物質中のマクスウェル方程式

物質中のマクスウェル方程式と呼ばれるものを導出します。
ここでの物質は原子や分子の集団程度にしか扱っていないです。具体的な話は無視して定式化だけを見ています。
量子論は無視しています。

物質は原子や分子で構成されています。なので、原子の視点から見ます。原子核の半径は大体 10^{-15}[m]、原子の半径は大体 10^{-10}[m] です。そうすると、10^5 の差があるので、原子内部は原子核と電子が真空中にいると見れます。つまり、このような微視的な視点では真空のマクスウェル方程式が使えると考えられます。分子でも、分子を構成する原子間の距離は大体 10^{-10}[m] なので、真空中のマクスウェル方程式が使えます。

一方で、原子や分子のような微視的な視点から離れれば、物質内は真空ではないです。なので、巨視的な視点では真空のマクスウェル方程式が使えません。そして、電磁気で対象としているのは巨視的な視点での物質です。このため、微視的なマクスウェル方程式から巨視的な電磁場が従う式を求める必要があり、これを見ていきます。

物質中において、十分真空と見なせる微視的な視点で発生する電場 $\boldsymbol{e}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{e}=4\pi\alpha\rho_{in}\ ,\ \nabla\cdot\boldsymbol{b}=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{e}=-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial t}\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{b}-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial t}=4\pi\beta\boldsymbol{j}_{in}\quad(\beta=\beta_m\beta_b)$$

$\rho_{in},\boldsymbol{j}_{in}$ は物質内の電荷密度と電流密度です。これが解ければ微視的な電場 $\boldsymbol{e}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ は求まり、物質での電磁場が分かります。しかし、そのためにはマクスウェル方程式と物質が含む原子や分子の個数分の運動方程式 (密度を求めるのに必要) を同時に解く必要があり、そんなことは不可能です。というわけで、微視的に細かく見ずにある程度の塊として見ます。

巨視的な視点からすれば十分小さく、微視的な視点からすれば大きい領域を考え (例えば 10^{-6}[m] は原子からすれば大きいが、日常の感覚からすれば微小)、微視的な電場と磁場をその範囲で平均したものを巨視的な電場と磁場とします (原子や分子を個別に見ずに、ある程度集まった塊を見る)。つまり、微視的な視点での位置 $\boldsymbol{x}$ での電場、磁場でなく、$\boldsymbol{x}$ を含む領域で平均化したものを電磁気で扱う位置 $\boldsymbol{x}$ での電場、磁場とします。

平均化した電場、磁場を $<\boldsymbol{e}>,<\boldsymbol{b}>$ と表記して

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=<\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)>\ ,\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=<\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)>$$

$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ が巨視的な電場と磁場です。微小な領域 (原子よりは十分大きな領域)$\Delta\mathcal{V}$ での平均化は

$$\frac{1}{\Delta\mathcal{V}}\int_{\Delta\mathcal{V}}d^3x'\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)$$

簡単に言えば、$\Delta\mathcal{V}$ の領域にいる電場 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)$ を足し合わせて $\Delta\mathcal{V}$ で割ったものです。より一般化するなら、適当な領域 $\mathcal{V}$ で与えられている関数 $f(\boldsymbol{x})\geq 0$ による重みをつけた平均として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)&=\int_{\mathcal{V}}d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)=<\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t)>\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)&=\int_{\mathcal{V}}d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)=<\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)>\end{aligned}\tag{1}$$

$f(\boldsymbol{x})$ は例えば $\Delta\mathcal{V}$ では定数でその外側の領域では急激に 0 に近づく関数です。また、$f(\boldsymbol{x})$ は平均 (期待値) を求めるときの確率と同じ役割なので

$$\int_V d^3x\ f(\boldsymbol{x}) = 1$$

という条件が必要になります。

$\nabla\cdot\boldsymbol{E},\ \nabla\times\boldsymbol{E},\ \partial\boldsymbol{E}/\partial t$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \nabla\cdot\int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t) = \int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\nabla\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t) =< \nabla\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t) >$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\nabla\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t) =< \nabla\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t) >$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t) =< \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x},t) >$$

$\boldsymbol{B}$ でも同様なので、真空でのマクスウェル方程式から

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

電荷密度と電流密度も平均して

$$< \rho_{in}(\boldsymbol{x},t) >= \int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\rho_{in}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)$$

$$< \boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x},t) >= \int_{\mathcal{V}} d^3x'\ f(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',t)$$

とすれば

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 4\pi\alpha < \rho_{in}(\boldsymbol{x},t) >$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = 4\pi\beta < \boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x},t) >$$

このように、巨視的な電場と磁場によるマクスウェル方程式になります。しかし、これは形式的に書いただけです。電場、磁場を求めるには $\rho_{in},\boldsymbol{j}_{in}$ の平均を決める必要があります。そのためには、粒子分布を与える必要がありますが、そのような方法は限定された場合に対してのみ作れています。なので、広く使える別の方法を見ていきます。

静電場、静磁場とします。原子は正の電荷を持つ原子核と負の電荷を持つ電子で構成されており、原子は中性です。これから、正の電荷と負の電荷による電気双極子を作っているとし、電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ を持つとします (分子も中性なので同じように考えられる)。微小な領域 $\Delta\mathcal{V}$ にいる各原子の電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}_i$ (i の範囲は含まれるの原子の個数) を平均して

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta\mathcal{V}}\sum_i \boldsymbol{p}_i$$

$\boldsymbol{P}$ を電気分極 (electric polarization) や誘電分極 (dielectric polarization) と呼びます。もしくは、(1) のように平均化します。電気双極子モーメントの和は $\boldsymbol{P}\Delta\mathcal{V}$ なので、これを物質の領域 $\mathcal{V}$ で積分すれば全体の電気双極子モーメントになり

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\boldsymbol{P} \tag{2}$$

一方で、電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ に対する電気双極子モーメントは

$$\boldsymbol{p} = \int d^3x\ \boldsymbol{x}\rho(\boldsymbol{x})$$

と定義されているので、平均した電荷密度を使えば全体の電気双極子モーメントは

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{x} < \rho_{in}(\boldsymbol{x}) >$$

とも書けます。この 2 つが等しいとします。(2) と定数のベクトル $\boldsymbol{c}$ の内積を取り、ガウスの発散定理を使えば

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{P} =& \int_{\mathcal{V}} d^3x\ (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})(c_x x + c_y y + c_z z)\cdot\boldsymbol{P} \\
=& \int_{\mathcal{V}} d^3x\ (\nabla(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{P} \\
=& \int_{\mathcal{V}} d^3x\ (\nabla\cdot((\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}) - (\nabla\cdot\boldsymbol{P})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})) \\
=& \int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{S}\cdot((\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}) - \int_{\mathcal{V}} d^3x(\nabla\cdot\boldsymbol{P})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}))
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}$ は $\mathcal{V}$ を囲む閉曲面で、$d\boldsymbol{S}$ は閉曲面の法線方向です。閉曲面 $\mathcal{S}$ 上では電気分極は 0 として

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{P} = -\int_{\mathcal{V}} d^3x\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}(\nabla\cdot\boldsymbol{P})$$
$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{P} = -\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{x}(\nabla\cdot\boldsymbol{P})$$

よって

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{x} < \rho_{in}(\boldsymbol{x}) > = -\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{x}(\nabla\cdot\boldsymbol{P})$$

$$< \rho_{in}(\boldsymbol{x}) > = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

このように平均電荷密度は電気分極で書けます。

磁場でも同様に考えます。原子は原子核の周りに電子がいるので、電子が円運動していると考えます。なので、微視的には磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ がいると考えられます。これも平均化して

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{\Delta\mathcal{V}}\sum_i \boldsymbol{m}_i$$

$\boldsymbol{M}$ を磁気分極 (magnetic polarization) や磁化 (magnetization) と呼びます。これから全体の磁気双極子モーメントを

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{M}\ ,\ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{x}\times<\boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x})> \tag{3}$$

として与えます。ここでも定数のベクトル $\boldsymbol{c}$ との内積を取ります。このとき

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}=(c_yz-c_zy, c_zx-c_xz, c_xy-c_yx)\\&\nabla\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x})=(2c_x,2c_y,2c_z)=2\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

なので

$$2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{M}=(\nabla\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{M}$$

これに

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{M})-\boldsymbol{M}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})\quad(\boldsymbol{C}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x})\\\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{M})-\boldsymbol{M}\cdot(\nabla\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\\&=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{M}'-(\nabla\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{M}\quad(\boldsymbol{M}'=\nabla\times\boldsymbol{M})\\&=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{M}')-(\nabla\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{M}\end{aligned}$$

を使って

$$\begin{aligned}&2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{M}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{M}')-\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\\&2\int d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{M}=\int d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{M}')-\int d^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

右辺の第二項は領域の表面では磁気分極は消えるとして

$$\int d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{M}=\frac{1}{2}\int d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{M}')$$

(3) が等しいとして、これを入れれば

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times<\boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x})>) = \frac{1}{2}\int d^3x\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{M}')$$

$$<\boldsymbol{j}_{in}(\boldsymbol{x})>=\nabla\times\boldsymbol{M}$$

というわけで、

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})+4\pi\alpha\boldsymbol{P})=0\ ,\ \nabla\times(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})-4\pi\beta\boldsymbol{M})=0$$

これから

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})+4\pi\alpha\boldsymbol{P}\ ,\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})-4\pi\beta\boldsymbol{M} \tag{4}$$

とすれば、マクスウェル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\ ,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$$

となります。$\boldsymbol{D}$ は電束密度 (electric fluc density) や電気変位 (electric displacement)、$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ (magnetic field strength) や磁場 (magnetic field) と呼ばれます。ただし、電束密度は $\boldsymbol{D}/4\pi\alpha$、磁場の強さは $\boldsymbol{H}/4\pi\beta$ とも定義されます。これは最後に触れます。

日本語では、$\boldsymbol{B}$ を磁束密度、$\boldsymbol{H}$ を磁場と呼ぶことが多いです。しかし、ここでは $\boldsymbol{B}$ を磁場と呼んできているので、$\boldsymbol{H}$ は名称を付けずに $\boldsymbol{H}$ とだけ表記していきます ($\boldsymbol{B}$ を磁場と呼ぶ立場の人は $\boldsymbol{H}$ を補助場と呼んだりする)。

物質の情報を追加します。物質は原子や分子で構成されていますが、原子や分子とは無関係に自由に動き回れる電子を含んでいる場合もあります。それによる電荷密度と電流密度を $\rho_f, \boldsymbol{j}_f$ として加えて ($4\pi\alpha(<\rho_{in}>+\rho_f)$, $4\pi\beta(<\boldsymbol{j}_{in}>+\boldsymbol{j}_f)$)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})=4\pi\alpha\rho_f(\boldsymbol{x})\ ,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0\ ,\ \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=4\pi\beta\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x})$$

と修正します。

最後に時間依存性を加えます。真空のマクスウェル方程式と同じように、電磁誘導と電荷の保存の項を加えることで時間依存性を与えます。このとき、電荷密度、電流密度を含む式では $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ に置き換えればいいと考えて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=4\pi\alpha\rho_f(\boldsymbol{x},t) \tag{5a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{5b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{5c}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=4\pi\beta\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x},t) \tag{5d}$$

これが物質中のマクスウェル方程式と呼ばれるものです。$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ は (4) としています。
(5a) と (5d) に触れておきます。(5a) は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha(\rho_f - \nabla \cdot \boldsymbol{P})$$

これから、電気分極は $\rho_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ として電荷密度を作っているように見え、この電荷は分極電荷 (bound charge) と呼ばれます。ρ_p を別の視点から見ます。そのために、電位ポテンシャルを持ち込みます。1 個の電気双極子による電位ポテンシャルは

$$\alpha\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

$\boldsymbol{P}$ は $\Delta\mathcal{V}$ 内の $\boldsymbol{p}_i$ を足して $\Delta\mathcal{V}$ で割っているので、$\Delta\mathcal{V}$ 内の電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(\Delta\mathcal{V})$ とは

$$\boldsymbol{p}(\Delta\mathcal{V}) = \boldsymbol{P}\Delta\mathcal{V}$$

$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(\Delta\mathcal{V})$ に置き換えて、物質の領域で足し合わせれば全体の電位ポテンシャルになるので、積分にすれば

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{dip}} &= \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x' \frac{\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'|^3} \\
&= \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x' \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{x}'|} \\
&= \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x'\ \nabla' \cdot (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}'|}) - \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}'|}\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \\
&= \alpha\int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}'|} - \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}'|}\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') \\
&= \alpha\int_{\mathcal{S}} dS \frac{\sigma_b}{|\boldsymbol{x}'|} + \alpha\int_{\mathcal{V}} d^3x' \frac{\rho_b}{|\boldsymbol{x}'|}
\end{aligned}$$

σ_b, ρ_b は

$$\sigma_b = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\ ,\ \rho_b = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{n}$ は閉曲面 $\mathcal{S}$ の単位法線ベクトルです。面積密度 σ での電位ポテンシャルと体積密度 ρ での電位ポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{x}) = \alpha\int dS' \frac{\sigma(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\ ,\ V(\boldsymbol{x}) = \alpha\int d^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$

微小な面積 ΔS における電荷を ΔQ とすれば面積密度は $\sigma = \Delta Q/\Delta S$ です。これらを比較すれば、σ_b は面積密度、ρ_b は体積密度に対応します (V_{dip} は面積密度と体積密度の和になっている)。
状況を単純にするために、微小な円筒を考えます。電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の方向は底面から上面に向いているとします。そうすると、電気双極子の電荷の組 $(-,+)$ は円筒内で底面から上面に向かって $(-,+)(-,+),\ldots,(-,+)$ と並んでいます。なので、円筒内では電荷が打ち消しあい、底面に負の電荷、上面に正の電荷だけが現れると考えられます。それが $\pm\sigma_b$ です。

(5d) でも同じように考えます。$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ で書けば

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=4\pi\beta(\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x},t))$$

このように書くと、右辺は $\boldsymbol{j}_m=\nabla\times\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{j}_p=\partial\boldsymbol{p}/\partial t$ として電流密度が加わる形になります。$\boldsymbol{P}$ は表面での電荷密度を与えているので、$\boldsymbol{P}$ の時間変化はその面の間に電流を流すと考えられます。つまり、$P=|\boldsymbol{P}|$ が時間変化すれば σ_b も変化し

$$\frac{\partial\sigma_b}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial t}$$

左辺は単位時間、単位面積あたりの電荷なので、電流密度を与えます。よって、

$$\boldsymbol{j}_p=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}$$

として、$\boldsymbol{P}$ の時間変化による電流密度が発生すると考えられます。そして、$\boldsymbol{j}_p$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}_p=\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}=-\frac{\partial\rho_b}{\partial t}$$

なので、連続の方程式を満たします。このように、$\boldsymbol{E}$ から $\boldsymbol{D}$ への置き換えは、電気分極による電荷密度と電流密度を加えます。

残っている $\boldsymbol{j}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)$ を見ていきます。ベクトルポテンシャルの磁気双極子の項で電位ポテンシャルと同じことを行えば

$$\begin{aligned}\beta\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}_{\text{dip}}=\beta\int d^3x\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}&=\beta\int d^3x\boldsymbol{M}\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\\&=-\beta\int d^3x\nabla\times\frac{\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{x}|}+\beta\int d^3x\frac{\nabla\times\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{x}|}\end{aligned}\tag{6}$$

これの第二項はベクトルポテンシャル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\beta\int d^3x'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

の形から電流密度に対応すると言えます。

ちなみに、(6) の第一項は

$$\int d^3x\nabla\times\frac{\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{x}|}=\int_S dS\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}}{|\boldsymbol{x}|}$$

と書けます。$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルです。このため、第一項は表面における電流密度に対応します。このように書けることを示しておきます。

ベクトル $\boldsymbol{X}$ が任意の定数のベクトル $\boldsymbol{C}$ によって $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{C}$ と書けるとし

$$\int d^3x\nabla\cdot\boldsymbol{X}=\int d^3x\nabla\cdot(\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{C})=\int d^3x\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Y})$$

一方で、ガウスの発散定理から

$$\int d^3x \nabla \cdot \boldsymbol{X} = \int_S dS\ \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{C}) = \int_S dS \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Y})$$

よって

$$\boldsymbol{C} \cdot \int d^3x (\nabla \times \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{C} \cdot \int_S dS (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Y})$$

$$\int d^3x (\nabla \times \boldsymbol{Y}) = \int_S dS (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Y})$$

となります。

物質中のマクスウェル方程式は、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係が分からなければ解けません。しかし、実験から限定的な関係が分かっています。物質に外部から弱い電場、磁場を作用させると $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}$ が発生するとき、$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}$ は比例関係

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E}\ ,\ \boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

を持ちます。χ_e, χ_m を電気感受率 (dielectric susceptibility)、磁気感受率 (magnetic susceptibility) と呼びます。χ_m は磁化率や帯磁率とも呼ばれます。電気感受率は $\chi_e > 0$ ですが、磁気感受率は $\chi_m > 0, \chi_m < 0$ の両方があり、$\chi_m > 0$ では常磁性 (paramagnetism)、$\chi_m < 0$ を反磁性 (diamagnetism) と言います。電気、磁気感受率によって

$$\boldsymbol{D} = (1 + 4\pi\alpha\chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E}\ ,\ \boldsymbol{B} = (1 + 4\pi\beta\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

となり、ϵ を誘電率 (permittivity)、μ を透磁率 (permeability) と呼びます。

ここで $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}$ の定義がごちゃごちゃしだします。χ_e, χ_m は大抵は無次元の量として定義されるので、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{P}$ の次元、$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{M}$ の次元を揃える必要があります。今使っている定義でのそれぞれの次元は、L を長さの次元、α, β, Q（電荷）$, I$（電流）の次元は $\{\ \}$ で書くことにすれば、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ は $\{\alpha\}\{Q\}L^{-2}$、$\boldsymbol{P}$ は $\{Q\}L^{-2}$、$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ は $\{\beta\}\{I\}L^{-1}$、$\boldsymbol{M}$ は $\{I\}L^{-1}$ です。

次元を揃えるには例えば α を無次元にし、$\boldsymbol{M}$ の定義に β を含めて $\{\beta\}\{I\}L^{-1}$ にすればいいです。なので

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E}\ ,\ \boldsymbol{M}' = \chi_m \boldsymbol{H} \quad (\boldsymbol{M}' = \beta \boldsymbol{M})$$

とすれば、χ_e, χ_m は無次元となり

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) + 4\pi\alpha \boldsymbol{P} = (1 + 4\pi\alpha\chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}' = (1 + 4\pi\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

例えばＣＧＳガウスではこの状況になります。なので、ＣＧＳガウスでの磁気双極子モーメントの定義では $\beta = 1/c$ が含まれることが多いです。

α, β が両方とも次元を持つなら

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi\alpha}\chi_e \boldsymbol{E}\ ,\ \boldsymbol{M} = \frac{1}{4\pi\beta}\chi_m \boldsymbol{H}$$

とすることで、無次元にできます。この場合では $\boldsymbol{M}$ の定義を変えずに、$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ から

$$\boldsymbol{D}' = \frac{\boldsymbol{D}}{4\pi\alpha} = \frac{1}{4\pi\alpha}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}\ ,\ \boldsymbol{H}' = \frac{\boldsymbol{H}}{4\pi\beta} = \frac{\boldsymbol{B}}{4\pi\beta} - \boldsymbol{M}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}' &= \frac{1}{4\pi\alpha}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi\alpha}(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= 4\pi\beta(\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{M}) = 4\pi\beta(\boldsymbol{H}' + \frac{1}{4\pi\beta}\chi_m\boldsymbol{H}) = 4\pi\beta(1+\chi_m)\boldsymbol{H}' = \mu\boldsymbol{H}'
\end{aligned}$$

と書けます。α, β が次元を持つ SI はこの状況です ($4\pi\alpha = 1/\epsilon_0,\ 4\pi\beta = \mu_0$)。
また、電流密度と電場の間にも比例関係があり

$$< \boldsymbol{j}_{in} >= \kappa\boldsymbol{E}$$

これをオーム (Ohm) の法則と言い、κ を電気伝導率 (electric conductivity) と言います。