応力テンソル

物体に作用している応力を表現する応力テンソルを求めます。数学的なテンソルの定義を知らなくても行列を知っていれば十分です。
ここでの話はデカルト座標 (直交座標) の場合です。
途中でテンソルのやや数学よりの話もしていますが、無視しても困らないです。

連続体の話では任意の法線方向の面での応力ベクトルが必要なので、それがどう書けるのかを求めます。方向のはっきりしているベクトルで書くのが便利なので、直交座標の基底方向の応力ベクトルの和になるようにします。そのために、コーシーの四面体（Cauchy's tetrahedron）と呼ばれるものを使います。

点 Q における法線ベクトルで与えられている応力ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ があるとします。ここで、点 Q を原点とし、a, b, c 軸による直交座標を作ります。このとき、微小な四面体の斜めの面が点 Q の法線ベクトルを持つとし、近似的に $\boldsymbol{\tau}$ はこの面に作用していると考えます (図 1)。そして、この四面体での応力の関係を運動方程式によって与え、それを四面体の大きさを 0 にした極限に戻すことで、点 Q に作用している応力ベクトルになるとします (四面体の斜めの面が点 Q を含む面になると考える)。

四面体の 4 つの面 S, A, B, C にそれぞれ応力 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}_a, \boldsymbol{\tau}_b, \boldsymbol{\tau}_c$ が作用しているとします。面積力はそれぞれの面の面積を $\Delta S, \Delta A, \Delta B, \Delta C$ として

$$S:\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})\Delta S\ ,\ A:\ \boldsymbol{\tau}_a(-\boldsymbol{a})\Delta A\ ,\ B:\ \boldsymbol{\tau}_b(-\boldsymbol{b})\Delta B\ ,\ C:\ \boldsymbol{\tau}_c(-\boldsymbol{c})\Delta C$$

と与えられる力です。$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はそれぞれの面の単位法線ベクトルで、$\boldsymbol{n}$ は四面体の外側を向いているとします。また、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は a, b, c 軸の正方向の単位ベクトルにもなっています。なので、S, A, B, C の面での応力は四面体の外側に向けています。

ここで運動方程式を考えます。四面体は運動方程式が適用できる程に微小として、四面体の密度を ρ、体積を ΔV、速度を $\boldsymbol{v}$、作用する力を $\boldsymbol{F}$ とすれば、運動方程式は

$$\rho\Delta V\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

と与えられます。連続体では $\boldsymbol{F}$ は体積力と面積力に分解できると考えているので、四面体において、体積力を $\boldsymbol{f}$ として

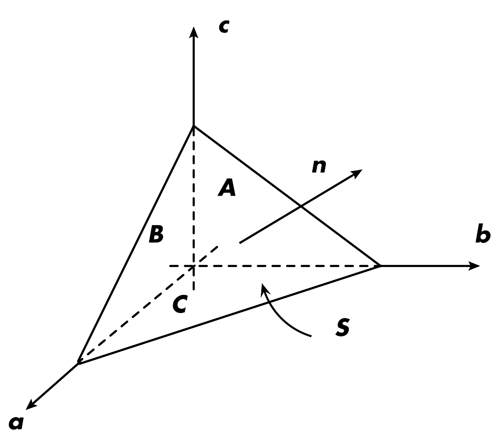

図 1

$$\rho\Delta V\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{f}\rho\Delta V+\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})\Delta S+\boldsymbol{\tau}_a(-\boldsymbol{a})\Delta A+\boldsymbol{\tau}_b(-\boldsymbol{b})\Delta B+\boldsymbol{\tau}_c(-\boldsymbol{c})\Delta C$$

と書けるはずです。この運動方程式は、体積 ΔV を含む項と面積 $\Delta S,\Delta A,\Delta B,\Delta C$ を含む項によって構成されています。

四面体が十分微小なら辺の長さはどれもほぼ同じと見なせるはずなので、一辺の長さはどれも Δl 程度になっているとして、体積と面積を $\Delta V\simeq(\Delta l)^3,\ \Delta S\simeq\Delta A\simeq\cdots\simeq(\Delta l)^2$ と近似します。そうすると、四面体を原点まで小さくするために $\Delta l\to 0$ の極限を取ったとき（各辺を同時に縮小させて法線方向を変えない)、ΔV の項の方が早く 0 となります。よって、$\Delta l\to 0$ の極限において運動方程式は

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})\Delta S+\boldsymbol{\tau}_a(-\boldsymbol{a})\Delta A+\boldsymbol{\tau}_b(-\boldsymbol{b})\Delta B+\boldsymbol{\tau}_c(-\boldsymbol{c})\Delta C=0$$

とできます。

これを変形させるために、今のように四面体の面 A,B,C がそれぞれ直交しているとき、それらの面積は

$$\Delta A=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S\ ,\ \Delta B=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S\ ,\ \Delta C=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$$

となっていることを示します。四面体の c 軸上の頂点の位置を h とします。面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ との間の角度 θ は

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{n}|\cos\theta=\cos\theta$$

なので、面 S からの四面体の高さは

$$h\cos\theta=h(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

この四面体の体積は底面積 $\times$ 高さ $/3$ なので、面 S を底面と見たときは

$$\frac{1}{3}\Delta Sh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

これは面 C を底面と見たときでの体積 $\Delta Ch/3$ と等しいので

$$\Delta S(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})=\Delta C$$

となります。他の面でも同様です。また、体積は $\Delta Sh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})/3$ であるために、$h\to 0$ によって四面体を縮小させれば、全ての面が同時に縮小していきます。

この関係と $\boldsymbol{\tau}(-\boldsymbol{n})=-\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})$ (作用・反作用の法則) から、応力ベクトルは

$$(\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})-\boldsymbol{\tau}_a(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{\tau}_b(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{\tau}_c(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}))\Delta S=0$$

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{\tau}_a(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})+\boldsymbol{\tau}_b(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})+\boldsymbol{\tau}_c(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n})$$

また、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は今の直交座標の基底 (各軸の方向を向いた単位ベクトル) なので

$$\boldsymbol{n} = n_a\boldsymbol{a} + n_b\boldsymbol{b} + n_c\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = 1\ ,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \cdots = 0$$

となっていることから

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = n_a\ ,\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} = n_b\ ,\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n} = n_c \quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = n_a\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + n_b\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + n_c\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = n_a)$$

これを使えば

$$\Delta A = n_a\Delta S\ ,\ \Delta B = n_b\Delta S\ ,\ \Delta C = n_c\Delta S$$

となるので、点 Q(今の直交座標での原点) での応力ベクトルは

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\tau}_a(\boldsymbol{a})n_a + \boldsymbol{\tau}_b(\boldsymbol{b})n_b + \boldsymbol{\tau}_c(\boldsymbol{c})n_c$$

とも書けます。これの右辺は添え字が重なってますが和は取らないです ($\boldsymbol{\tau}_a(\boldsymbol{a})$ は法線ベクトル $\boldsymbol{a}$ によって方向付けられた応力、n_a は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の a 成分)。このように任意の面に作用する応力 $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})$ は、座標軸に直交する 3 つの面に作用している応力によって書けます (任意の方向を向いた面の応力は ab 平面,ac 平面,bc 平面に作用している応力で書ける)。

添え字を扱いやすくするために、a 成分を 1、b 成分を 2、c 成分を 3 と書き直します (ここでは添え字は $1,2,3$ ですが、1 を x、2 を y、3 を z にしている場合が多い)。添え字を書き換えて

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{e}_1)n_1 + \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{e}_2)n_2 + \boldsymbol{\tau}_3(\boldsymbol{e}_3)n_3 \quad (\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3) \tag{1}$$

後のために、右辺の応力ベクトルでは法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$ でなく直交座標の基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ で書いています。今の基底に対して成分を

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n}) = (\tau_1(\boldsymbol{n}),\tau_2(\boldsymbol{n}),\tau_3(\boldsymbol{n}))$$

$$\boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{e}_1) = (\tau_{11},\tau_{21},\tau_{31})\ ,\ \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{e}_2) = (\tau_{12},\tau_{22},\tau_{32})\ ,\ \boldsymbol{\tau}_3(\boldsymbol{e}_3) = (\tau_{13},\tau_{23},\tau_{33})$$

と書くことにしてみると

$$\tau_1(\boldsymbol{n}) = \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3$$

$$\tau_2(\boldsymbol{n}) = \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3$$

$$\tau_3(\boldsymbol{n}) = \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3$$

これらは 3×3 行列の積の規則になっているので

$$\begin{pmatrix} \tau_1(\boldsymbol{n}) \\ \tau_2(\boldsymbol{n}) \\ \tau_3(\boldsymbol{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

3×3 行列を σ_{ij} として成分で書けば

$$\tau_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ij} n_j$$

σ_{ij} を応力テンソル (stress tensor) やコーシーの応力テンソルと呼び、応力ベクトルと法線ベクトルの間の関係を与えています。また、見て分かるように応力テンソルは求めたい応力ベクトルの法線ベクトルとは無関係になっています。

テンソルであることを簡単に示します。表記の都合のために、$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})$ を $\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})}$ と書くことにして、法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ から応力ベクトル $\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})}$ への変換を

$$\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})} = T(\boldsymbol{n})$$

と与えたとします。T は変換の記号としているので左辺がベクトルでも太字にしていませんが、紛らわしかったら太字と思ってください。ここで、T は線形演算子として、その線形性から

$$T(\boldsymbol{n}) = T(n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2 + n_3\boldsymbol{e}_3) = T(n_1\boldsymbol{e}_1) + T(n_2\boldsymbol{e}_2) + T(n_3\boldsymbol{e}_3) = n_1T(\boldsymbol{e}_1) + n_2T(\boldsymbol{e}_2) + n_3T(\boldsymbol{e}_3)$$

と書けるとします。そうすると、(1) から

$$\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{e}_1)} n_1 + \boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{e}_2)} n_2 + \boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{e}_3)} n_3 = T(\boldsymbol{e}_1)n_1 + T(\boldsymbol{e}_2)n_2 + T(\boldsymbol{e}_3)n_3$$

として、$\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{e}_i)} = T(\boldsymbol{e}_i)$ と対応させられます。このように、線形演算子 T によって応力ベクトルは書けて、線形演算子は 2 階テンソルなので T は 2 階テンソルです（より細かい定義は数学の「直交座標での 2 階テンソル」参照)。$\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})}$ を成分で書くと

$$\tau_i^{(\boldsymbol{n})} = T(\boldsymbol{e}_j) n_j$$

となっているために、$T(\boldsymbol{e}_j)$ の成分は 2 つの添え字を持つ t_{ij} となる必要があり、$\tau_i^{(\boldsymbol{n})} = t_{ij}n_j$ となります（行列 t_{ij} によるベクトルの変換の形)。この t_{ij} が 2 階テンソル T の成分と定義されるので、応力ベクトルでの σ_{ij} は 2 階テンソルの成分です。また、$T(\boldsymbol{e}_i)$ と書いていることから分かるように、テンソルの成分は基底に依存しています。

ベクトルの成分は基底で展開したときの係数であるように、2 階テンソルの成分も基底で展開した形で書かれます。そのときに使われるのがテンソル積「$\otimes$」と呼ばれる記号で、基底 $\boldsymbol{e}_i$ によって

$$T = t_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

と書かれます。「$\otimes$」を省いて $T = t_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ と書かれることも多いです。テンソル積はテンソルを作る記号で、$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j$ から作られる 2 階テンソルです。分かりやすくしたければ

$$F_{11} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1,\ F_{12} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \ldots, F_{33} = \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3$$

のように表記すればいいです。

ベクトルと基底の内積を取ると成分が取り出せるように、テンソルの成分も基底との内積から取り出せます。あるベクトル $\boldsymbol{v}$ と 2 階テンソル T があるとします。$\boldsymbol{v}$ を 2 階テンソルで変換するとして、テンソル積を使うと

$$\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v})$$

$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v})$ は、$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ で 1 つの記号なので $(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$ として、それが $\boldsymbol{v}$ に作用しているという意味で表記しています。分かりづらかったら、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})}$、$t_{ij}$ を σ_{ij} として上で求めた応力ベクトルの式に当てはめてください。$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ は 2 階テンソルなので線形性を持つことから

$$t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{v}) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(v_k\boldsymbol{e}_k) = v_k t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k)$$

一方で、w_i は v_i をテンソルの成分で変換したものなので

$$w_i = t_{ij}v_j$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_i t_{ij} v_j$$

これらが等しいことから

$$v_k t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i t_{ij} v_j$$

この式は

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i \delta_{jk} \tag{2}$$

となっていれば

$$v_k t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k) = v_k t_{ij} \boldsymbol{e}_i \delta_{jk} = \boldsymbol{e}_i t_{ij} v_j$$

として成立します。よって、テンソル積は (2) の計算規則を持ちます。この規則を使うと

$$T(\boldsymbol{e}_k) = t_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k) = t_{ij}\boldsymbol{e}_i \delta_{jk} = t_{ik}\boldsymbol{e}_i$$

これと $\boldsymbol{e}_l$ の内積を取ることで

$$\boldsymbol{e}_l \cdot T(\boldsymbol{e}_k) = t_{ik}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_i = t_{ik}\delta_{li} = t_{lk}$$

となるので、テンソルの成分を取り出せます。

2 階テンソル (線形演算子と見なしたときの 2 階テンソル) に触れてきましたが、基本的な連続体の話でテンソルやテンソル積のことを気にする必要はほぼないです。大体の場合で応力テンソルは 3×3 行列と思っていれば困らないです。表記としてテンソル積が出てくることは多いですが、ただの表記と思っていれば十分です。

ついでに、連続体の力学でよく使われるテンソルの表記にも触れておきます。多くの場合では 2 階テンソル T は太字で書かれ、変換の式は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}$ と書かれます (この表記を使っている数学の本も多い)。これは線形演算子が $\boldsymbol{u}$ に作用している形で、行列 M によるベクトルの変換を $\boldsymbol{v} = M\boldsymbol{u}$ と書くのと同じ感覚です。

紛らわしい表記として、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}$ としてドットを使っている場合もあります。このときの「$\cdot$」はベクトル同士の内積ではなく、テンソルによるベクトルの変換の意味になっています。この表記を使うと応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \ , \ \boldsymbol{\tau}^{(\boldsymbol{n})} = \tau_i^{(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i\sigma_{ij}n_j = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

となります。このように書くと内積との区別が面倒になる場合があり、例えば

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u})$$

なんていう非常に紛らわしい書かれ方もされます (左はベクトルの内積、右はテンソルのドット)。他にもテンソル積は

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{n} = n_k\sigma_{ij}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k$$

と書かれ、このときのドットは内積でなくテンソルに対するものですが、テンソル積の規則において

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i\delta_{jk}$$

として、真ん中の式で $\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k$ としてベクトルの内積に置き換えられて書かれます。

テンソルの表記は本によって異なっていることが多いですし、独自の表記を使っている場合もあるので、定義を確認しないと混乱のもとになります。

最後に、固有値に関する単語にも触れておきます。応力テンソルは 2 階テンソルで、成分は 3×3 行列なので (3 次元の場合)、行列の対角化の話が出てきます。特に、応力テンソルが $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ として添え字の入れ替えに対して対称になっている場合が重要になっています。このようなときは対称テンソルと呼ばれ、行列で言えば対称行列のことです。というわけで、応力テンソルを成分が実数の対称テンソルとして対角化を見ていきます。対称テンソルと言っていますが、実対称行列 (実数の対称行列) の話です。

まず、実対称行列での固有値、固有ベクトルの性質を示します。行列を M、その固有値を λ、λ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば、定義から

$$M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{3}$$

3×3 行列の固有値の数は重複した場合も含めて 3 個です (固有値の話では、例えば $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3$ でも 3 個とすることが多い)。3 個になるのは固有多項式 $\det[M - \lambda I]$ (I は単位行列) が

$$\det[M - \lambda I] = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

と書けるためです (代数の基本定理)。右辺のそれぞれに適当な n 乗がつくときは固有値が重複します。

ここから行列 M は実対称行列とします (t を転置の記号として $M = M^t$)。実対称行列の固有値は実数になることを示します。λ が実数になっているのかはまだ分からないので、$\boldsymbol{v}$ は複素ベクトル（成分が複素数のベクトル）とし、複素共役を「$*$」で表すことにします。今の表記ではベクトルは 3×1 行列なので、「$\dagger$」を転置と複素数の両方を取る記号として (エルミート共役)、$\boldsymbol{v}^*$ と $\boldsymbol{v}$ の内積は行列計算の意味で $\boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v}$ と書けます。そうすると

$$\lambda \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger \lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger M \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger M^t \boldsymbol{v}$$

行列の転置は $(AB)^t = B^t A^t$ なので

$$\lambda \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger M^t \boldsymbol{v} = (M \boldsymbol{v}^*)^t \boldsymbol{v} = (M^* \boldsymbol{v}^*)^t \boldsymbol{v} = (M \boldsymbol{v})^\dagger \boldsymbol{v} = (\lambda \boldsymbol{v})^\dagger \boldsymbol{v} = \lambda^* \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v}$$

M は実行列なので $M^* = M$、λ はスカラーなので $\lambda^\dagger = \lambda^*$ となっています。よって、これから $\lambda = \lambda^*$ なので固有値は実数です。

$\boldsymbol{v}$ は複素ベクトルとしているので、実ベクトル (成分が実数のベクトル)$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によって $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}$ と書けます。そうすると

$$M(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})$$

λ は実数なので、実部と虚部に対して

$$M\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}\ ,\ M\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{b}$$

これらは解として、$\boldsymbol{a} \neq 0,\ \boldsymbol{b} = 0$ なら $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a} = 0, \boldsymbol{b} \neq 0$ なら $\boldsymbol{v} = i\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ なら $\boldsymbol{v} = (1+i)\boldsymbol{a}$ になります。固有ベクトルは (3) であればいいので、i や $1+i$ を外しても固有ベクトルのままです。よって、実対称行列の固有ベクトルは実ベクトルとして与えられます。

次に、実対称行列において異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示します。2 つの異なる固有値 λ_1, λ_2 があり、その固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ として

$$M\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1\ ,\ M\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$$

左では $\boldsymbol{v}_2$、右では $\boldsymbol{v}_1$ を行列としてかけると

$$\boldsymbol{v}_2^t M \boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_2^t \boldsymbol{v}_1\ ,\ \boldsymbol{v}_1^t M \boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_1^t \boldsymbol{v}_2$$

そうすると

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_2^t \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2^t M \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2^t M^t \boldsymbol{v}_1 = (M\boldsymbol{v}_2)^t \boldsymbol{v}_1 = (\lambda_2 \boldsymbol{v}_2)^t = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2^t \boldsymbol{v}_1$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるなら $\boldsymbol{v}_2^t \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$ なので、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は直交します。もう 1 つ異なる固有値 λ_3 とその固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$ があるとして

$$M\boldsymbol{v}_3 = \lambda_3\boldsymbol{v}_3$$

とすれば

$$\lambda_3\boldsymbol{v}_2^t\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2^tM\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2^tM^t\boldsymbol{v}_3 = (M\boldsymbol{v}_2)^t\boldsymbol{v}_3 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2^t\boldsymbol{v}_3$$

$$\lambda_3\boldsymbol{v}_1^t\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1^tM\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1^tM^t\boldsymbol{v}_3 = (M\boldsymbol{v}_1)^t\boldsymbol{v}_3 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1^t\boldsymbol{v}_3$$

となり、$\lambda_3 \neq \lambda_1, \lambda_2$ ならそれぞれと直交することが分かります。さらに異なる固有値の数を増やしていっても同様です。よって、実対称行列のとき、異なる固有値に対応する固有ベクトルはお互いに直交します。直交しているために固有ベクトルは基底として使えます。また、固有値、固有ベクトルの式は変形すれば

$$(M - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$$

と書けて (I は単位行列)、これから $\boldsymbol{v}$ を定数倍してもこの式は成立するのが分かります。なので、基底とするときに固有ベクトルを単位ベクトルとできます。

直交しているという性質を使うと簡単に対角行列を作れます。2 階テンソルはベクトルを別のベクトルに変換するので、それが

$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$$

となっているなら、λ は固有値、$\boldsymbol{v}$ はその固有ベクトルと言えます（行列 M で $\boldsymbol{v}$ を変換したら $\lambda\boldsymbol{v}$ になるとしたのと同じ）。そして、T が対称テンソルであるなら対称行列と同じ性質を持ちます（上での $M\boldsymbol{v}$ を $T(\boldsymbol{v})$ とするか、テンソルの表記を $T\boldsymbol{v}$ とすれば同じ話になる)。なので、基底として固有ベクトルを選んだとします。そうすると、テンソルの成分は基底をかければ取り出せるので、固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$、対応する固有ベクトルによる基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$) として求めると

$$t_{11} = \boldsymbol{e}_1 \cdot T(\boldsymbol{e}_1) = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \lambda_1$$

$$t_{12} = \boldsymbol{e}_1 \cdot T(\boldsymbol{e}_2) = \lambda_2\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$$

$$t_{13} = \boldsymbol{e}_1 \cdot T(\boldsymbol{e}_3) = \lambda_3\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

$$t_{22} = \boldsymbol{e}_2 \cdot T(\boldsymbol{e}_2) = \lambda_2\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \lambda_2$$

$$t_{23} = \boldsymbol{e}_2 \cdot T(\boldsymbol{e}_3) = \lambda_3\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

$$t_{33} = \boldsymbol{e}_3 \cdot T(\boldsymbol{e}_3) = \lambda_3\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \lambda_3$$

対称なので残りの成分は 0 です。よって、2 階テンソルの成分 t_{ij} は対角成分が固有値の対角行列になっています。このように、固有ベクトルを基底とすることで対角化できます。行列の性質を使っても同じ結果になることを下の補足でしています。

実対称行列の固有値と固有ベクトルを連続体の力学では別の単語で呼んでいます。実数の対称テンソルにおいて、その固有値に対応する実数の固有ベクトルを主方向 (principal direction) と呼びます。このときの固有値は主

値 (principal value) と呼ばれたりもしますが、複素数の主値 (principal value) と紛らわしいので使うときは注意が必要です。法線ベクトルが固有ベクトルになっている面は主面 (principal plane) と呼ばれます。

これらの単語は対称な応力テンソルに対して使われていて、応力テンソルの 3 個の固有ベクトルを基底として選んだ時、その座標軸は応力テンソルの主軸 (principal axes of stress tensor) と呼ばれ、固有値は主応力 (principal stress) と呼ばれます。

・補足

実対称行列 M の対角化に簡単に触れます（より細かい話は数学の「対角化」参照)。M の異なる 3 個の固有値に対応する固有ベクトルがお互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ になっているとします。これらから行列を

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

と作ったとします。U^tU は

$$\begin{aligned} U^tU &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として単位行列になります。転置との積が単位行列なので、U は直交行列 ($U^t = U^{-1}$) です。

実対称行列は直交行列で対角化でき (対角成分が 1 で残りが 0 の行列)、その成分は固有値で与えられます。つまり、実対称行列 M から

$$M' = U^tMU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

として、対角成分が固有値となる対角行列 M' が作れます。また、固有ベクトルを $\boldsymbol{a}$ として $M\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$ としたとき

$$\begin{aligned} U^tM\boldsymbol{a} &= \lambda U^t\boldsymbol{a} \\ U^tMUU^{-1}\boldsymbol{a} &= \lambda U^t\boldsymbol{a} \\ M'\boldsymbol{b} &= \lambda\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{b} = U^t\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

として、対角化された M' による式にできます。