$\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W[K]}{\delta K(y_1,x_1)\delta K(y_2,x_2)}|_{K=0} =\frac{1}{Z[K]}\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z[K]}{\delta K(y_1,x_1)\delta K(y_2,x_2)}|_{K=0} - \frac{1}{Z^2[K]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(y_1,x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[K]}{\delta K(y_2,x_2)}|_{K=0}$$

$$G_{con}(x_1,y_1;x_2,y_2) =\frac{1}{Z[K]}G(x_1,y_1;x_2,y_2) - \frac{1}{Z^2[K]}G(x_1,y_1)G(x_2,y_2)$$

よって $W[K]$ の K による 2 階汎関数微分は connected な 2 粒子伝播関数を作ることが分かります。このときの $G(x_1,y_1;x_2,y_2)$ と $G(x,y)$ の演算子による定義は K で汎関数微分していることから

$$G(x_1,y_1;x_2,y_2) = \langle T\psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(y_2)\rangle$$

$$G(x,y) = \langle T\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle$$

となります。最初に求めた場合と場の並びが異なっていることに注意してください。また、$G(x_1,y_1;y_2,x_2)$ の変数の並びは演算子にしたときの並びに対応するように書いています。

というわけで、$\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]/\delta G_{con}(x_1,y_1)\delta G_{con}(x,y)$ は 2 粒子伝播関数 $G_{con}(x,y;x_2,y_2)$ の逆になっていると言うことができます。そして、$G(x_1,y_1;y_2,x_2)$ から $G(x_1,y_1)G(y_2,x_2)$ を引くことで connected になるということから、y_1 から x_1、x_2 から y_2 に行くような線は $G_{con}(x_1,y_1;y_2,x_2)$ の中に含まれていないことになります。

この伝播関数の定義によって書くと (ここからは con を省略します)

$$\begin{aligned}\int d^4xd^4y\frac{i\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\frac{1}{i}\frac{\delta^2 W[K]}{\delta K(y,x)\delta K(y_2,x_2)} &= \int d^4xd^4y\frac{i\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}G(x,y;x_2,y_2)\\ &= -\delta^4(x_2-x_1)\delta^4(y_2-y_1)\end{aligned}$$

つまり、$i\delta^2\Gamma[\phi_c,G]/\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)$ が $G(x,y,y_2,x_2)$ の逆に対応し

$$\Gamma^{(4)}(x_1,y_1;x,y) = -\frac{i\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}$$

という記号を定義すれば

$$\int d^4xd^4y\Gamma^{(4)}(x_1,y_1,x,y)G(x,y;x_2,y_2) = \delta^4(x_2-x_1)\delta^4(y_2-y_1)$$

これは $G(x,y;x_2,y_2)$ に対する方程式を与えているので、ベーテ・サルピーター方程式です。

上で見てきたような形にするために、フェルミオンの CJT 有効作用

$$\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G] = S[\psi_c,\overline{\psi}_c] - i\mathrm{tr}\log G^{-1} - i\mathrm{tr}\Delta^{-1}G + \Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G] + const$$

を使って汎関数微分していきます。そうすると

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^2\Gamma[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)} &= \frac{\delta^2}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}(S[\psi_c,\overline{\psi}_c] - i\mathrm{tr}\log G^{-1} - i\mathrm{tr}\Delta^{-1}G + \Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G])\\
&= -i\int d^4x' \frac{\delta^2}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\log G^{-1}(x') + \frac{\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\\
&= i\frac{\delta}{\delta G(x_1,y_1)}G^{-1}(y,x) + \frac{\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\\
&= -i\int d^4z_1d^4z_2G^{-1}(y,z_2)\frac{\delta G(z_2,z_1)}{\delta G(x_1,y_1)}G^{-1}(z_1,x) + \frac{\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\\
&= -i\int d^4z_1d^4z_2G^{-1}(y,z_2)\delta^4(z_2-x_1)\delta^4(z_1-y_1)G^{-1}(z_1,x) + \frac{\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}\\
&= -iG^{-1}(y,x_1)G^{-1}(y_1,x) + \frac{\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}
\end{aligned}
$$

スピノール成分のトレースがどうなっているのかちゃんと見るべきですが、結局この形になるので省きます。途中で汎関数の逆に対する汎関数微分の関係

$$
\frac{\delta}{\delta A(y)}F^{-1}(x,y) = -\int d^4z_1d^4z_2F^{-1}(x,z_2)\frac{\delta F(z_2,z_1)}{\delta A(y)}F^{-1}(z_1,y)
$$

を使っています。これを入れることで

$$
\int d^4xd^4y[G^{-1}(y,x_1)G^{-1}(y_1,x) + \frac{i\delta^2\Gamma_2[\psi_c,\overline{\psi}_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}]G(x,y;x_2,y_2) = -\delta^4(x_2-x_1)\delta^4(y_2-y_1)
$$

これを変形させるために、両辺に $G(x_1,z_1)G(z_2,y_1)$ をかけて x_1,y_1 で積分します。左辺第一項は

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x_1d^4y_1d^4xd^4yG^{-1}(y,x_1)G^{-1}(y_1,x)G(x,y;y_2,x_2)G(x_1,z_1)G(z_2,y_1)\\
&= \int d^4xd^4y\delta^4(y-z_1)\delta^4(x-z_2)G(x,y;x_2,y_2)\\
&= G(z_2,z_1,x_2,y_2)
\end{aligned}
$$

左辺第二項は

$$
\int d^4x_1d^4y_1d^4xd^4yG(x_1,z_1)G(z_2,y_1)\frac{i\delta^2\Gamma_2[\phi_c,G]}{\delta G(x_1,y_1)\delta G(x,y)}G(x,y;x_2,y_2)
$$

右辺は

$$
-\int d^4x_1d^4y_1\delta^4(x_2-x_1)\delta^4(y_2-y_1)G(x_1,z_1)G(z_2,y_1) = -G(x_2,z_1)G(z_2,y_2)
$$

よって z_2 を x_1、z_1 を y_1 に書き換えてやれば

$$G(x_1,y_1,x_2,y_2)=-G(x_2,y_1)G(x_1,y_2)-\int d^4z_1d^4z_2d^4xd^4yG(x_1,z_1)G(z_2,y_1)\frac{i\delta^2\Gamma_2[\phi_c,G]}{\delta G(z_1,z_2)\delta G(x,y)}G(x,y,x_2,y_2)$$

上での形と同じようなものが求まります。今の場合は、左辺が

$$G(x_1,y_1;x_2,y_2)=\langle T\psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(y_2)\rangle$$

となっているので、y_1 から x_2 と y_2 から x_1 はファインマン図にすれば向きが逆になっています。つまり、右辺第一項は明らかにフェルミオン-反フェルミオン (電子-陽電子) の組み合わせになります。よってフェルミオン-反フェルミオンの束縛状態に対する 2 粒子伝播関数の式になっていることが分かります。また、$V(x_1,x_2;y_1,y_2)$ が 2 ループ以上のファインマン図を伝播関数で 2 階汎関数微分したものになっていることが分かります。

フェルミオン-反フェルミオンになるように求めてきましたが、フェルミオン-フェルミオンの場合も求められます。そのためには、生成汎関数を

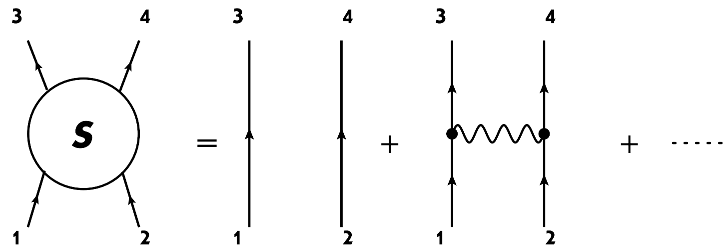
$$Z[K]=\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}A_\mu\exp[iS+i\int d^4xd^4y\psi(x)\psi(y)K(y,x)+i\int d^4xd^4y\overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y)K'(y,x)]$$

とすればいいです。こうすれば汎関数微分によって

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2)=\langle T\psi(x_1)\psi(x_2)\overline{\psi}(y_1)\overline{\psi}(y_2)\rangle$$

を作ることができます。

最後の求め方としてファインマン図からの解析だけで求めてやります。知りたいフェルミオンによる 2 粒子伝播関数 $S(x_3,x_4;x_1,x_2)$ は、摂動展開的に考えれば、ファインマン図によって



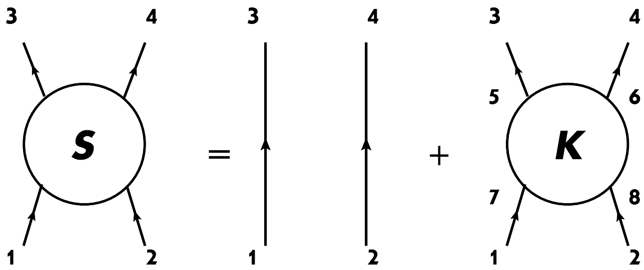
このように与えられます (2 つのフェルミオンは区別できるとしますが、害がないので区別した表記を使いません)。最低次でのものは単にフェルミオンの伝播関数がいるだけなので

$$iS_F(x_3,x_1)iS_F(x_4,x_2)$$

となります ($iS_F(x,y)$ は最低次でのフェルミオン伝播関数を表します)。次の光子が間に 1 個いるものは、位置表示でのファインマン則 (「相関関数のフィアンマン則」参照) から

$$\int d^4x_5d^4x_6iS_F(x_3,x_5)iS_F(x_4,x_6)[(-ie\gamma_\mu)iD_F^{\mu\nu}(x_5,x_6)(-ie\gamma_\nu)]iS_F(x_5,x_1)iS_F(x_6,x_2)\tag{5}$$

ここまでは発散もない簡単な式なんですが、これより高いオーダになるにつれどんどん面倒になっていきます。で、今はそんな摂動展開はどうでもいいので、最低次以外のオーダを形式的に表現するようにします。つまり、図的に言えば



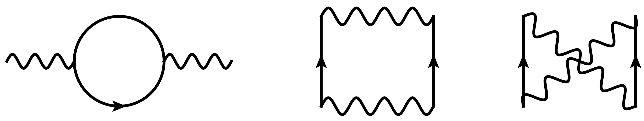
こんな風に考えます。そうすれば単純に

$$
\begin{aligned}
S(x_3,x_4,x_1,x_2) &= iS_F(x_3,x_1)iS_F(x_4,x_2)\\
&\quad + \int d^4x_5d^4x_6d^4x_7d^4x_8 iS_F(x_3,x_5)iS_F(x_4,x_6)K(x_5,x_6;x_7,x_8)iS_F(x_7,x_1)iS_F(x_8,x_2)
\end{aligned}
$$

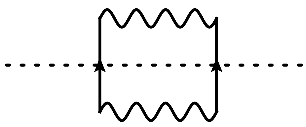
こんな式になります。最低次での $K(x_5,x_6;x_7,x_8)$ は当然 (5) に対応するので

$$
K(x_5,x_6;x_7,x_8) = (-ie\gamma_\mu)iD_F^{\mu\nu}(x_5,x_6)(-ie\gamma_\nu)\delta^4(x_5-\delta_7)\delta^4(x_6-x_8) \tag{6}
$$

となります (デルタ関数で x_7 と x_8 の積分を潰します)。このようにして作った K には全ての可能な相互作用部分の図が含まれています。いくつか示せば

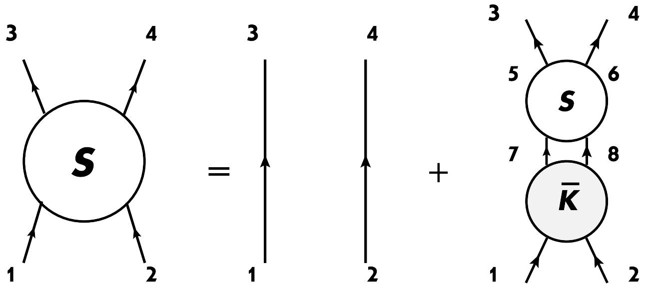


こんなのです。この中には明らかに可約な図も紛れ込んでいます。今の場合はフェルミオンの線を 2 つ切ったときに分離できるかできないかで判別するので、例えば



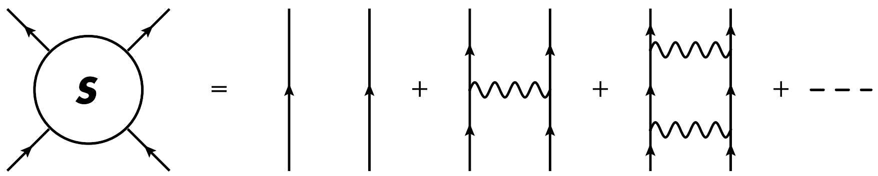
このように切って二つの disconnected な図に分離できるなら可約です。

そうすると自己エネルギーと同じ発想をすれば既約な図だけを含む $\overline{K}$ を使って



こんな形に書けるはずです。これは最初のやり方のところで示した図 1 と同じ逐次的な形を使って書くことができます (実際に逐次的に $\overline{K}$ を S に入れていけば一致することが図的に分かると思います)。これで図的に上でのものと一致し、V と $\overline{K}$ は同一のものです。フェルミオンの伝播関数が最低次と厳密なものとの差がありますが、カーネルとは無関係なので重要な差ではないです (こっちでは摂動論的に作ったために最低次になっているだけ)。また、クロスしている図がないのは粒子を区別しているからです。というわけで、このように摂動論的な図の解析によって簡単にベーテ・サルピーター方程式を導くことができます。

3 つの方法でベーテ・サルピーター方程式を求めてきましたが、この方程式は厳密に解くことは難しいです。そのため近似を行うんですが、一番単純なのがはしご (ladder) 近似です。これはシュウィンガー・ダイソン方程式のときも使っていた近似で、光子伝播関数と頂点を最低次のものに変えるというものです。ベーテ・サルピーター方程式の場合は、カーネル V の部分にこの近似を適用させます ((6) のこと)。つまり、図 1 において V が 1 個の光子の伝播関数の交換でしかないとするので



この図からだと、なんではしご近似と呼ばれるのかが視覚的に分かると思います。