

電磁誘導

時間依存性があるときに何が起きるのかを見ていきます。細かく見るといろいろ面倒なので、大雑把に見ていきます。

ここで曲線と言っているのは電流が流れる導線で、外部に電場を発生させないとしています。

マクスウェルの応力テンソルも求めています。

ファラデー (Faraday) は電流による磁場の発見から、磁場から電流を作れないかと考え、そのための実験を行いました。それが確認できた実験は、鉄のリングの右半円と左半円部分にそれぞれ銅線を螺旋状に巻きつけ、右側の銅線に電流を流すというものです。そして、このリングからある程度離れた左側 (右側の銅線が作る磁場の影響を受けない距離) に磁針をおき、その反応を見ます。その結果、電流を流し始めたときと止めたときの短い時間間隔において、磁針が元の位置からズレるのが確認されました (安定して流れ出すと磁針は元の方向を向く)。

この実験は簡単に言えば、片方の銅線に一定でない電流を流すともう片方の銅線で電流が発生し、発生した電流によって磁針が動くというものです。つまり、変動する電流 (変動する磁場) は電流を発生させます。これを電磁誘導 (electromagnetic induction) と呼びます。

電磁誘導に関する法則を見つけるための実験は簡単に言えば

- (i) 静磁場中で閉曲線を動かす
- (ii) 閉曲線を固定して静磁場を動かす
- (iii) 磁場の強さを变化させる

これらを見ていきます。閉曲線には電荷がいます。

(i) では、閉曲線を動かすことで閉曲線にいる点電荷が動くので磁場からローレンツ力を受けます。静磁場 B の中に閉曲線 C_1 があり、それが速度 v で動いているとします。その閉曲線にいる点電荷は速度 v で動くので、それらの点電荷は B から $F_L = Q\beta_b^{-1}v \times B$ の力を受けます。ここで、電荷が外部から力を受けているときの量として

$$\mathcal{E} = \oint_C dl \cdot F_{ext}$$

を定義します。 F_{ext} は外部から電荷に作用する単位電荷あたりの力、 C はその電荷が動く曲線です。 $\mathcal{E}$ は起電力 (electromotive force, emf) と呼ばれます。起電力と呼ばれますが $\mathcal{E}$ は力の次元ではなく、単位電荷あたりの力による仕事です。

F_L は点電荷に作用する力なので、単位電荷あたりの力

$$\frac{F_L}{Q} = \beta_b^{-1}v \times B$$

として、起電力は

$$\mathcal{E} = \oint_C dl \cdot \frac{F_L}{Q} = \beta_b^{-1} \oint_{C_1} dl \cdot (v \times B)$$

C_1 の微小間隔を Δl とすると、 Δl が時間 Δt 動いたときにできる微小な面 (平行四辺形) の面積は $\Delta s = v \Delta t \times \Delta l$ で与えられます。 Δs の向きは、 Δt 後の閉曲線を C_2 とすれば、 C_1 と C_2 で挟まれた面の外向きです (C_1, C_2 が同じ円なら、円筒の側面の外向き)。そうすると

$$\Delta \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} (\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{B} = -\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} \cdot \mathbf{B}$$

なので、 C_1, C_2 で挟まれた面を S とすれば

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\beta_b} \int_S \frac{d\mathbf{s}}{dt} \cdot \mathbf{B}$$

右辺の積分は、 $C_{1,2}$ を縁とする面 $S_{1,2}$ を加えると閉曲面になるので、磁場の発散 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ から (法線方向は閉曲面の外向き)

$$\int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \int_{S_1} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} + \int_{S_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = 0$$

今は C_1 を動かすと C_2 になるので、 C_1 の法線方向に C_2 での $d\mathbf{s}$ も合わせれば

$$\int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \int_{S_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} - \int_{S_1} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

S_2 は S_1 から Δt 経過したものなので、磁束 Φ で

$$\int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)$$

と書いて、 $\Delta t \rightarrow 0$ で右辺は S_1 での面積分になります。よって

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\beta_b} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d}{dt} \int_{S_1} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

これが (i) の結果で、閉曲線を動かすことで磁束の時間微分に等しい起電力が現れ、それによって電流が流れます。

(ii) では閉曲線は固定されているために点電荷は静止しているので、磁場によるローレンツ力を受けません。このため、電場 E_{ind} が発生して点電荷を動かしていると考えられます。そして、 $F/Q = E_{\text{ind}}$ による起電力と磁束の関係が実験から

$$\oint_{C_1} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_{\text{ind}} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\beta_b} \int_{S_1} d\mathbf{s} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

と求められます (閉曲線は固定されているので時間の偏微分として磁場に作用する)。ストークスの定理を使うことで

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

として、微分形になります。

(i) と (ii) で同じ形になるのは、静磁場と閉曲線の相対速度が一定であるなら、(i) では静磁場が静止している座標系、(ii) では閉曲線が静止している座標系であることと相対性原理を要求すれば、予想通りです。(i) の座標系で

は0だった電場が、(ii)では E_{ind} で現れていると見れば、ガリレイ変換において電場は $E' = \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と変換されていると言えます ((i) で0でない電場 E が存在しているなら $E' = E + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$)。

また、静電場 E が存在しているなら全体の電場は $E + E_{\text{ind}}$ となり、静電場では任意の閉曲線で

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = 0$$

なので、全体の電場に対して

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} + \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_{\text{ind}} = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d\Phi}{dt}$$

となります。

(iii) では閉曲線は固定されて磁場が変化するので、(ii) と同じ結果になります。というわけで、磁束が変化すると起電力が現れる、というファラデーの法則になり、磁束を Φ 、発生する起電力を $\mathcal{E}$ とすれば

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

となります。ただし、(i) は閉曲線の移動 (ローレンツ力)、(ii),(iii) は磁束そのものの変化 (電場の発生) なので、結果は同じでも起源が異なることに注意してください。(i) を flux rule として区別する場合があります。というわけで、電磁誘導での結論は (1) となります。

(2) の右辺のマイナスは閉曲線の方と面の法線方向を右巻きに取るように決めているためで、レンツ (Lenz) の法則に従っています (閉曲線が xy 平面上で反時計回りなら ds は z 軸方向になる)。レンツの法則は磁場の変化と反対方向に電流が流れるというものです。例えば、閉曲線に対して下から上に向かう磁場があり、その磁場を強めていくと、その変化を消すように上から下に向かう磁場を発生させる時計周りの電流が作られます。

ついでに、磁場のエネルギーを定義します。閉曲線 C に電流 $I(t)$ を流して、磁場 B を発生させます。電流は時間依存しているので、磁束も時間依存し起電力が発生します。つまり、閉曲線 C での磁束の変化が C へ起電力を発生させます。磁場は $I(t)$ によって作られ、磁束は積分で位置依存性が消えているので

$$\Phi = LI(t)$$

と書くことにし、 L を自己インダクタンス (self inductance) と言います。これによって発生する起電力はファラデーの法則から

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\beta_b} L \frac{dI}{dt}$$

流れる電流が増加するなら、レンツの法則から起電力は電流 I の向きとは逆です。このため、 I を流し続けるにはその電流に逆らうエネルギーが必要になり、それを磁場のエネルギーとします (電流は磁場を発生させるので、その電流のエネルギーを磁場のエネルギーとする)。

起電力は $F \cdot \Delta l$ なので、それに逆らって電荷を運ぶエネルギーとして、エネルギー U_m の変化を

$$\frac{dU_m}{dt} = -\mathcal{E}I$$

と与えます。 $\mathcal{E}$ は単位電荷あたりの力によるので、単位時間あたりに運ばれる電荷として電流 I をかけています。
起電力を磁束にすれば

$$\begin{aligned}\frac{dU_m}{dt} &= \frac{1}{\beta_b} L I \frac{dI}{dt} \\ U_m &= \frac{1}{\beta_b} L \int I \frac{dI}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2\beta_b} L I^2 + C\end{aligned}\quad (3)$$

$t = 0$ で $I = 0$ として、積分定数は $C = 0$ にします。磁場を使えば

$$U_m = \frac{I}{2\beta_b} L I = \frac{I}{2\beta_b} \Phi = \frac{I}{2\beta_b} \int_S ds \cdot \mathbf{B}$$

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) にすれば

$$U_m = \frac{I}{2\beta_b} \int_S ds \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{I}{2\beta_b} \oint_C dl \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2\beta_b} \oint_C dl \, I \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$$

$\mathbf{n}$ は曲線の接ベクトルです。電流が流れる領域に幅を持たせて 3 次元に拡張し、電流密度 $\mathbf{j}$ の面積分によって

$$I \mathbf{n} = \int ds \, \mathbf{j}$$

電流密度を含む 3 次元領域を $\mathcal{V}$ とし、アンペールの法則を使えば

$$\begin{aligned}U_m &= \frac{1}{2\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d\tau \, \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2\beta_b} \frac{1}{4\pi\beta_m\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d\tau (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2\beta_b} \frac{1}{4\pi\beta_m\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d\tau (\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})) \quad (\nabla \cdot (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) - \mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{Y})) \\ &= \frac{1}{2\beta_b} \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathcal{V}} d\tau |\mathbf{B}|^2 - \frac{1}{2\beta_b} \frac{1}{4\pi\beta} \oint_S ds \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\beta = \beta_m\beta_b)\end{aligned}$$

積分領域を全空間に取ればその表面は無限遠になり、第二項は無限遠での面積分です。無限遠では磁場は $1/r^2$ で減少していくので消えるとして、全空間においてエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2\beta_b} \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathcal{V}} d\tau |\mathbf{B}|^2$$

となります。

磁場の变化から電場が出てくるので、次は電場の变化は磁場を作るのかという疑問が出てきます。実際に、電場の变化は電流を作り、それによって磁場が発生します。その電流を変位電流 (displacement current) と呼び、電流密度は

$$\mathbf{j}_{\text{ind}} = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

と与えられます。これはマクスウェル (Maxwell) によって導入されました (エーテルを使った理論のために導入したので、ここで見ると電荷の保存を目的としていなかった)。

理論側での変位電流の必要性はすぐに分かります。アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\beta \mathbf{j}$ の発散を取ると

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 4\pi\beta \nabla \cdot \mathbf{j}$$

左辺はベクトルの計算から必ず 0 で、右辺は位置依存しない定常電流なら 0 です。なので、定常電流以外では成立しません (静磁場では問題がない)。そして、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ が任意の電流で成立していると、電荷密度 ρ が時間依存するときの連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}$$

が成立しなくなり、電荷の保存が壊れます。

変位電流をアンペールの法則の電流部分に加えて

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\beta(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ind}}) \quad (4)$$

とすると、右辺は $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\alpha\rho$ から

$$4\pi\beta(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}) = 4\pi\beta(\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho)$$

となるので、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

として、連続の方程式になります。変位電流の導入によって、連続の方程式が含まれた状況になります。(4) をアンペール・マクスウェルの法則と呼びます。

これで時間依存性があるときの電場と磁場の法則が求まり

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\alpha\rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\beta_m \beta_b}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\beta_m \beta_b \mathbf{j}$$

この連立方程式がマクスウェル方程式で、電磁気の基本原理です。後は比例定数を決めて単位を与えれば具体的な量が計算できます。

ついでに、マクスウェルの応力テンソル (stress tensor) を出しておきます。応力 (面に作用する単位面積当たりの力) についているように、領域の表面に作用する力と関係するので、ローレンツ力を見ていきます。電荷 Q に作用するローレンツ力は、電荷の速度を $\mathbf{v}$ として

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$$

電荷は電荷密度 ρ で分布しているとして、適当な 3 次元領域の体積 $\Delta\tau$ で割れば

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \beta_b^{-1} \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$\mathbf{j}$ は電流密度です。マクスウェル方程式での

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\alpha\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\beta \mathbf{j} \quad (\beta = \beta_m \beta_b)$$

を使えば

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\alpha} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} (\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \times \mathbf{B}$$

第二項では、マクスウェル方程式での

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を使って

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \beta_b \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

と変形できるので

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{4\pi\alpha} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \beta_b \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha} ((\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

ベクトルの関係

$$\mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{X}^2 - (\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{X}$$

から

$$(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla E^2 + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

となり

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \frac{1}{4\pi\alpha}((\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\alpha} \nabla E^2 + \frac{1}{\beta_b\beta} \nabla B^2 \right) - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

磁場では $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ のために $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ を加えても影響がないので

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \frac{1}{4\pi\alpha}((\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta}((\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}) \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\alpha} \nabla E^2 + \frac{1}{\beta_b\beta} \nabla B^2 \right) - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

として、電場の項と磁場の項が同じ形になります。成分で書くと

$$\begin{aligned} f_j = & \frac{1}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i E_i) E_j + \sum_{i=1}^3 (E_i \partial_i) E_j \right) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i B_i) B_j + \sum_{i=1}^3 (B_i \partial_i) B_j \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\alpha} \partial_j E^2 + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} \partial_j B^2 \right) - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), (E_1, E_2, E_3) = (E_x, E_y, E_z)$ のようにし、 ∇ の成分は $\partial_i = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ と表記しています。

ここで

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi\alpha} (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2), \quad T_{ij} = T_{ji}$$

というものを作ります。 δ_{ij} はクロネッカーデルタで、 $i = j$ なら 1、 $i \neq j$ なら 0 です。 T_{ij} をマクスウェルの応力テンソルと呼びます。テンソルの意味はここではどうでもいいので、ただの 3×3 対称行列と思えばよく、行列で書けば

$$\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} (E_1^2 - \frac{1}{2} E^2) + \frac{1}{\beta_b\beta} (B_1^2 - \frac{1}{2} B^2) & \frac{1}{\alpha} E_1 E_2 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_1 B_2 & \frac{1}{\alpha} E_1 E_3 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_1 B_3 \\ \frac{1}{\alpha} E_1 E_2 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_1 B_2 & \frac{1}{\alpha} (E_2^2 - \frac{1}{2} E^2) + \frac{1}{\beta_b\beta} (B_2^2 - \frac{1}{2} B^2) & \frac{1}{\alpha} E_2 E_3 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_2 B_3 \\ \frac{1}{\alpha} E_1 E_3 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_1 B_3 & \frac{1}{\alpha} E_2 E_3 + \frac{1}{\beta_b\beta} B_2 B_3 & \frac{1}{\alpha} (E_3^2 - \frac{1}{2} E^2) + \frac{1}{\beta_b\beta} (B_3^2 - \frac{1}{2} B^2) \end{pmatrix}$$

i 成分で偏微分の和を取ってみると、 T_{ij} の第一項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i E_i) E_j + \sum_{i=1}^3 (E_i \partial_i) E_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \partial_i (\delta_{ij} \mathbf{E}^2) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i E_i) E_j + \sum_{i=1}^3 (E_i \partial_i) E_j - \frac{1}{2} (\delta_{1j} \partial_1 \mathbf{E}^2 + \delta_{2j} \partial_2 \mathbf{E}^2 + \delta_{3j} \partial_3 \mathbf{E}^2) \right) \end{aligned}$$

δ_{ij} は定数なので微分の外に出ます。 δ_{ij} は $i \neq j$ で 0 なので、クロネッカーデルタの項は $j = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ の項だけが消えずに残ります。このため

$$\delta_{1j} \partial_1 \mathbf{E}^2 + \delta_{2j} \partial_2 \mathbf{E}^2 + \delta_{3j} \partial_3 \mathbf{E}^2 = \partial_j \mathbf{E}^2$$

と書けます。磁場の項でも同じ形になり、 $\Sigma \partial_i T_{ij}$ は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} &= \frac{1}{4\pi\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i E_i) E_j + \sum_{i=1}^3 (E_i \partial_i) E_j \right) + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} \left(\sum_{i=1}^3 (\partial_i B_i) B_j + \sum_{i=1}^3 (B_i \partial_i) B_j \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\alpha} \partial_j \mathbf{E}^2 + \frac{1}{4\pi\beta_b\beta} \partial_j \mathbf{B}^2 \right) \end{aligned}$$

これは f の最後の項を除いたものなので

$$f_j = \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} - \frac{1}{4\pi\alpha\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j$$

第一項は j が固定されていれば、ベクトルの i 成分に対する発散の形なので、ガウスの発散定理が使えて

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} = \int_S \sum_{i=1}^3 T_{ij} ds_i$$

このため、 T_{ij} は領域 $\mathcal{V}$ での表面 S 上での単位面積あたりの力と見れるので、応力とついています。また、第二項でポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\beta} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

を使えば

$$f_j = \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} S_j$$

と書けます。

運動方程式として見れば、粒子の運動量を p として

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_V d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} - \frac{\beta_m}{\alpha} \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} S_j \quad (5)$$

p が定数なら

$$\begin{aligned} \frac{\beta_m}{\alpha} \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} S_j &= \int_V d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} \\ \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial S_j}{\partial t} &= \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij} \end{aligned}$$

となり、連続の方程式の形になります。また、(5) を

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\beta_m}{\alpha} \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} S_j = \int_V d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij}$$

と書いたとき、 V が時間依存していなければ

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{p}_{\text{field}}) = \int_V d^3x \sum_{i=1}^3 \partial_i T_{ij}$$

として、 $\beta_m S/\alpha$ の 3 次元積分は電磁場の運動量 $\mathbf{p}_{\text{field}}$ と見れます。そして、右辺は運動量の時間変化となります。なので、電荷密度と電流密度による連続の方程式に当てはめて言えば、(5) での第一項は領域の表面を通過する単位時間あたりの運動量、左辺に対応する第二項は領域内で持っている電磁場の運動量と言えます。このように、 T_{ij} は応力と運動量、 S はエネルギーと運動量としての役割を持って現れます。

・補足

自己インダクタンスを別の視点から見ます。電磁誘導は

1. 時間変化する電流を導線に流す
2. 時間変化する磁場が現れる
3. その磁場を受けて別の導線に電流が発生する

となっており、上では 2 と 3 からファラデーの法則を作っています。今度は、2 を無視して 1,3 から U_m を求めます。

閉曲線 C_1 に時間変化する電流 I_1 が流れているとします。実験結果から、閉曲線上の微小部分 Δl_1 から距離 R の位置にある電荷 Q_2 は

$$\Delta F = -\beta_m Q_2 \frac{1}{R} \frac{dI_1}{dt} \Delta l_1$$

という力を受けます。 Δl_1 は電流の進行方向です。マイナスは、 C_1 の電流が増加しているなら電流の方向の逆方向に力が作用し、減少しているなら同じ方向に力が作用するからです。 C_1 全体からの力は

$$\mathbf{F} = -\beta_m Q_2 \oint_{C_1} dl_1 \frac{dI_1}{dt}$$

となります。

この力が同じ閉曲線上にいる電荷に作用する場合を考えます。単純化するために閉曲線 C を円とし、そこに時間変化する電流 I が流れているとします。この円上の 2 点を取り、それぞれを微小部分 $\Delta l_1, \Delta l_2$ とします。 Δl_1 での電流による力が Δl_2 を微小時間に通過する電荷 ΔQ に作用するとすれば、仕事は

$$\Delta W = \oint_C dl_2 \cdot \mathbf{F} = -\Delta Q \beta_m \oint_C dl_2 \cdot \oint_C dl_1 \frac{1}{R} \frac{dI_1}{dt}$$

I は位置に依存していないので、外に出して

$$\Delta W = \oint_C dl_2 \cdot \mathbf{F} = -\Delta Q \frac{dI}{dt} L$$

通過する電荷 ΔQ は $I = \Delta Q / \Delta t$ なので

$$\Delta W = -I \Delta t \frac{dI}{dt} L$$

ポテンシャル ΔU にするために仕事の符号を反転させて、 Δt で割れば

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = I \frac{dI}{dt} L \Rightarrow \frac{dU}{dt} = IL \frac{dI}{dt}$$

となり、(3) と一致し、今の力による仕事は起電力に対応しています (磁場を経由してないので β_b は出てこない)。自己インダクタンスは

$$L = \beta_m \oint_C dl_2 \cdot \oint_C dl_1 \frac{1}{R}$$

と与えられます。