ひずみテンソル

物体の変形をどう表すかを見ていきます。
ここでは x_1, x_2, x_3 軸によるデカルト座標とします。

ある連続体として扱える物体があり、その内部の物質粒子の位置を考えます。物質粒子の時間 t での位置は $\boldsymbol{x}(t)$ とします。時間 $t_0 < t$ のときの位置を $\boldsymbol{X}(t_0)$ と書くことにします。$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{X}(t_0)$ は連続的に繋がっているので、2 つを繋げる変換として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t)$$

が存在し、これの逆変換

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$$

も存在するとします。$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$ は物質表示、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t)$ は空間表示です。見ためが分かりやすくなるので $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$、$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ と書くことにしてしまいます。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ の差を $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X}$ と与えたとします。これは時間 t_0, t での粒子の位置の差で、変位 (displacement) と呼ばれます。$\boldsymbol{x}$ を変数にするなら $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ となります。変数を変えただけなので $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ です。変数を無視して書くなら $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}$ となりますが、ここでは後で使う近似をはっきりさせるために $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{u}$ を区別して書きます。

次に、時間 t_0 では $\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{A}$ 離れた位置 $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}$、時間 t では $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{a}$ 離れた位置 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ にいる物質粒子を用意します。$|\boldsymbol{A}|$ は時間 t_0 での物質粒子間の距離、$|\boldsymbol{a}|$ は時間 t での物質粒子間の距離です。なので、$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{a}|$ では時間経過で 2 つの物質粒子の距離は変化していなく、これは物体に変形が起きていないことになります（剛体）。一方で、$|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{a}|$ では間の距離が変化するので、物体は変形を起こします。連続体の変形のことをひずみ (strain) と言っています。ひずみをどのように表現するかを見ていきます。

変形前と変形後の位置の差なんてものを定義した理由を見ていきます。まずは簡単にするために 1 次元とし、長さ ΔX の棒の左端が原点から X の位置になるように置いてあるとします。1 次元の物体の変形は長さの変化なので、ΔX が時間 t で Δx になったとします。ひずみはこの差によるズレのことなので、長さの差をもとの長さで割った量で表すのが分かりやすいです。なので、ひずみは

$$\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} \tag{1}$$

として表されます。

これが U から出てくることは簡単に分かります。分かりやすいので、棒の右端 $X + \Delta X$ の物質粒子を見ることにします。これは時間 t では長さが Δx での右端にいるので、$x + \Delta x$ にいるとすれば、U の定義から

$$U(X + \Delta X, t) = x(X + \Delta X, t) - X + \Delta X = x + \Delta x - X - \Delta X$$

そうすると

$$U(X + \Delta X, t) - U(X, t) = \Delta x - \Delta X \tag{2}$$

$x = X$ なら $U(X+\Delta X, t)$ はそのまま棒の長さの差、$x \neq X$ では原点からの左端の位置に差があるのでそれに対応する $U(X,t)$ を引く必要があるというだけです。これを ΔX で割れば (1) になります。

(1) は ΔX が微小として 0 の極限を取ると、偏微分の定義から

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} = \frac{U(X+\Delta X, t) - U(X,t)}{\Delta X} = \frac{\partial U(X,t)}{\partial X}$$

と書けます。このようにひずみは変形前後の位置の差の微分という形で与えられます。

ひずみを表す量としては、2 乗してから差を取った

$$\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} \tag{3}$$

としたものがより使われます。これは

$$\frac{(\Delta x)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} = (\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X})^2 + \frac{-2(\Delta X)^2 + 2\Delta x \Delta X}{(\Delta X)^2} = (\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X})^2 + 2\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X}$$

と変形できるので、ΔX が微小なとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lim_{\Delta X \to 0}\frac{(\Delta x)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} &= \lim_{\Delta X \to 0}\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} + \frac{1}{2}\lim_{\Delta X \to 0}(\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X})^2 \\
&= \lim_{\Delta X \to 0}\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} + \frac{1}{2}\lim_{\Delta X \to 0}\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X}\lim_{\Delta X \to 0}\frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} \\
&= \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2}(\frac{\partial U}{\partial X})^2
\end{aligned} \tag{4}$$

となり、この場合も変形前後の位置の差の微分の形になります。このようにして、ひずみを表す量が与えられています。

ここから 3 次元にします。3 次元の物体において $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}$ の 2 点があり、変形後の時間 t では $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ にいるとします。求めたいのは $(\Delta\boldsymbol{x})^2 - (\Delta\boldsymbol{X})^2$ です。

時間 t での $\Delta\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X})$ から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) \\
\Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \\
&= \boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X} \\
&= \Delta\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)
\end{aligned}$$

と書けます。$\Delta\boldsymbol{X}$ は微小として $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t)$ をテイラー展開します。これは多変数でのテイラー展開です。ベクトルの成分は X_i $(i = 1,2,3)$ のように書くことにして、$\boldsymbol{U}(X_1+\Delta X_1, X_2+\Delta X_2, X_3+\Delta X_3, t)$ を ΔX_i が微小として展開すれば、$\Delta\boldsymbol{X}$ の 1 次までで

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}, t) \simeq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t) + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_3}\Delta X_3$$

なので、$\Delta \boldsymbol{X}$ の 1 次までで $\Delta \boldsymbol{x}$ は

$$\Delta \boldsymbol{x} \simeq \Delta \boldsymbol{X} + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_3}\Delta X_3$$

成分で書けば

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= \Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_1}{\partial X_3}\Delta X_3 \\
\Delta x_2 &= \Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_2}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_3}\Delta X_3 \\
\Delta x_3 &= \Delta X_3 + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_3}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_3}{\partial X_3}\Delta X_3
\end{aligned}$$

$\Delta \boldsymbol{x}$ の内積を取ると

$$\begin{aligned}
(\Delta \boldsymbol{x})^2 &= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 \\
&\simeq (\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_2}\Delta X_2 + \frac{\partial U_1}{\partial X_3}\Delta X_3)^2 + \cdots \\
&= (\Delta X_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\Delta X_2 + \frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\Delta X_3 + \frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 \\
&\quad + 2\frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_1 \Delta X_i + 2\frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_2 \Delta X_i + 2\frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_3 \Delta X_i \\
&\quad + (\frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 + (\frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i)^2 \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + 2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j \Delta X_i \\
&\quad + \frac{\partial U_1}{\partial X_i}\Delta X_i \frac{\partial U_1}{\partial X_j}\Delta X_j + \frac{\partial U_2}{\partial X_i}\Delta X_i \frac{\partial U_2}{\partial X_j}\Delta X_j + \frac{\partial U_3}{\partial X_i}\Delta X_i \frac{\partial U_3}{\partial X_j}\Delta X_j \\
&= (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + 2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j \Delta X_i + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\Delta X_i \Delta X_j
\end{aligned}$$

第 4 項は添え字の付け替えから

$$2\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\Delta X_j \Delta X_i = (\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j})\Delta X_i \Delta X_j$$

とできるので

$$(\Delta \boldsymbol{x})^2 = (\Delta X_1)^2 + (\Delta X_2)^2 + (\Delta X_3)^2 + (\frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})\Delta X_i \Delta X_j$$

これのルートは変形後の 2 点間の長さです。ひずみの量 (3) にするために $(\Delta \boldsymbol{X})^2$ との差を取ると、今の近似の範囲内で

$$(\Delta \boldsymbol{x})^2-(\Delta \boldsymbol{X})^2 \simeq (\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})\Delta X_i \Delta X_j$$

これから、右辺の括弧部分が 0 なら 2 点間の距離は同じままなのが分かります。括弧部分から

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j})$$

としたものをラグランジュのひずみテンソル (strain tensor) と言い、対称テンソルです。1 次元では (4) になります。テンソルとなっているのは簡単に言えば、2 階テンソル T は 2 つのベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ をスカラー $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ にし、そのスカラーはテンソルの成分 t_{ij} によって $t_{ij}x_iy_j$ で与えられるので、$e_{ij}\Delta X_i\Delta X_j$ での e_{ij} は 2 階テンソルの成分です。

ひずみテンソルには U_i の 2 次の項があるので、これを消すために $\partial U_i/\partial X_j$ が十分小さいとする近似が使われます。この近似によってひずみテンソルは

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j})$$

となり、1 次までを含む形になります。この近似の他の利点は U,u の区別がなくなる点です。$\boldsymbol{U}$ の $\boldsymbol{x}$ 周りでの展開は

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_i}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}(X_i-x_i)+\cdots$$

このときの X_i による偏微分の項は第 1 項に比べて十分無視できるとして

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)\simeq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$$

これは

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t)-\boldsymbol{X}\simeq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$$

となっていることです。$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$ と変数が $\boldsymbol{x}$ になっているので

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\simeq \boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$$

となり、$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)\simeq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\simeq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ が言えます。このため、変数 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}$ の置き換えに対して $\boldsymbol{U}\simeq \boldsymbol{u}$ と表記できます（元々の同じ量としての等式 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ との区別に注意)。

また、微分において 1 次の寄与を無視してしまえば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial X_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial(U_1+X_1)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(U_2+X_2)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(U_3+X_3)}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= (\frac{\partial U_1}{\partial X_1}+1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&\simeq \frac{\partial}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

とできます。よって、$\partial U_i/\partial X_j$ が十分小さいという近似のもとで、ひずみテンソルは

$$
\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}
$$

となり、$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}$ の区別がなくなります。このときは微小ひずみテンソルと呼ばれます。微小とついているように起きる変形は小さいです。

ここから微小ひずみテンソルを使っていくので、区別をなくして $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}$ と書いていき、微小ひずみテンソルをひずみテンソルと呼んでいきます。また、時間を省いても混乱しなそうな場合では $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ と書いてしまいます。

ひずみテンソルが何を表しているのか見ていきます。まず、対角成分 e_{ii} (和ではなく e_{11}, e_{22}, e_{33} のこと) はすでに 1 次元の場合で見たように、x_i 方向の伸縮を与えます。実際に、u_i を見ると

$$
\begin{aligned}
&u_1(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) \simeq u_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Delta x_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) + e_{11}\Delta x_1 \\
&u_2(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3) \simeq u_2(x_1, x_2, x_3) + e_{22}\Delta x_2 \\
&u_3(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) \simeq u_3(x_1, x_2, x_3) + e_{33}\Delta x_3
\end{aligned}
$$

となっており、x_1 軸、x_2 軸、x_3 軸でそれぞれ同じ形です。そして、(2) で見たように、$u_1(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2, x_3)$ は x_1 軸上の 2 点間の変形前と後での長さの差です。なので、物体が変形しないなら $e_{11} = 0$、変形しているなら $e_{11} \neq 0$ となり、$e_{11} \neq 0$ は x_1 方向の伸縮があることを表します。e_{22}, e_{33} でも同様です。よって、対角成分は Δx_i が正なら、$e_{ii} > 0$ では物体の伸び、$e_{ii} < 0$ では物体の縮みを与えます。

対角成分の結果からすぐに分かることもあります。対角成分は各軸方向の伸縮なので、もとの長さが $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ であった微小体積 $V_0 = \Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ は変形後に

$$
V = (1+e_{11})\Delta x_1(1+e_{22})\Delta x_2(1+e_{33})\Delta x_3 = (1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33})\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3
$$

e_{11}, e_{22}, e_{33} は微小としているので、1 次までの項を残すと

$$
V \simeq (1+e_{11}+e_{22}+e_{33})\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3
$$

このとき、体積の変化をひずみと同じように表すと

$$
\frac{V-V_0}{V_0} = e_{11}+e_{22}+e_{33} = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}
$$

となり、ひずみテンソルのトレースになります。

非対角成分は例えば e_{12} は

$$e_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1})$$

u_1 は x_1 軸上の変形前の位置と変形後の位置の差です。それを x_2 で偏微分しているので、第 1 項は x_2 軸方向の変化に対する x_1 軸方向の変形前後の 2 点間の長さの変化です。このように、変化の方向が異なっているので、長さそのものでなく角度を変化させていると予想できます。

単純な状況にして実際に角度と関係していることを示します。2 次元として x_1, x_2 平面とします。x_1 軸上に左端は原点、右端は Δx_1 になるように棒を置きます。左端は原点に固定されているとして変形させます。x_2 方向なので、u_2 を見ます。棒の左端を固定しているので $u_2(0,0,0) = 0$ です。$u_2(\Delta x_1, 0, 0)$ は棒の右端の x_1 軸から x_2 軸方向に離れた距離 Δu_2 です。これは

$$\Delta u_2 = u_2(\Delta x_1, 0, 0) - u_2(0,0,0) \simeq u_2(0,0,0) + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1 - u_2(0,0,0) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Delta x_1$$

このように原点に固定された棒は x_2 軸方向へ持ち上がるので、変形後の x_1 軸と棒の間の角度 γ_1 は

$$\tan\gamma_1 = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}$$

同様に x_2 軸上に下側が原点、上側が $(0, \Delta x_2, 0)$ になるように置くと、上側が x_1 軸方向に離れた距離 Δu_1 は

$$\Delta u_1 = u_1(0, \Delta x_2, 0) - u_1(0,0,0) \simeq u_1(0,0,0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2 - u_1(0,0,0) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Delta x_2$$

となるので、x_2 軸と棒の間の角度 γ_2 は

$$\tan\gamma_2 = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2}$$

この結果はよく出てくる言い方にすれば、長方形が平行四辺形に変形したときの x_1, x_2 軸からの角度です。

どちらの角度も微小なら、$\Delta x_1, \Delta x_2$ の 0 の極限で

$$\gamma_1 + \gamma_2 \simeq \tan\gamma_1 + \tan\gamma_2 \simeq \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2e_{12} = e_{12} + e_{21}$$

として、ひずみテンソルの非対角成分が出てきます。よって、ひずみテンソルの非対角成分は物質粒子の位置の角度をズラします。

最後に、線素から微小ひずみテンソルを見ておきます。時間 t_0, t での 2 点間の微小な長さを $\Delta\boldsymbol{X}, \Delta\boldsymbol{x}$ とします。$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ なので、テイラー展開の 1 次までで

$$\Delta x_1 = x_1(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - x_1(\boldsymbol{X}, t) \simeq (\nabla x_1)\cdot\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_1\cdot\Delta\boldsymbol{X}$$

$$\Delta x_2 = x_2(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - x_2(\boldsymbol{X}, t) \simeq (\nabla x_2)\cdot\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_2\cdot\Delta\boldsymbol{X}$$

$$\Delta x_3 = x_3(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X}, t) - x_3(\boldsymbol{X}, t) \simeq (\nabla x_3)\cdot\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}_3\cdot\Delta\boldsymbol{X} \quad (\nabla = \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial X_i})$$

これらの $\boldsymbol{F}_i$ は

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \ , \ \Delta x_i = F_{ij}\Delta X_j \quad (\boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{X} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\Delta X_j)$$

と書かれ、連続体の力学では変形勾配 (deformation gradient) と呼ばれます。ベクトルを変換する線形演算子にもなっているので変形勾配テンソルとも呼ばれます。偏微分での連鎖律から

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i(\boldsymbol{X}, t)}{\partial x^j} = \frac{\partial x_i(\boldsymbol{X}, t)}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x^j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}$$

となるので、逆変換は

$$\Delta X_i = (F^{-1})_{ij}\Delta x_j \quad ((F^{-1})_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j})$$

逆変換が存在するには、F_{ij} の行列を F とすれば、$\det F \neq 0$ が要求されます。そして、今は物体が連続的に変形していくとしているので、$\det F > 0$ であるなら $\det F > 0$ のままです。これは、$\det F > 0$ から $\det F < 0$ に連続的に変化するには $\det F = 0$ を通る必要がありますが、$\det F \neq 0$ が要求されているために $\det F < 0$ に行けないからです。

変形勾配テンソルを実対称行列 U, V と直交行列 R を使って

$$F = RU \ , \ F = VR$$

と書くことができ、U は右ストレッチテンソル (right stretch tensor)、V は左ストレッチテンソル (left stretch tensor) と呼ばれます。これは行列の極分解です (下の補足参照)。

微小ひずみテンソルは変形勾配から作れます。時間 t_0, t での線素 $\Delta S, \Delta s$ は

$$(\Delta S)^2 = \Delta\boldsymbol{X} \cdot \Delta\boldsymbol{X} \ , \ (\Delta s)^2 = \Delta\boldsymbol{x} \cdot \Delta\boldsymbol{x}$$

変形勾配を使うと

$$(\Delta s)^2 = \Delta\boldsymbol{x} \cdot \Delta\boldsymbol{x} = \Delta x_i \Delta x_i = F_{ij}\Delta X_j F_{ik}\Delta X_k = F_{ij}F_{ik}\Delta X_j \Delta X_k$$

このときの $C_{jk} = F_{ij}F_{ik}$ をコーシー・グリーンの変形テンソルと言います。また

$$C_{jk} = F_{ij}F_{ik} = (F^T)_{ji}F_{ik} \ \Rightarrow \ C = F^tF = (RU)^t(RU) = U^tR^tRU = U^tU = U^2 \quad (U^t = U)$$

$$b = FF^t = (VR)(VR)^t = VRR^tV^t = VV^t = V^2 \quad (V^t = V)$$

と書けるので、C_{jk} は右コーシー・グリーンの変形テンソルとも呼ばれ、b_{ij} は左コーシー・グリーンの変形テンソルと呼ばれます。変形勾配は

$$U_i = x_i - X_i$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

$$= F_{ij} - \delta_{ij}$$

として変位の微分で書けるので

$$F_{ij}F_{ik} = (\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \delta_{ij})(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \delta_{ik})$$

$\partial U_i/\partial X_j$ は微小として

$$F_{ij}F_{ik} \simeq \frac{\partial U_i}{\partial X_j}\delta_{ik} + \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\delta_{ij} + \delta_{ij}\delta_{ik} = \frac{\partial U_k}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \delta_{jk} \tag{5}$$

これを使えば

$$(\Delta s)^2 \simeq (\frac{\partial U_k}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \delta_{jk})\Delta X_j\Delta X_k = \Delta X_i\Delta X_j + (\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i})\Delta X_i\Delta X_j = \Delta X_i\Delta X_j + 2e_{ij}\Delta X_i\Delta X_j$$

となって、微小ひずみテンソルが出てきます。

線素から見ると、微小ひずみテンソルの成分の意味が分かりやすいです。時間 t_0, t での線素の差は

$$(\Delta s)^2 - (\Delta S)^2 \simeq 2e_{ij}\Delta X_i\Delta X_j$$

x_1 軸上の線素 $\Delta S = \Delta X_1\Delta X_1$ とすれば、$i, j = 1$ なので

$$\frac{1}{2}\frac{(\Delta s)^2 - (\Delta S)^2}{(\Delta S)^2} \simeq e_{11}$$

これから、e_{11} は線素の長さの変化を与えているのが直接的に分かります。もっと分かりやすくするなら、微小な変形なので $\Delta s \simeq \Delta S$ として

$$(\Delta s)^2 - (\Delta S)^2 = (\Delta s - \Delta S)(\Delta s + \Delta S) \simeq 2\Delta S(\Delta s - \Delta S)$$

これを入れれば

$$\frac{\Delta s - \Delta S}{\Delta S} \simeq e_{11}$$

となり、線素の差になっているのが分かります。

非対角成分も同じように示せます。x_1 軸上のベクトルを $\Delta\boldsymbol{X}^{(1)}$、$x_2$ 軸のベクトルを $\Delta\boldsymbol{X}^{(2)}$ とします。この 2 つは直交しています。変形後にこの 2 つの間の角度が θ になったとすれば、変形後の $\Delta\boldsymbol{x}^{(1)}, \Delta\boldsymbol{x}^{(2)}$ によって

$$\Delta \boldsymbol{x}^{(1)} \cdot \Delta \boldsymbol{x}^{(2)} = |\Delta \boldsymbol{x}^{(1)}||\Delta \boldsymbol{x}^{(2)}| \cos\theta$$

変形勾配を使って書けば

$$\Delta \boldsymbol{x}^{(1)} \cdot \Delta \boldsymbol{x}^{(2)} = F_{ij}\Delta X_j^{(1)} F_{ik}\Delta X_k^{(2)}$$

今は $\Delta \boldsymbol{X}^{(1)}, \Delta \boldsymbol{X}^{(2)}$ は x_1, x_2 軸上のベクトルなので $\Delta \boldsymbol{X}^{(1)} = (\Delta X_1^{(1)}, 0, 0),\ \Delta \boldsymbol{X}^{(2)} = (0, \Delta X_2^{(2)}, 0)$ として

$$|\Delta \boldsymbol{x}^{(1)}||\Delta \boldsymbol{x}^{(2)}| \cos\theta = F_{ij}F_{ik}\Delta X_j^{(1)}\Delta X_k^{(2)} = F_{i1}F_{i2}\Delta X_1^{(1)}\Delta X_2^{(2)}$$

変形が微小として $|\Delta \boldsymbol{x}^{(1)}| \simeq \Delta X_1^{(1)}$、$x_2$ 軸では $|\Delta \boldsymbol{x}^{(2)}| \simeq \Delta X_2^{(2)}$ とすれば、(5) から

$$\cos\theta \simeq F_{i1}F_{i2} \simeq \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} = 2e_{12}$$

変形前の角度は $\pi/2$ なので、x_1 軸からの角度を γ_1、x_2 軸からの角度を γ_2 として $\theta = \pi/2 - (\gamma_1 + \gamma_2)$ として、γ_1, γ_2 が微小なら

$$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2)) = \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \simeq \gamma_1 + \gamma_2$$

よって

$$\gamma_1 + \gamma_2 \simeq 2e_{12}$$

となり、角度の変化を与えるのが分かります。

・補足

極分解 (polar decomposition) を簡易的に示します。M を実数の $n \times n$ 正則行列とします。M から対称行列を

$$C = M^tM \quad (C^t = (M^tM)^t = M^tM = C)$$

と作ります。このとき、$C = UU = U^2$ となる行列 U が存在するとします。実対称行列の積は実対称行列なので U は実対称行列です。ベクトル a を $n \times 1$ 行列として（行列計算を行うのでベクトルを太字にしていません）

$$(Ma)^tMa = a^tM^tMa = a^tUUa = a^tU^tUa = (Ua)^tUa$$

これは $u = Ma$ の内積と $w = Ua$ の内積が等しいことを言っています。なので、u_i と w_i の変換は直交行列 R によって

$$u = Rw \quad (u_iu_i = R_{ij}w_jR_{ik}w_k = R_{ij}R_{ik}w_jw_k = (R^t)_{ji}R_{ik}w_jw_k = \delta_{jk}w_jw_k = w_iw_i)$$

と与えられます。そうすると

$$u = Rw$$

$$Ma = RUa$$

$$M = RU$$

となり、M は直交行列 R と実対称行列 U の積になります。
$MM^t = V^2$、ベクトル a を $1 \times n$ 行列としても同様に

$$aM(aM)^t = aMM^ta^t = aVVa^t = aV(aV)^t \ \Rightarrow \ u = wR \quad (u = aM\ ,\ w = aV)$$

なので、実対称行列 V では

$$u = wR$$

$$aM = aVR$$

$$M = VR$$

となります。