電磁気の単位系

電磁気を扱うときに混乱を起こす単位系について見ていきます。

力学での単位をまとめておきます。運動方程式は、長さ (位置)、質量、時間で構成されています。長さの次元を L、質量を M、時間を T とすれば、力の次元は ML/T^2 です。なので、力学では質量、長さ、時間の単位を決めて、余計な比例定数が出てこないように力を与えればいいです。通常は長さはメートル m、質量はキログラム kg、時間は秒 s とする MKS 単位系が使われます。また、力にはニュートン $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$ が使われ、質量 1[kg] を 1[m/s^2] で加速させる力が 1[N] と定義されています。

電磁気を見ていきます。クーロンの法則から、点電荷 Q_1 が r 離れている Q_t へ作用する力は

$$F_e = \alpha \frac{Q_1 Q_t}{r^2}$$

α は比例定数です。F_e は力なので次元は ML/T^2 です。しかし、点電荷の次元は力学から与えられないので、右辺ではっきりしているのは r^2 による $1/L^2$ だけです。このため、電荷をどう定義するか、もしくは比例定数をどう決めるかが任意です。

磁場は電流から作られるので、電荷の任意性の影響を受けます。直線の定常電流 I_1 が I_t に作用する力は、ビオ・サバールの法則から

$$f_m = 2\beta_m \frac{I_1 I_t}{r}$$

β_m は比例定数です。直線の長さで割って、f_m を単位長さあたりの力にしています。電流は電荷によるので、この場合も右辺ではっきりしているのは位置 r による $1/L$ だけです。

電場は $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/Q$ と定義されているので、α, Q によってそのまま決まります。しかし、磁場は f_m/I に比例するとしか定義されていないので、比例定数が出てきます。その比例定数を β_b として

$$B = \beta_b \frac{f_m}{I_t} = 2\beta_m \beta_b \frac{I_1}{r}$$

この変更でローレンツ力に β_b が現れます。$\beta = \beta_m \beta_b$ とします。

F_e/f_m は長さの次元で

$$\frac{F_e}{f_m} = \frac{\alpha}{2\beta_m} \frac{Q_1 Q_2}{I_1 I_2} \frac{1}{r}$$

α と β_m を除いた次元は T^2/L で、α/β_m の次元は L^2/T^2 です。これは速度の次元の 2 乗です。

次元を { } で表記します。例えば、電荷の次元を $\{Q\}$、電流を $\{I\}$ とします。電流は単位時間あたりの電荷なので $\{I\} = \{Q\}/T$ です。また、$\sqrt{\alpha/\beta_m}$ の次元は速度なので $\{v\} = L/T$ とします。

β_b がローレンツ力に出てくることを見ます。電場の次元を $\{E\}$ とすれば、F_e から

$$\{E\} = \{\alpha\} \frac{\{Q\}}{L^2} = \{\alpha\} \frac{\{Q\}T}{L^2 T} = \{\alpha\} \frac{\{I\}T}{L^2} = \{\alpha\} \frac{\{I\}T}{L^2} \frac{\{v\}}{\{v\}} = \{\alpha\} \frac{\{I\}}{\{v\}} \frac{1}{L}$$

磁場の次元 $\{B\}$ は f_m から

$$\{B\} = \{\beta_m\}\{\beta_b\}\frac{\{I\}}{L} = \{\beta_m\}\{\beta_b\}\frac{\{E\}\{v\}}{\{\alpha\}} = \{\beta_m\}\{\beta_b\}\frac{\{E\}\{v\}^2}{\{\alpha\}\{v\}} = \{\beta_b\}\frac{\{E\}}{\{v\}}$$

そうすると、ローレンツ力の磁場と速度の積なので、次元は

$$\{Q\}(\{E\} + \{\beta_b\}\{E\})$$

なので、$\{\beta_b\}$ を消すために $Q(\boldsymbol{E} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ となります。

さらに、ファラデーの法則から電場と磁場の関係が与えられています。ファラデーの法則は、起電力は磁束の時間変化に比例する、です。比例定数は磁場のローレンツ力による起電力から与えられるので

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$1/\beta_b$ でなく新しい比例定数を導入しても実験結果から結局 $1/\beta_b$ になります。

というわけで、マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\rho\ ,\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\beta_m\beta_b}{\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi\beta_m\beta_b\boldsymbol{j}$$

もしくは、$\beta_b^{-1}\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{B}'$ と定義してしまえば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\rho\ ,\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}' = 0\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t}\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{B}' - \frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi\beta_m\boldsymbol{j}$$

ローレンツ力も $Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}')$ となり β_b は消せます。

ここで、$\rho = \boldsymbol{j} = 0$ とします（電荷と電流が分布していない領域)。このとき

$$\frac{\beta_m\beta_b}{\alpha}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\beta_b\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$$

x 成分では

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= -(\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}))_x \\
&= -(\frac{\partial}{\partial y}(\nabla \times \boldsymbol{E})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \times \boldsymbol{E})_y) \\
&= -(\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x})) \\
&= -((\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x})) \\
&= -(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x})
\end{aligned}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ から

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z})=\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial z}=0$$

なので

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}&=\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\\&=\nabla^2 E_x\end{aligned}$$

他の成分も同様で、

$$\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\nabla^2\boldsymbol{E}$$

磁場でも同じ式になり、電場と磁場は波動方程式に従います (「電磁波」参照)。実験から、光速を c として

$$\frac{\beta_m}{\alpha}=\frac{1}{c^2}$$

となっています。$\alpha=c^2\beta_m$ なので、α か β_m を消せますが両方残しておきます。

単位と比例定数を決めます。主な単位系である、SI、CGS-esu、CGS-emu、CGS ガウス単位系、ヘヴィサイド・ローレンツ単位系を求めます。

長さ、質量、時間は MKS 単位系とし、新しく電流の単位を定義します。その電流の単位をアンペア (ampere)A と呼び、2 つの電流間に作用する力に対して

$$f_m[\mathrm{N/m}]=2\times10^{-7}\frac{1[\mathrm{A}^2]}{1[\mathrm{m}]}$$

と定義されます。つまり、1[m] 離れた電流間に働く力が 2×10^{-7}[N/m] のとき 1[A] の電流が流れているとされます。電流の単位が与えられたので電荷の単位も決まり、クーロン (coulomb)C と呼ばれ、$1\mathrm{C}=1[\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}]$ です。電流は L,M,T に新しく加わる次元として扱われます。

β_m は

$$f_m=2\beta_m\frac{I_1I_t}{r}\ \Leftrightarrow\ 2\times10^{-7}\frac{I_1I_t}{r}\tag{1}$$

と対応させるので、$\mu_0=4\pi\times10^{-7}[\mathrm{N/A}^2]$ と定義して

$$\beta_m=\frac{\mu_0}{4\pi}\ ,\ \alpha=c^2\beta_m=\frac{c^2\mu_0}{4\pi}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\qquad(\epsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2})$$

β_b は

$$B = 2\beta_b \frac{f_m}{I_t} = 2\beta_m \beta_b \frac{I_1}{r} = \beta_b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r} \;\Leftrightarrow\; f_m[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1[\mathrm{A}^2]}{1[\mathrm{m}]}$$

から、$\beta_b = 1$ です。ϵ_0 は真空の誘電率 (permittivity)、μ_0 は真空の透磁率 (permeability）と呼ばれます。

このように単位を決めるとマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \;,\; \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \;,\; \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \;,\; \nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

ローレンツ力は $Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ です。電場、磁場の次元は電流の次元を A として

$$\{E\} = \{\alpha\}\frac{\{Q\}}{L^2} = \frac{NL^2}{A^2T^2}\frac{AT}{L^2} = \frac{LM}{AT^3} \quad (N = \frac{LM}{T^2})$$
$$\{B\} = \{\beta_m\}\{\beta_b\}\frac{\{Q\}}{LT} = \{\beta_b\}\{E\}\frac{T}{L} = \frac{M}{AT^2}$$

となります。このときは国際単位系 (international system of units)、略して SI と呼ばれます。また、SI には熱力学などの量も含まれているので、電磁気では MKSA 単位系と言うこともあります (MKS に A が加わるだけだから)。電流の次元を新しく加えるのは SI だけで、他は L, M, T で次元を与えます。

電場の単位はクーロンを使って

$$\{E\} = \frac{LM}{AT^3} = \frac{1}{AT}\frac{1}{L}\frac{L^2M}{T^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{1[\mathrm{C}]}\frac{1}{1[\mathrm{m}]}1[\mathrm{J}] = \frac{1[\mathrm{J}]}{1[\mathrm{C}]}\frac{1}{1[\mathrm{m}]} = \frac{1[\mathrm{V}]}{1[\mathrm{m}]}$$

と与えられ、V をボルト (bolt) と呼びます。$\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ はジュールです。電位ポテンシャルは

$$V = \alpha\frac{Q_1}{r} \quad (E = \alpha\frac{Q_1}{r^2})$$

なので、ボルトは電位ポテンシャルの単位に使われます。また、クーロン力から見ると

$$F_e = Q_t E \;\Rightarrow\; 1[\mathrm{N}] = 1[\mathrm{C}] \times 1[\mathrm{V/m}]$$

このため、$1[\mathrm{J}] = 1[\mathrm{C} \cdot \mathrm{V}]$ です。磁場の単位であるテスラ (tesla)T は

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r} \;\Rightarrow\; 1[\mathrm{T}] = 2 \times 10^{-7}\frac{(2 \times 10^{-7})^{-1}[\mathrm{A}]}{1[\mathrm{m}]} = 2 \times 10^{-7}\frac{5 \times 10^6[\mathrm{A}]}{1[\mathrm{m}]} \tag{2}$$

と定義されます。つまり、$5 \times 10^6[\mathrm{A}]$ の電流から 1[m] 離れた地点での値を 1[T] としています。

注意ですが、2019 年 5 月 20 日に SI の定義が新しくなり、アンペアの定義が変更されました。定義が変わっただけで、値そのものの大きな変更はないです。新しい定義では電子の電荷の絶対値 (素電荷、電気素量)e の値 $1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}[\mathrm{C}]$ を与えられたものとし（新しい SI では素電荷は定義された値)、それによって 1[A] を定義しています。この定義では 1[A] は

$$1[\mathrm{A}] = \frac{e}{1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}}[\mathrm{s}^{-1}]$$

となります。新しい SI では素電荷が定義された値となり、ϵ_0, μ_0 は定義された値ではなくなっています。

MKS 単位系でなく、長さの単位をセンチメートル cm、質量をグラム g、時間を秒 s とする CGS 単位系に対応する単位がいくつも与えられています。CGS 単位系での力にはダイン dyn が使われ $\mathrm{dyn} = \mathrm{cm} \cdot \mathrm{g/s}^2$ です。MKS と CGS は基準となる大きさが違うだけなので、どちらを選んでも式は変更されません。

$\beta_m = 1$ として、SI と同じように

$$f_m = 2\frac{I^2}{1[\mathrm{cm}]} = 2[\mathrm{dyn/cm}]$$

として電流の単位を定義します。これに対応してアブアンペア (abampere)abA という単位を作り、$[\mathrm{abA}] = [\mathrm{dyn}^{1/2}]$ と与えます。対応する電荷の単位は $1[\mathrm{dyn}^{1/2}]$ で 1 秒間に流れる電荷として定義し、それをアブクーロン abC と呼びます。なので、アブクーロンは $[\mathrm{abC}] = [\mathrm{abA} \cdot \mathrm{s}] = [\mathrm{dyn}^{1/2} \cdot \mathrm{s}]$ となります。また、電荷の次元は $L^{1/2}M^{1/2}$ です

$\beta_m = 1$ $(\alpha = c^2)$ では

$$B = 2\beta_b \frac{f_m}{I_t} = 2\beta_b \frac{I_1}{r} \;\Leftrightarrow\; f_m = 2\frac{I^2}{1[\mathrm{cm}]} = 2[\mathrm{dyn/cm}] \tag{3}$$

なので、$\beta_b = 1$ となり、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi c^2 \rho \ , \ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ , \ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi \boldsymbol{j}$$

ローレンツ力は $Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ です。電場、磁場の次元は

$$\{E\} = \{\alpha\}\frac{\{Q\}}{L^2} = \frac{L^2}{T^2}\frac{L^{1/2}M^{1/2}}{L^2} = \frac{L^{1/2}M^{1/2}}{T^2}$$
$$\{B\} = \{\beta_b\}\{E\}\frac{T}{L} = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2}T}$$

となります。このときは CGS 電磁単位系、略して CGS-emu(electromagnetic units) と呼ばれます。ちなみに、電流の次元に書き換えると SI と一致します。これは μ_0 が L, M, T では無次元だからです。

電場の単位は単純に dyn を使って $[\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{s}]$ と与えられます。電位ポテンシャルの次元は $\{E\}$ に L をかけたものなので $L^{3/2}M^{1/2}/T^2$ となり、ボルトに対応するアブボルト (abvolt)abV は

$$1[\mathrm{abV}] = 1[\mathrm{dyn}^{1/2} \cdot \mathrm{cm/s}]$$

と定義されます。磁場でも同様に単位は $[\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}]$ と与えられ、これをガウス (gauss)G として

$$1[\mathrm{G}] = 1[\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}]$$

と定義されます。ガウスの定義は、今の磁場において

$$B = 2\frac{I}{r} \;\Rightarrow\; 1[\mathrm{G}] = 2\frac{0.5[\mathrm{abA}]}{1[\mathrm{cm}]} = 1[\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}]$$

と与えられています。

今度は F_e から電荷を決めます。CGS 単位系とし、$\alpha = 1$ と選びます。$r = 1$[cm] で

$$F_e = \frac{Q^2}{1[\mathrm{cm}^2]} = 1[\mathrm{dyn}] \tag{4}$$

となる電荷を 1[stC] と定義します。stC はスタットクーロン（静電単位、statcoulomb）と呼ばれ、[stC] = [dyn$^{1/2}$·cm] です。対応する電流の単位はスタットアンペア (statampere)stA で、[stA] = [stC/s] = [dyn$^{1/2}$ · cm/s] です。電荷の次元は $L^{3/2}M^{1/2}/T$ です。

$\alpha = 1$ から $\beta_m = 1/c^2$ となりますが、今は F_e から決めているので β_b を決めきれません。$\beta_b = 1$ と選べば、マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \ , \ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ , \ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c^2}\boldsymbol{j}$$

ローレンツ力は $Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ です。電場、磁場の次元は

$$\{E\} = \{\alpha\}\frac{\{Q\}}{L^2} = \frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T}\frac{1}{L^2} = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2}T}$$

$$\{B\} = \{\beta_b\}\{E\}\frac{T}{L} = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2}T}\frac{T}{L} = \frac{M^{1/2}}{L^{3/2}}$$

このときは CGS 静電単位系、略して CGS-esu(electrostatic units) と呼ばれます。

電場の単位は [dym$^{1/2}$/cm] で与えられ、電位ポテンシャルは [dym$^{1/2}$] です。ボルトに対応するスタットボルト (statvolt)stV は

$$1[\mathrm{stV}] = 1[\mathrm{dym}^{1/2}]$$

と定義されます。磁場の単位は [dym$^{1/2}$ · s/cm^2] です。

電場と磁場の次元が同じになるように β_b を決められます。$\alpha = 1, \beta_m = 1/c^2$ なので、電場と磁場の次元は

$$\{E\} = \frac{\{Q\}}{L^2} \ , \ \{B\} = \{\beta_b\}\{Q\}\frac{T}{L^3}$$

これらから、β_b が L/T の次元を持つと電場と磁場の次元が揃うので、$\beta_b = 1$ でなく $\beta_b = c$ と選びます。そうすると、マクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \ , \ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ , \ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

ローレンツ力は $Q(\boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ です。電荷の次元は $L^{3/2}M^{1/2}/T$ です。電場、磁場の次元は

$$\{E\} = \{B\} = \frac{1}{L^2}\frac{L^{3/2}M^{1/2}}{T} = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2}T}$$

となり、同じになっています。単位はどちらも cm,g,s で書けば [dyn$^{1/2}$/cm] です。このときは CGS ガウス単位系と呼ばれます。電荷、電場の次元が CGS-esu と同じなので、stC が使われます。一方で、磁場の次元は CGS-emu と同じなので、単位にガウスが使われます。これは CGS-emu での磁場を

$$B = 2\frac{I}{r} = 2\frac{1}{c}\frac{cI}{r}$$

と書いて、CGS ガウス単位系の磁場に

$$c[\mathrm{cm/s}] \times 1[\mathrm{abA}] = c[\mathrm{cm/s}] \times 1[\mathrm{dyn}^{1/2}] = 10^2 c_0[\mathrm{dyn}^{1/2} \cdot \mathrm{cm/s}] = 10^2 c_0[\mathrm{stA}]$$

と対応させればいいです。c_0 を無次元の光速の値 2.998×10^8 とし、$c[\mathrm{cm/s}] \simeq 2.998 \times 10^{10}[\mathrm{cm/s}]$ です。

最後に、ヘヴィサイド・ローレンツ単位系を求めます。CGS ガウス単位系でのマクスウェル方程式にいる 4π を消します。そのためには、SI のように、F, f_m に 4π が出てくるようにすればいいので、$\alpha = 1/4\pi,\ \beta_m = 1/4\pi c^2$ とします。これによって

$$F = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{1[\mathrm{cm}^2]} = 1[\mathrm{dyn}]$$

となり、電荷の単位は $[\mathrm{stC}/\sqrt{4\pi}]$ になります。$\beta_b = c$ はそのままにして

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\rho\ ,\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\ ,\ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}$$

これをヘヴィサイド・ローレンツ単位系と呼びます。次元は CGS ガウス単位系と同じです。また、マクスウェル方程式から 4π をなくすことを有理化と言います。

単位換算を求めます。SI と CGS-emu での (1),(3) は

$$f_m = 2 \times 10^{-7}[\mathrm{N/A}^2]\frac{1[\mathrm{A}^2]}{1[\mathrm{m}]} = 2 \times 10^{-7}[\mathrm{kg/s}^2]$$

$$f_m = 2\frac{1[\mathrm{abA}^2]}{1[\mathrm{cm}]} = 2[\mathrm{g/s}^2] = 2 \times 10^{-3}[\mathrm{kg/s}^2]$$

これらが同じ値になるには

$$\frac{10^{-4}[\mathrm{abA}^2]}{1[\mathrm{cm}]} = \frac{10^{-4}[\mathrm{abA}^2]}{10^{-2}[\mathrm{m}]} = \frac{10^{-2}[\mathrm{abA}^2]}{1[\mathrm{m}]} = \frac{1[\mathrm{A}^2]}{1[\mathrm{m}]}$$

となればいいので、アンペアとアブアンペアの関係は

$$1[\mathrm{A}] = 10^{-1}[\mathrm{abA}] \tag{5}$$

クーロンでも同様で $1[\mathrm{C}] = 10^{-1}[\mathrm{abC}]$ です。

スタットクーロンは、F_e を使うので SI での $\alpha = 1/4\pi\epsilon_0$ と CGS-esu での (4) から

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1[\mathrm{C}^2]}{1[\mathrm{m}^2]} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0\mu_0}\frac{1[\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^2]}{1[\mathrm{m}^2]} = 10^{-7}[\mathrm{N/A}^2]c^2[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]\frac{1[\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^2]}{1[\mathrm{m}^2]} = 10^{-7}c_0^2[\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg/s}^2]$$

$$F_e = \frac{1[\mathrm{stC}^2]}{1[\mathrm{cm}^2]} = 1[\mathrm{cm} \cdot \mathrm{g/s}^2] = 10^{-5}[\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg/s}^2]$$

c_0 を無次元の光速の値 2.998×10^8 としています。これらが一致するには

$$10^{-2} c_0^2 \frac{1[\mathrm{stC}^2]}{1[\mathrm{cm}^2]} = 10^{-2} c_0^2 \frac{1[\mathrm{stC}^2]}{10^{-4}[\mathrm{m}^2]} = 10^2 c_0^2 \frac{1[\mathrm{stC}^2]}{1[\mathrm{m}^2]} = \frac{1[\mathrm{C}^2]}{1[\mathrm{m}^2]}$$

なので、クーロンとスタットクーロンは

$$1[\mathrm{C}] = 10 c_0 [\mathrm{stC}] \tag{6}$$

アンペアでも同様で $1[\mathrm{A}] = 10 c_0 [\mathrm{stA}]$ です。アブクーロンとは

$$1[\mathrm{abC}] = 10^2 c_0 [\mathrm{stC}] \ , \ 1[\mathrm{abA}] = 10^2 c_0 [\mathrm{stA}] \tag{7}$$

となります。

テスラとガウスの関係は、(2) を cm,g,s を使って

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \ \Rightarrow \ 1[\mathrm{T}] = 1[\mathrm{N}/(\mathrm{A} \cdot \mathrm{m})] = 10^5 \times 10^{-2} [\mathrm{dyn}/(\mathrm{A} \cdot \mathrm{cm})]$$

と書けば、$1[\mathrm{A}] = 10^{-1}[\mathrm{abA}],\ [\mathrm{abA}] = [\mathrm{dyn}^{1/2}]$ なので

$$1[\mathrm{T}] = 10^3 \times 10 [\mathrm{dyn}/(\mathrm{abA} \cdot \mathrm{cm})] = 10^4 [\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}] = 10^4 [\mathrm{G}]$$

と与えられます。

比例定数だけをまとめると ($\alpha = c^2 \beta_m,\ \beta = \beta_m \beta_b$)

SI	:	$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\beta_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$	$\beta_b = 1$	$\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$
CGS-emu	:	$\alpha = c^2$	$\beta_m = 1$	$\beta_b = 1$	$\beta = 1$
CGS-esu	:	$\alpha = 1$	$\beta_m = \frac{1}{c^2}$	$\beta_b = 1$	$\beta = \frac{1}{c^2}$
CGS ガウス	:	$\alpha = 1$	$\beta_m = \frac{1}{c^2}$	$\beta_b = c$	$\beta = \frac{1}{c}$
ヘヴィサイド・ローレンツ	:	$\alpha = \frac{1}{4\pi}$	$\beta_m = \frac{1}{4\pi c^2}$	$\beta_b = c$	$\beta = \frac{1}{4\pi c}$

ついでに、素電荷 e の値もまとめておきます。(5),(6),(7) から

$$e \simeq 1.602 \times 10^{-19} [\mathrm{C}]$$

$$e \simeq 1.602 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^9 [\mathrm{stC}] \simeq 4.8 \times 10^{-10} [\mathrm{stC}]$$

$$e \simeq 4.8 \times 10^{-10} \times \frac{1}{3} \times 10^{-10} [\mathrm{abC}] \simeq 1.6 \times 10^{-20} [\mathrm{abC}]$$

$$e \simeq 4.8 \times 10^{-10} \times \sqrt{4\pi} [\mathrm{stC}/\sqrt{4\pi}] \simeq 1.7 \times 10^{-9} [\mathrm{stC}/\sqrt{4\pi}]$$

$[\mathrm{abC}] = [\mathrm{dyn}^{1/2} \cdot \mathrm{s}],\ [\mathrm{stC}] = [\mathrm{dyn}^{1/2} \cdot \mathrm{cm}]$ です。